TIONSCADAL MATA

Téacs ⁊ Trialacha 4

ARDTEISTIMÉIREACHT
ARDLEIBHÉAL
SNÁITHE 2

O. D. MORRIS
PAUL COOKE
PAUL BEHAN

The Celtic Press

Is aistriúchán é seo ar Project Maths: Text & Tests 4 a d'fhoilsigh
The Celtic Press,
Foilsitheoirí Oideachais,
An Droichead Órga,
Baile Átha Cliath 8.

An Leagan Béarla

Nóta Buíochais
Míle buíochas le hAidan Raleigh a thug togha na comhairle uaidh agus an leabhar seo á réiteach.

Foilsithe den chéad uair in 2010 ag: The Celtic Press

Leagan amach agus obair ealaíne: Tech-Set Limited

Clóbhuailte agus ceangailte in Éirinn ag
Colour Books Limited,
Baile Dúill,
Baile Átha Cliath 13.

An Leagan Gaeilge
Aistrithe ag an gComhairle um Oideachas Gaeltachta agus Gaelscolaíochta.

Aistritheoirí: Bairbre Ní Ógáin, Diarmuid Clifford
Leagan amach: Barry Hurley

Buíochas leis na haistritheoirí a d'oibrigh ar an tsraith Téacs agus Trialacha a tháinig roimhe seo;
tá cuid den aistriúchán seo bunaithe ar a gcuid oibre.

An Chomhairle um Oideachas Gaeltachta agus Gaelscolaíochta,
22 Plás Mhic Liam,
Baile Átha Cliath 2.

Clár

TIONSCADAL MATA — SNÁITHE 2

caibidil 1 **An Chéimseata Chomhordanáideach: An Líne** 7

1.1 Súil siar ar na foirmlí 7
1.2 Achar triantáin 11
1.3 Cothromóid líne 13
1.4 Líne a roinnt i gcóimheas ar leith 17
1.5 Comhchumarachtaí triantáin 19
1.6 An fad ingearach ó phointe go dtí líne 21
1.7 An uillinn idir dhá líne 24
1.8 Úsáid a bhaint as gaolta líneacha chun fadhbanna a réiteach 26
Cuir triail ort féin 1 29
Achoimre ar Phríomhphointí 33

caibidil 2 **Triantánacht 1** 34

2.1 Tomhas ina raidiain 34
2.2 Cóimheasa triantánachta 37
2.3 Feidhmeanna triantánachta 41
2.4 Riail an tSínis – Achar triantáin 45
2.5 Riail an Chomhshínis 50
2.6 Fadhbanna tríthoiseacha 54
2.7 Graif d'fheidhmeanna triantánachta 60
2.8 Réitigh ghinearálta ar chothromóidí triantánachta 67
Cuir triail ort féin 2 71
Achoimre ar Phríomhphointí 77

caibidil 3 **Céimseata 1** 79

3.1 Uillinneacha, triantáin agus comhthreomharáin 79
3.2 Teoirimí a bhaineann le triantáin agus le comhthreomharáin 84
3.3 Teoirimí cóimheasa 89
3.4 Teoirimí i dtaobh an chiorcail 96
3.5 Teoirimí a chruthú go foirmiúil 104
Achoimre ar Phríomhphointí 110

caibidil 4 **An Chéimseata Chomhordanáideach: An Ciorcal** .. 111

4.1 Cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (0, 0) ... 111
4.2 Cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (h, k) agus ar ga dó r .. 114
4.3 Cothromóid ciorcail a fháil ... 118
4.4 Tadhlaithe leis an gciorcal ... 125
4.5 Línte agus ciorcail — An Comhchorda ... 131
4.6 Ciorcail a thadhlaíonn — Cordaí agus ciorcail ... 135
4.7 Ciorcail a thadhlaíonn leis an x-ais nó y-ais ... 138
Cuir triail ort féin 4 ... 141
Achoimre ar Phríomhphointí ... 145

caibidil 5 **Triantánacht 2** ... 146

5.1 Ionannais triantánachta ... 146
5.2 Uillinneacha comhshuite ... 149
5.3 Foirmlí na n-uillinneacha dúbailte agus na leathuillinneacha ... 153
5.4 Foirmlí na suimeanna, na ndifríochtaí agus na dtorthaí ... 158
5.5 Feidhmeanna triantánachta inbhéartacha ... 160
Cuir triail ort féin 5 ... 162
Achoimre ar Phríomhphointí ... 165

caibidil 6 **Céimseata 2: Méaduithe agus Tógálacha** ... 166

6.1 Méaduithe ... 166
6.2 Tógálacha ... 175
Cuir triail ort féin 6 ... 183
Achoimre ar Phríomhphointí ... 190

Freagraí ... 191

Réamhrá

Cuireadh i dtoll a chéile agus scríobhadh an leabhar seo le haghaidh ***Tionscadal Mata - Snáithe 2*** de Chúrsa Ardleibhéil na hArdteistiméireachta, ar cuireadh tús leis i Meán Fómhair 2010 agus é le scrúdú den chéad uair in 2012. Tá an cur chuige ginearálta i leith theagasc na matamaitice, mar atá sonraithe sna torthaí foghlama le haghaidh *Tionscadal Mata*, le sonrú sa leabhar. Spreagann sé ní hamháin forbairt ar eolas agus scileanna matamaiticiúla na scoláirí, ach, freisin, forbairt ar an tuiscint a theastaíonn chun na scileanna sin a chur i bhfeidhm.

Tá réimse sármhaith de cheisteanna ar gach topaic, ceisteanna atá scríofa le samhlaíocht agus a thabharfaidh dúshlán na scoláirí. Cabhróidh na ceisteanna leis na scoláirí chun an méid atá siad a dhéanamh a thuiscint agus chun a gcuid scileanna i réiteach fadhbanna a fhorbairt. Tá dóthain ceisteanna, a chuimsíonn gach pointe ar an scála deacrachta, curtha ar fáil chun riachtanais fhormhór mór na scoláirí ag an leibhéal seo a shásamh.

An dearadh spreagúil lándaite, mar aon leis an méid mór léaráidí dea-thógtha, ba cheart go gcabhróidís le tuiscint an scoláire ar an topaic a bhfuil sé/sí ag déanamh staidéir uirthi. Ag tús gach caibidle tá liosta na bhfocal tábhachtach. Beifear ag súil leis go mbeidh na focail sin ar eolas ag na scoláirí, agus tuiscint acu orthu, faoin am a mbíonn an chaibidil críochnaithe. Ag deireadh gach caibidle tá ceisteanna ***Cuir triail ort féin*** a sholáthraíonn comhdhlúthú agus athbhreithniú cuimsitheach. Tá leathanach ***Achoimre ar Phríomhphointí*** i ngach caibidil. Cuirfidh sé sin i gcuimhne do na scoláirí na príomhfhíricí agus na foirmlí tábhachtacha a d'fhoghlaim siad.

Is forlíonadh é an leabhar seo leis an téacsleabhar Téacs ⁊ Trialacha 4 atá ann cheana féin. Tá cuid de na caibidlí sa leabhar seo le háit na gcaibidlí comhfhreagracha in Téacs ⁊ Trialacha 4 a ghlacadh. Seo mar atá:

Glacann Caibidil 1 áit Chaibidil 3 de Téacs ⁊ Trialacha 4.
Glacann Caibidil 2 áit Chaibidil 2 de Téacs ⁊ Trialacha 4.
Glacann Caibidil 4 áit Chaibidil 12 de Téacs ⁊ Trialacha 4.
Glacann Caibidil 5 áit Chaibidil 5 de Téacs ⁊ Trialacha 4.

Caibidlí nua is ea Caibidlí 3 agus 6, a phléann le céimseata shintéiseach. Ní ghlacann siad áit caibidle ar bith de Téacs ⁊ Trialacha 4.

Na caibidlí eile de Téacs ⁊ Trialacha 4, ní mór staidéar a dhéanamh orthu le haghaidh scrúdú na hArdteistiméireachta 2012.

O.D. Morris
Paul Cooke
Paul Behan
Meán Fómhair 2010

An Chéimseata Chomhordanáideach: An Líne

caibidil 1

Focail Thábhachtacha

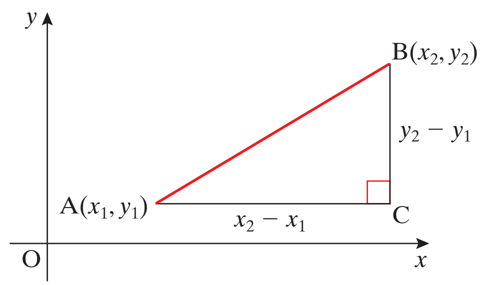
cothromóid **bunphointe** **ingearach** **comhthreomhar** **idirlíne**
aistriú **achar** **comhlíneach** **foirm na fána is na hidirlíne** **roinnt inmheánach**
roinnt sheachtrach **cóimheas** **meánlár** **imlár** **ingearlár** **gaol líneach**

MÍR 1.1: Súil siar ar na foirmlí

Féachfaimid arís sa mhír seo ar chuid d'fhoirmlí na céimseatan comhordanáidí a bhí ar chúrsa an Teastais Shóisearaigh. Seo iad na príomhfhoirmlí a bhaineann le comhordanáidí:

1. An fad idir dhá phointe

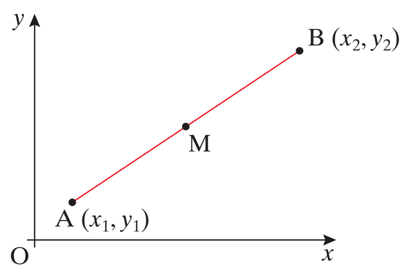
Is é an fad idir $A(x_1, y_1)$ agus $B(x_2, y_2)$:
$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



2. Lárphointe mírlíne

Is é lárphointe, M, na mírlíne ó $A(x_1, y_1)$ go dtí $B(x_2, y_2)$:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



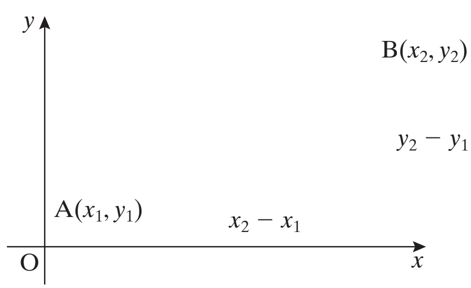
3. Fána líne

Sa léaráid ar dheis, faightear fána, m, AB ach an luach seo a

$$\frac{\text{athrú ceartingearach}}{\text{athrú cothrománach}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

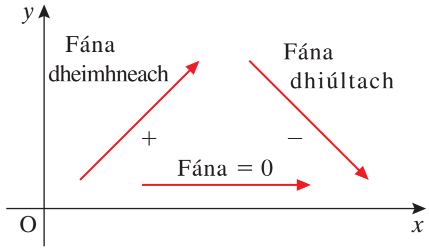
Is é fána, m, na líne trí (x_1, y_1) agus (x_2, y_2):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



4. Fánaí deimhneacha agus diúltacha

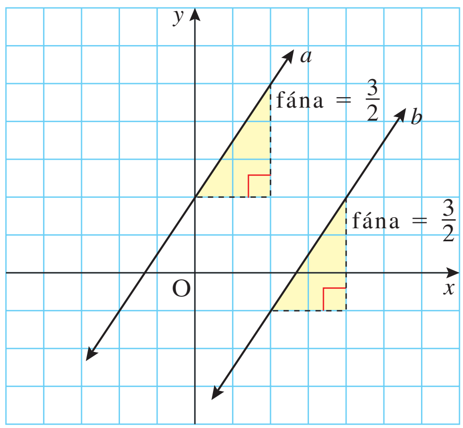
Agus muid ag dul ó chlé go deis, bíonn an fhána deimhneach má bhíonn an líne ag éirí agus bíonn an fhána diúltach má bhíonn an líne ag titim.



Is é nialas an fhána atá ag líne chothrománach.

5. Línte comhthreomhara

Is é $\frac{3}{2}$ an fhána atá ag líne a agus líne b araon sa léaráid thíos.



Tá na línte sin comhthreomhar.

Bíonn an fhána chéanna ag línte comhthreomhara..

6. Línte ingearacha

Tá na línte a agus b ar dheis ingearach le chéile.

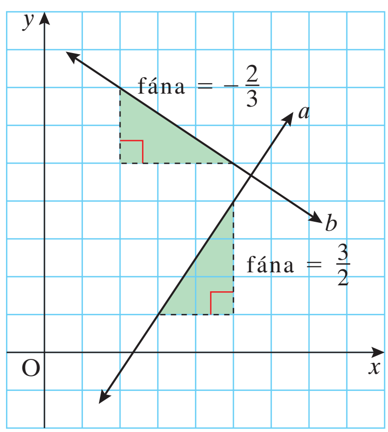
Is é $\frac{3}{2}$ fána a.

Is é $-\frac{2}{3}$ fána b.

Tabhair faoi deara gurb ionann fána amháin agus deilín na fána eile, ach tá an comhartha athraithe.

Tabhair faoi deara freisin gurb é -1, toradh an dá fhána i.e.,

$$-\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = -1$$



Má bhíonn dhá líne ingearach le chéile, is é toradh a bhfánaí ná -1, i.e.,

$$\boldsymbol{m_1 \times m_2 = -1}$$

Sampla 1

Is trí phointe ar an bplána iad A(3, 1), B(2, −3) agus C(−1, k).
Má tá AB ⊥ AC, faigh luach k.

A(3, 1) agus B(2, −3)

$$\text{Fána AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{2 - 3} = \frac{-4}{-1} = 4$$

A(3, 1) agus C(−1, k)

$$\text{Fána AC} = \frac{k - 1}{-1 - 3} = \frac{k - 1}{-4}$$

Má tá AB ⊥ AC, is é −1 toradh na bhfánaí.

$$\Rightarrow \quad 4 \times \frac{k-1}{-4} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4(k-1)}{-4} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4(k-1)}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad k - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad k = 2$$

Triailcheisteanna 1.1

1. Tugtar na trí phointe seo duit: A(−1, 3), B(3, −2) agus C(5, 2).
Faigh (i) |AB| (ii) |BC| (iii) fána AC (iv) lárphointe [BC].

2. Faigh M, lárphointe na mírlíne ó A(1, −6) go B(−3, 4).
Taispeáin uaidh sin go bhfuil |AM| = |MB|.

3. Is é fána na líne ℓ ná $\frac{3}{4}$.
(i) Cén fhána atá le líne ar bith atá comhthreomhar le ℓ?
(ii) Cén fhána atá le líne ar bith atá ingearach le ℓ?

4. Is ceithre phointe ar an bplána iad A(2, 3), B(−2, 1), C(−1, −2) agus D(5, 1).
Taispeáin go bhfuil AB comhthreomhar le CD.

5. Taispeáin go bhfuil A(−1, 1) agus B(1,3) comhthreomhar le C(6, 2) agus D(4, 4).

6. Má tá an líne trí (−2, 0) agus (4, 3) comhthreomhar leis an líne trí (1, −1) agus (k, 1), faigh luach k.

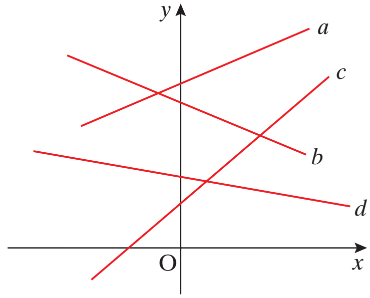
7. Is é 2 an fhána atá leis an líne dhíreach a ghabhann trí na pointí A(−1, 1) and B(−P, 13).
Cén luach atá ar P.

8. Is iad comhordanáidí na bpointí A, B agus C ná (−2, 3), (2, 5) agus (4,1) faoi seach.
(i) Faigh grádáin na línte AB, BC agus CA.
(ii) Uaidh sin, nó ar chaoi éigin eile, taispeáin gur triantán dronuilleach é ABC.

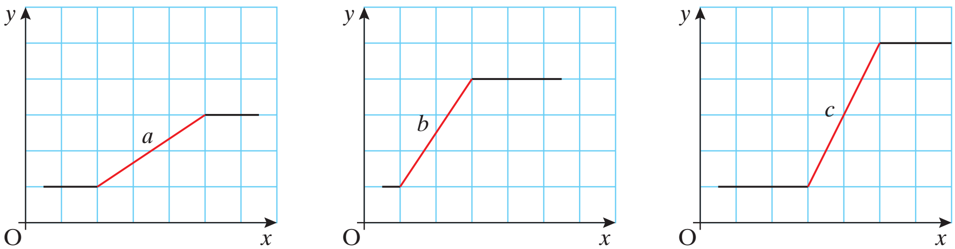
9. Taispeántar sa léaráid na ceithre líne a, b, c agus d.

(i) Cé acu línte a bhfuil fánaí deimhneacha leo?

(ii) Cé acu línte a bhfuil fánaí diúltacha leo?

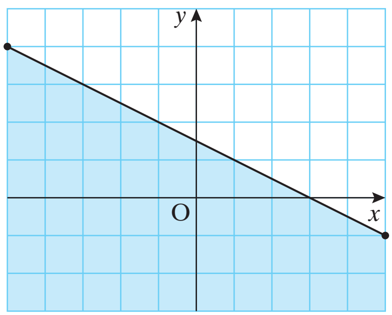


10. Tá na trí líne a, b agus c le feiceáil ar na greillí thíos:



I gcás gach líne, scríobh síos a fána.

11. Cén fáth ar diúltach atá fána na líne ar dheis?
Bain úsáid as an ngreille chun fána na líne a oibriú amach.



12. Is ceithre phointe iad P(a, 4), Q(2, 3), R(3, -1) agus S(-2, 4).
Má tá $|PQ| = |RS|$, faigh na luachanna a d'fhéadfadh a bheith ar a.

13. Is trí phointe iad P(5, 6), Q(k, 2) agus R(9, -1) sa chaoi is go bhfuil PQ ingearach le QR.
Faigh an dá luach atá ar k.

14. Tugtar duit na pointí A(-1, -2), B(7, 2) agus C(k, 4), áit ar tairiseach é k. Is iad na pointí sin reanna (nó stuaiceanna) an ABC. Is dronuillinn í an uillinn ABC..

(i) Faigh fána AB.

(ii) Faigh fána BC agus, uaidh sin, faigh luach k.

(iii) Taispeáin gur féidir fad [AB] a scríobh san fhoirm $p\sqrt{5}$, Is slánuimhir í p agus caithfear a luach a fháil.

(iv) Ag cuimhneamh gurb ionann achar triantáin agus leath an bhoinn iolraithe faoin airde ingearach, faigh luach beacht achar $\triangle$ABC.

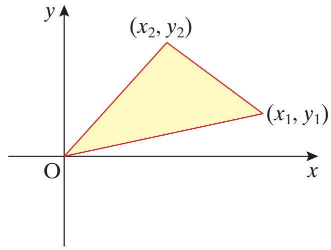
15. Is iad P(-2, 2), Q(q, 0) agus R(5, 3) na reanna ar thriantán.

(i) Tá an slios PQ dhá oiread chomh fada leis an slios QR. Faigh na luachanna a d'fhéadfadh a bheith ar q.

(ii) Taispeáin gur triantán dronuilleach é PQR nuair atá $q = 4$.

MÍR 1.2: Achar triantáin

Is í an fhoirmle le haghaidh achar triantáin a bhfuil na reanna (0,0), (x_1, y_1) agus (x_2, y_2) air:



$$\text{Achar} = \frac{1}{2}\,|x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

Sampla 1

Faigh achar an triantáin a bhfuil na reanna (0, 0), (−2, 1) agus (3, 4).

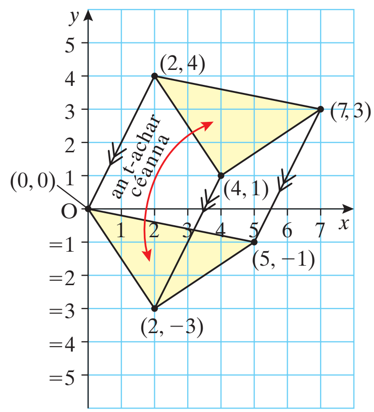
$$\begin{aligned}
\text{Achar} &= \tfrac{1}{2}\,|x_1 y_2 - x_2 y_1| \\
&= \tfrac{1}{2}\,|(-2)(4) - (3)(1)| \\
&= \tfrac{1}{2}\,|-8 - 3| \\
&= \tfrac{1}{2}\,|-11| \\
&= 5\tfrac{1}{2} \text{ aonad cearnach}
\end{aligned}$$

$(x_1, y_1) \downarrow (-2, 1)$ $(x_2, y_2) \downarrow (3, 4)$

Cuireann an tsiombail | | (modal) in iúl go nglacaimid luach deimhneach an fhreagra.

Nóta: Mura bhfuil ceann ar bith de reanna an triantáin ag an mbunphointe, faighimid íomhá an triantáin faoi aistriú ionas gur ceann de na reanna é (0, 0).

Bíodh (2, 4) → (0, 0)
(7, 3) → (5, −1)
(4, 1) → (2, −3)



Anseo bainimid 2 de gach x-luach agus 4 de gach y-luach i gcás gach ceann de na pointí.

Sampla 2

Faigh achar an triantáin a bhfuil na reanna (1, 5), (−3, 1) agus (3, −5).

Bíodh (1, 5) → (0, 0)
(−3, 1) → (−4, −4)
(3, −5) → (2, −10)

Anseo bainimid 1 de gach x -luach agus 5 de gach y -luach.

$$\begin{aligned}
\text{Achar an triantáin} &= \tfrac{1}{2}\,|x_1 y_2 - x_2 y_1| \\
&= \tfrac{1}{2}\,|(-4)(-10) - (2)(-4)| \\
&= \tfrac{1}{2}\,|40 + 8| \\
&= \tfrac{1}{2}\,|48| \\
&= 24 \text{ aonad cearnach}
\end{aligned}$$

$(x_1, y_1) \downarrow (-4, -4)$ $(x_2, y_2) \downarrow (2, -10)$

Nóta: Chun achar ceathairshleasáin a fháil, roinn ina dhá thriantán é.

Triailcheisteanna 1.2

1. Faigh achar an triantáin a bhfuil na reanna seo air
(i) $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$
(ii) $(0, 0)$, $(5, 1)$, $(3, 6)$
(iii) $(0, 0)$, $(-2, 3)$, $(1, -4)$
(iv) $(0, 0)$, $(3, 4)$, $(-2, -6)$

2. Is iad $A(2, 3)$, $B(-5, 1)$ agus $C(3, 1)$ na reanna ar thriantán.
Agus tú ag úsáid an aistrithe $A(2, 3) \rightarrow (0, 0)$, faigh íomhánna B agus C faoin aistriú seo.
Uaidh sin faigh achar an triantáin ABC.

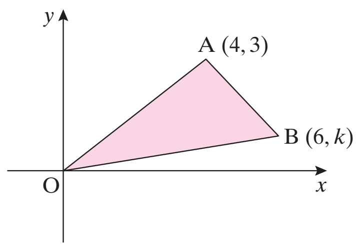
3. I gcás gach ceann de na triantáin seo, aistrigh ceann de na reanna go $(0, 0)$. Ansin bain úsáid as sin chun achar an triantáin a fháil.
(i) $(2, 3)$, $(5, 1)$ agus $(2, 0)$
(ii) $(-2, 3)$, $(4, 0)$ agus $(1, -4)$

4. Is iad $A(0, 0)$, $B(4, -1)$, $C(2, 3)$ agus $D(-2, 4)$ na reanna ar cheathairshleasán. Roinn an ceathairshleasán ina dhá thriantán, ABC agus ACD, agus, uaidh sin, faigh achar an cheathairshleasáin.

5. Is iad $A(0, 0)$, $B(1, 6)$ agus $C(-1, k + 1)$ na reanna ar thriantán.
Más é 7 aonad chearnacha achar an triantáin, faigh dhá luach le haghaidh k.

6. Is iad $A(4, 1)$, $B(-1, -3)$ and $C(3, k)$ na reanna ar thriantán..
Más é 12 aonad chearnacha achar an triantáin, faigh an dá luach ar k.

7. Faigh luachanna k más é 7 aonad chearnacha achar an triantáin ar dheis.



8. Faigh achar an triantáin a bhfuil na reanna $(0, 0)$, $(1, 3)$ agus $(2, 6)$ air.
Cén tátal is féidir leat a bhaint as do fhreagra?

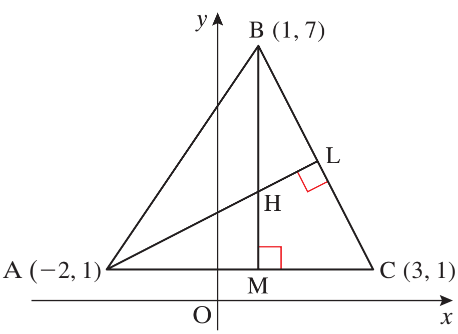
9. Is é achar an triantáin a bhfuil na reanna $(-2, -1)$, $(1, 2)$ agus $(k, 13)$ air ná 6. Faigh luachanna k.

10. Tá na comhordanáidí $A(2, 1)$, $B(b, 3)$ agus $C(5, 5)$, ag triantán, áit a bhfuil $b > 3$.
Má tá $|\angle ABC| = 90°$, faigh an luach atá ar b. Uaidh sin faigh achar an triantáin ABC..

11. Is pointí comhlíneacha $P(2, -1)$, $Q(8, k)$ agus $R(11, 2)$. Trí achar an 'triantáin' PQR a fháil, nó ar chaoi éigin eile, faigh an luach atá ar k.

Bíonn pointí comhlíneacha ar an líne dhíreach chéanna.

12. Taispeántar sa léaráid triantán a bhfuil na reanna $A(-2, 1)$, $B(1, 7)$ agus $C(3, 1)$ air.
Is é an pointe L bun an ingir ó A go BC, agus is é M bun an ingir ó B go AC.
(i) Agus tú ag úsáid [AC] mar bhonn, scríobh síos achar $\triangle ABC$.
(ii) Faigh $|BC|$.
(iii) Bain úsáid as do chuid freagraí ar (i) agus (ii), chun fad [AL] a fháil.



MÍR 1.3: Cothromóid líne

San fhoirm seo is gnách cothromóid na líne a thabhairt: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, m.sh., $2x + 3y - 12 = 0$. **An fhoirm ghinearálta ar chothromóid na líne** a thugtar uirthi sin.

Is gnách go gcaithfidh an t-eolas seo a bheith againn le cothromóid líne a fháil
(i) **pointe** ar an líne
(ii) **fána** na líne.

Má tá (x_1, y_1) ina phointe ar an líne, agus más é m an fhána léi, gheobhaimid cothromóid na líne ach leas a bhaint as $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$.

Más é m fána na líne, agus má tá (x_1, y_1) ina phointe ar an líne, is é cothromóid na líne: $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$

An chothromóid $y = mx + c$

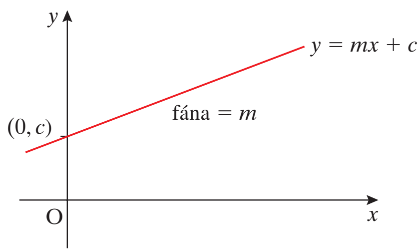
Más san fhoirm

$$\boldsymbol{y = mx + c},$$

a bhíonn cothromóid na líne,

(i) is é m an fhána
(ii) trasnaíonn an líne an y-ais ag $(0, c)$.

An **y-idirlíne** a thugtar ar an bpointe (0,c).



Foirm na fána is na hidirlíne de chothromóid líne a thugtar ar an gcothromóid $\boldsymbol{y = mx + c}$ de ghnáth.

Más san fhoirm $2x + 3y - 7 = 0$, a bhíonn cothromóid na líne, is san fhoirm $y = mx + c$ a shloinnimid í (a chuirimid in iúl í). Is é m an fhána.

Cuir i gcás, má tá $3x - 4y + 3 = 0$, tá

$$-4y = -3x - 3$$

$$\Rightarrow \quad 4y = 3x + 3 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

Nóta: Is é an sainmhíniú ar fhána líne ná tangant na huillinne a dhéanann an líne le treo **deimhneach** na hx-aise.

1. Má bhíonn an uillinn níos lú ná 90°, bíonn an fhána deimhneach.
2. Más idir 90° agus 180°, a bhíonn an uillinn, bíonn an fhána diúltach.
3. tan 45° = 1; tan 135° = −1

Sampla 1

Faigh cothromóid na líne tríd an bpointe $(-2, 3)$ atá ingearach leis an líne $2x - y + 5 = 0$.

Chun fána $2x - y + 5 = 0$, fháil, sloinnimid san fhoirm $y = mx + c$.

$$2x - y + 5 = 0$$
$$\Rightarrow \quad -y = -2x - 5$$
$$\Rightarrow \quad y = 2x + 5 \ldots \qquad \text{iolraigh gach téarma faoi } -1$$
$\Rightarrow$ is é 2 an fhána.

Is é fána na líne ingearach leis an líne seo ná $-\frac{1}{2}$.

Is é cothromóid na líne trí $(-2, 3)$ a bhfuil fána $-\frac{1}{2}$ léi ná:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (x_1, y_1) = (-2, 3)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2) \qquad m = -\frac{1}{2}$$

$$y - 3 = \frac{-x}{2} - 1$$

$\Rightarrow \quad 2y - 6 = -x - 2 \ldots$ iolraigh gach téarma faoi 2

$\Rightarrow \quad$ Is é $x + 2y - 4 = 0$ an chothromóid a theastaíonn.

Fadhbanna níos deacra

Is gnách go mbíonn dhá phíosa eolais ag teastáil le cothromóid líne (nó línte) a fháil

B'fhéidir nach féidir pointe ar an líne agus fána na líne a fháil láithreach ón eolas a thugtar duit. Is maith an cur chuige seo a leanas agus sinn ag iarraidh fadhbanna casta a réiteach.

1. Is é an chothromóid le haghaidh líne ar bith tríd an bpointe $(3, 4)$, mar shampla, ná $y \mathbf{-4} = m(x \mathbf{-3})$, i.e. $mx - y - 3m + 4 = 0$.
   Ba cheart go mbeimis in ann luach nó luachanna m a fháil ach píosa amháin eile eolais a bheith againn.

2. Is é $\mathbf{2}x \mathbf{- 3}y + 8 = 0$ an chothromóid le haghaidh líne ar bith atá comhthreomhar le $\mathbf{2}x \mathbf{- 3}y + c = 0$.
   Is é $x - 3y + 8 = 0$ an chothromóid le haghaidh líne ar bith atá ingearach le $3x + 2y + k = 0$.

Is é $ax + by + c = 0$ cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le $ax + by + k = 0$.
Is é $ax + by + c = 0$ cothromóid líne ar bith atá ingearach le $bx - ay + k = 0$.

An pointe ina dtrasnaíonn líne an x-ais nó an y-ais

An pointe ina dtrasnaíonn líne

(i) an x-ais, bíodh $y = 0$ agus faigh an x-luach.

(ii) an y-ais, bíodh $x = 0$ agus faigh an y-luach.

Sampla 2

Faigh luach k má tá na línte $2x + ky + 5 = 0$ agus $(k + 6)x + 2y - 9 = 0$ ingearach le chéile.

$2x + ky + 5 = 0 \Rightarrow$ an fhána $m_1 = \frac{-2}{k}$

$(k + 6)x + 2y - 9 = 0 \Rightarrow$ an fhána $m_2 = \frac{-(k + 6)}{2}$

Ós ingearach le chéile atá na línte, $m_1 \times m_2 = -1$.

$$\Rightarrow \quad \frac{-(k+6)}{2}\left(\frac{-2}{k}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2(k+6)}{2k} = -1$$

$$\Rightarrow \quad k + 6 = -k$$

$$\Rightarrow \quad 2k = -6$$

$$\Rightarrow \quad k = -3$$

Sampla 3

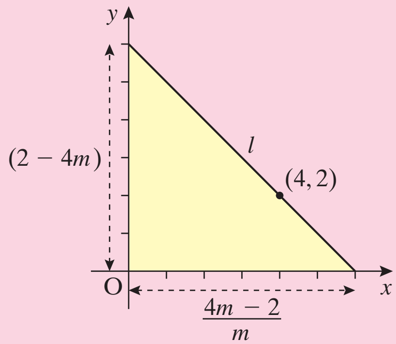
Faigh cothromóidí an dá líne fhéideartha tríd an bpointe (4, 2) i gcás gurb ionann agus 25 aonad cearnach achar an triantáin a shainítear le l, leis an x-ais dheimhneach, agus leis an y-ais dheimhneach.

Cothromóid líne ar bith trí (4, 2):

$$y - 2 = m(x - 4)$$

i.e. $mx - y + 2 - 4m = 0$

Le linn $y = 0$ a thrasnaíonn l an x-ais.



$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{4m - 2}{m}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 - 4m$$

Achar an $\triangle$ scáthaithe $= \frac{1}{2}\left(\frac{4m-2}{m}\right)(2 - 4m)$

Achar $= 25 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{4m-2}{m}\right)(2 - 4m) = 25$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (4m - 2)(2 - 4m) &&= 50m \\
&\Rightarrow 8m - 16m^2 - 4 + 8m &&= 50m \\
&\Rightarrow 16m^2 + 34m + 4 &&= 0 \\
&\Rightarrow (16m + 2)(m + 2) &&= 0 \\
&\Rightarrow m = -\frac{1}{8} \text{ nó } m &&= -2
\end{aligned}$$

$\therefore$ is iad seo cothromóidí na líne l:

(i) $y - 2 = -\frac{1}{8}(x - 4)$
$\Rightarrow 8y - 16 = -x + 4$
$\Rightarrow x + 8y - 20 = 0$

nó

(ii) $y - 2 = -2(x - 4)$
$\Rightarrow y - 2 = -2x + 8$
$\Rightarrow 2x + y - 10 = 0$

$\therefore$ is iad $x + 8y - 20 = 0$ agus $2x + y - 10 = 0$ an dá chothromóid.

Nóta: Le deimhniú go bhfuil pointe ar líne áirithe, cuirimid comhordanáidí x agus y isteach i gcothromóid na líne. Má shásaíonn na comhordanáidí an chothromóid, tá an pointe ar an líne.

Mar shampla, tá an pointe $(-3, 2) \in 2x - 4y + 14 = 0$, mar go bhfuil

$$\begin{aligned}
&2(-3) - 4(2) + 14 \\
&= -6 - 8 + 14 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Triailcheisteanna 1.3

1. Faigh cothromóid an dá líne seo:
   (i) An líne trí $(4, -1)$ a bhfuil fána 3 léi
   (ii) An líne trí $(-5, -2)$ a bhfuil fána -2 léi.

2. Faigh cothromóid na líne trí $(-3, 1)$ a bhfuil fána $\frac{2}{3}$ léi.

3. Is í an líne l an líne $x - 3y + 4 = 0$
   (i) Scríobh síos fána l.
   (ii) Faigh cothromóid na líne trí $(3, -4)$ atá comhthreomhar le l.

4. Is trí phointe ar an bplána iad A(3, −1), B(4, 5) agus C(−2, 1).
Faigh (i) fána AB
(ii) cothromóid na líne trí C atá ingearach le AB.

5. Má tá an líne $2x - 3y + 5 = 0$ ingearach le $3x + ky - 8 = 0$, faigh luach k.

6. Faigh luach t má tá na línte $3x + 4y = 7$ agus $2y - tx - 6 = 0$ ingearach le chéile.

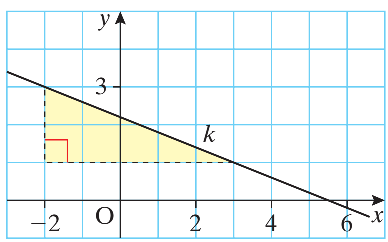
7. Faigh luach k má tá an pointe (3, 1) ar an líne $2x + ky - 8 = 0$.

8. Scríobh síos comhordanáidí na bpointí ina dtrasnaíonn an líne $x - 3y - 6 = 0$ an x-ais agus an y-ais.

9. Tá na pointí (6, −2) agus (−4, 10) ar an líne h.
Is é $ax + 6y + 12 = 0$ cothromóid na líne k agus tá k ingearach le h.
Faigh luach na réaduimhreach a.

10. Trasnaíonn an líne $2x - 3y + 6 = 0$ an x-ais sa phointe C.
(i) Find the coordinates of C.
(ii) Anois faigh cothromóid na líne a bhfuil an pointe C uirthi agus atá ingearach le $2x - 3y + 6 = 0$.

11. Scríobh síos fána na líne k sa léaráid ar dheis.
Anois faigh cothromóid na líne k san fhoirm $ax + by + c = 0$.



12. Faigh fánaí na bpéirí línte seo a leanas agus, uaidh sin, scríobh síos cé acu atá siad comhthreomhar le chéile, ingearach le chéile, nó nach bhfuil siad comhthreomhar ná ingearach le chéile.

(i)	$y = 3x$	$x = 3y$
(ii)	$2x + y = 1$	$x - 2y = 1$
(iii)	$2x + 3y = 4$	$2y = 3x - 2$
(iv)	$x + 2y - 1 = 0$	$x + 2y + 1 = 0$
(v)	$y = 2x - 1$	$2x - y + 3 = 0$
(vi)	$x + 3y - 2 = 0$	$y = 3x + 2$

13. Bain úsáid as cothromóidí comhuaineacha (comhchothromóidí) chun pointe trasnaithe na línte $x + 2y = 1$ agus $2x + 3y = 4$ a fháil.

14. Faigh pointe trasnaithe na línte $x + y = 5$ agus $2x - y = 1$.
Anois faigh cothromóid na líne a bhfuil an pointe trasnaithe seo uirthi agus a bhfuil fána $\frac{2}{3}$ léi.

15. Faigh cothromóid na líne atá comhthreomhar leis an líne $3x - y + 4 = 0$ agus a bhfuil pointe trasnaithe na línte $2x + 3y = 12$ agus $3x - 4y = 1$.

16. (i) Deimhnigh go bhfuil (2, 6) ar an líne $x - 2y + 10 = 0$.
(ii) Má tá an pointe (3, 2) ar an líne $2x + ky - 12 = 0$ 2), faigh luach k.

17. Trasnaíonn an líne $\ell_1 : 3x - 2y + 7 = 0$ agus an líne $\ell_2 : 5x + y + 3 = 0$ ia chéile sa phointe P.
Faigh cothromóid na líne trí P atá ingearach le ℓ_2.

18. Faigh i dtéarmaí k comhordanáidí na bpointí mar a dtrasnaíonn an líne $3x + 4y = k$ an x-ais agus an y-ais.
Más é 24 aonad cearnach achar an triantáin a shainítear le $3x + 4y = k$, leis an x-ais agus y-ais dheimhneach, faigh luach k.

19. Scríobh síos cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le $2x - 3y + 8 = 0$.
Má tá an pointe $(4, 2)$, ar cheann de na línte comhthreomhara, faigh cothromóid na líne sin.

20. Scríobh síos cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le $\ell: 4x + y = 6$.
Uaidh sin, faigh cothromóid na líne comhthreomhar le ℓ a shainíonn triantán 18 n-aonad chearnacha sa chéad cheathrú.

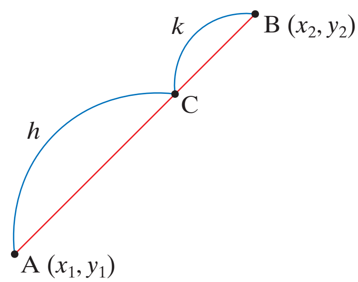
MÍR 1.4: Líne a roinnt i gcóimheas ar leith

Roinnt inmheánach

Sa chóimheas $h:k$ a roinneann an pointe C an mhírlíne [AB] sa léaráid ar dheis. San fhoirmle seo a thugtar comhordanáidí C:

$$C = \left(\frac{hx_2 + kx_1}{h + k}, \frac{hy_2 + ky_1}{h + k}\right)$$

Roinnteoir inmheánach

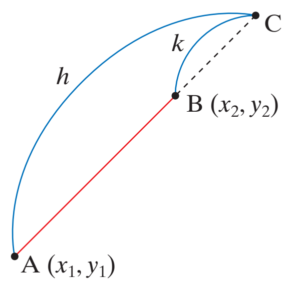


Roinnt sheachtrach

Sa chóimheas $h:k$ a roinneann an pointe C an mhírlíne [AB] go seachtrach sa léaráid ar dheis. San fhoirmle seo a thugtar comhordanáidí C:

$$C = \left(\frac{hx_2 - kx_1}{h - k}, \frac{hy_2 - ky_1}{h - k}\right)$$

Roinnteoir seachtrach



Sampla 1

Faigh comhordanáidí an phointe a dhéanann roinnt sa chóimheas 2:1 ar an mírlíne $A(-1, 3)$ agus $B(4, -2)$
(i) go hinmheánach (ii) go seachtrach.

$$A(-1, 3) \qquad B(4, -2) \qquad h:k = 2:1$$
$$\;\;\downarrow \qquad\qquad\quad \downarrow$$
$$(x_1, y_1) \qquad (x_2, y_2)$$

(i) Roinnteoir inmheánach $= \left(\dfrac{hx_2 + kx_1}{h + k}, \dfrac{hy_2 + ky_1}{h + k}\right)$

$$= \left(\frac{(2)(4) + (1)(-1)}{2 + 1}, \frac{(2)(-2) + (1)(3)}{2 + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

(ii) Roinnteoir seachtrach $= \left(\dfrac{hx_2 - kx_1}{h-k}, \dfrac{hy_2 - ky_1}{h-k}\right)$

$$= \left(\frac{(2)(4) - (1)(-1)}{2-1}, \frac{(2)(-2) - (1)(3)}{2-1}\right)$$

$$= (9, -7)$$

Triailcheisteanna 1.4

1. Faigh comhordanáidí an phointe a dhéanann roinnt inmheánach sa chóimheas 4:1 ar an mírlíne A$(-3, 4)$ agus B$(5, -4)$.

2. Faigh comhordanáidí an phointe P a dhéanann roinnt inmheánach sa chóimheas 3:1 ar an mírlíne X$(-5, 8)$ agus Y$(3, -8)$.

3. Faigh comhordanáidí an phointe a dhéanann roinnt sheachtrach sa chóimheas 5:2 ar an mírlíne ó $(2, -3)$ go $(4, 6)$

4. Gabhann mírlíne ó A$(5, 0)$ go B$(1, -2)$.
Faigh comhordanáidí an phointe a roinneann [AB] sa chóimheas 3:2
(i) go hinmheánach
(ii) go seachtrach.

5. Is iad A$(2, 3)$ agus B$(5, 7)$ na foircinn ar mhírlíne.
Faigh an pointe (x,y) a roinneann [AB] sa chóimheas 3:1
(i) go hinmheánach
(ii) go seachtrach.

6. Má leantar an mhírlíne A$(-2, -1)$ agus B$(3, 4)$ go dtí C, beidh $|AC| : |CB| = 4 : 1$.
Faigh comhordanáidí C.

7. Is dhá phointe ar an bplána iad A$(2, -3)$ agus B(x, y).
Roinneann an pointe P$(6, 1)$ [AB] go hinmheánach sa chóimheas 2:1.
Faigh luachanna x agus y.

8. Sa chóimheas 1:3 a roinneann an pointe P$(-6, y)$ an mhírlíne trí A$(-10, 7)$ agus B$(x, -5)$
Faigh luach x agus luach y.

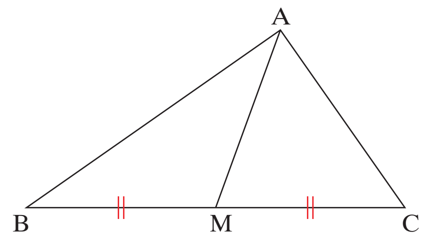
9. Is dhá phointe ar an bplána iad A$(x, 0)$ agus B$(0, y)$.
Roinneann an pointe C$(9, -8)$ [AB] go hinmheánach sa chóimheas 4:3.
Faigh luachanna x agus y.

10. Is iad A$(4, -3)$ agus B$(-2, 0)$ na foircinn ar mhírlíne.
Roinneann an pointe P$(2, -2)$ [AB] go hinmheánach sa chóimheas $h:k$.
Faigh an cóimheas $h:k$.

MÍR 1.5: Comhchumarachtaí triantáin

Meánlíne a thugtar ar an líne a cheanglaíonn rinn triantáin le lárphointe an tsleasa urchomhairigh.

Is meánlíne é [AM] sa triantán ar dheis.



1. An meánlár

Sa léaráid ar dheis taispeántar na trí mheánlíne [AE], [BF] agus [CD] agus iad ag trasnú a chéile sa phointe G.

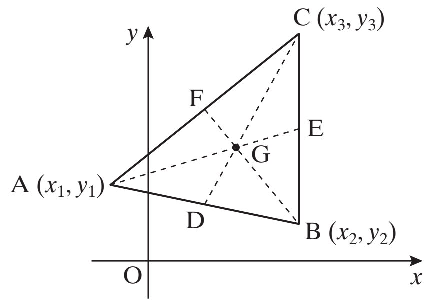
Meánlár an triantáin a thugtar ar G.

Sa chóimheas 2:1 a roinneann meánlínte triantáin a chéile.

Sa triantán ar dheis,

$|AG|:|GE| = 2:1$; $|BG|:|GF| = 2:1$ agus

$|CG|:|GD| = 2:1$.



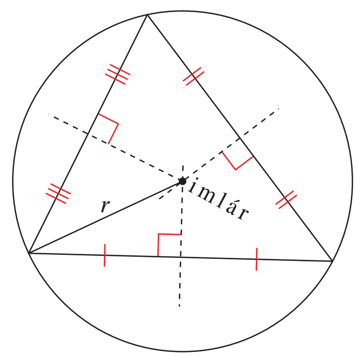
Más iad $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ agus $C(x_3, y_3)$ na reanna ar thriantán áirithe, is iad seo comhordanáidí an mheánláir, G:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

2. An t-imlár

Is ionann imlár triantáin agus an pointe ina dtrasnaíonn **meáningir** an triantáin sin a chéile (is iad na meáningir déroinnteoirí ingearacha na sleasa).

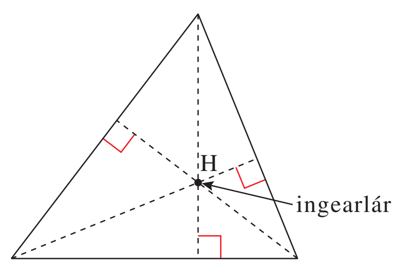
Is ionann an mhírlíne ó rinn triantáin go dtí an t-imlár agus ga an imchiorcail. Tá sé sin marcáilte r sa léaráid ar dheis.



3. An t-ingearlár

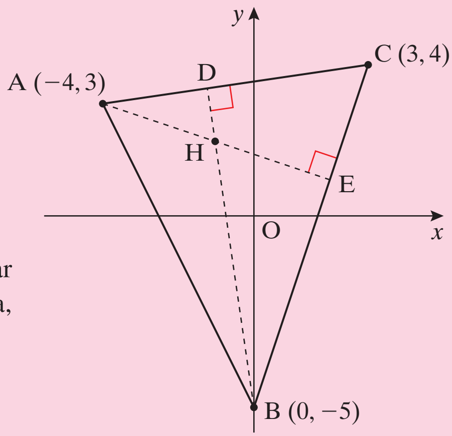
Is é an t-ingearlár pointe trasnaithe na n-ingear ó na reanna go dtí na sleasa urchomhaireacha.

Is é H an t-ingearlár sa triantán ar dheis.



Sampla 1

Is iad $A(-4, 3)$, $B(0, -5)$ agus $C(3, 4)$ na reanna ar thriantán áirithe.
Faigh comhordanáidí na bpointí seo:
(i) meánlár an triantáin (ii) ingearlár an triantáin..



(i) Meánlár $= \left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

$= \left(\dfrac{-4 + 3 + 0}{3}, \dfrac{3 + 4 + (-5)}{3}\right)$

$= \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

(ii) Is é an t-ingearlár pointe trasnaithe na n-ingear ó na reanna go dtí na sleasa urchomhaireacha, mar a thaispeántar ar dheis.
(Is leor dhá ingear.)

Fána BC $= \dfrac{4 + 5}{3 - 0} = \dfrac{9}{3} = 3$

$\Rightarrow$ fána AE $= -\dfrac{1}{3}$

Cothromóid AE: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $(x, y_1) = (-4, 3)$

$y - 3 = -\dfrac{1}{3}(x + 4)$

$\Rightarrow 3y - 9 = -x - 4$

$\Rightarrow x + 3y - 5 = 0 \ldots ①$

Fána AC: $\dfrac{4 - 3}{3 + 4} = \dfrac{1}{7}$

$\Rightarrow$ fána BD $= -7$

Cothromóid BD: $y + 5 = -7(x - 0)$ $B = (0, -5)$

$\Rightarrow 7x + y + 5 = 0 \ldots ②$

Ag réiteach chothromóidí ① agus ②: $x + 3y = 5 \ldots ①$
$7x + y = -5 \ldots ②$

① $x + 3y = 5$
② × 3: $21x + 3y = -15$
$-20x = 20 \Rightarrow x = -1$ and $y = 2$

$\therefore$ is iad comhordanáidí an ingearláir ná $(-1, 2)$

Triailcheisteanna 1.5

1. Faigh comhordanáidí an mheánláir sna triantáin seo:
(i) An triantáin a bhfuil na reanna $(2, -3)$, $(4, 0)$ agus $(-3, 9)$ air
(ii) An triantáin a bhfuil na reanna $(1, 3)$, $(6, 2)$ agus $(5, -2)$ air.

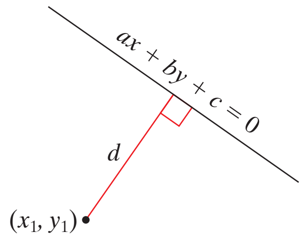
2. Faigh comhordanáidí an imláir i dtriantán a bhfuil na reanna $(0, 0)$, $(4, 0)$ agus $(1, 3)$.
(Tarraing sceitse chun do chuid oibre a shimpliú.)

3. Faigh comhordanáidí an imláir i dtriantán a bhfuil na reanna $(8, -2), (6, 2)$ agus $(3, -7)$ air.
4. Faigh comhordanáidí an ingearláir i dtriantán a bhfuil na reanna $A(4, 2), B(-2, 5)$ agus $C(-1, -3)$ air.
5. Faigh comhordanáidí an ingearláir i dtriantán a bhfuil na reanna $O(0, 0), A(4, -2)$ agus $B(4, 4)$ air.
6. Taispeáin gurb é $(1, -2)$ imlár an triantáin a bhfuil na reanna $(-2, 2), (-4, -2)$ agus $(5, -5)$ air.
7. Is iad $A(4, 6), B(-2, 7)$ agus $C(k, -4)$ na reanna ar thriantán.
   Más iad $(-1, 3)$ comhordanáidí an mheánláir ar an triantán, faigh luach k.

MÍR 1.6: An fad ingearach ó phointe go dtí líne

Is í an fhoirmle seo a thugann an fad ingearach, d, ón bpointe (x_1, y_1) go dtí an líne $ax + by + c = 0$:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Sampla 1

(i) Faigh an fad ingearach ón bpointe $(1, -4)$ go dtí an líne $3x - y - 2 = 0$.

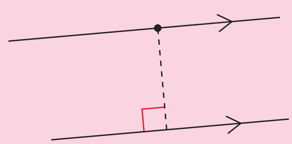
(ii) Faigh an fad idir an dá líne chomhthreomhara $3x - 4y + 12 = 0$ agus $3x - 4y - 1 = 0$.

(i) Fad ingearach $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ldots \left\{\begin{matrix} ax + by + c = 3x - y - 2 \\ (x_1, y_1) = (1, -4) \end{matrix}\right\}$

$$= \frac{|3(1) + (-1)(-4) + (-2)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

(ii) Mar seo a fhaightear an fad idir dhá líne chomhthreomhara: pointe a fháil ar cheann de na línte agus an fad idir an pointe sin agus an líne eile a fháil ansin..
Is pointe é $(0, 3)$ ar an líne $3x - 4y + 12 = 0$.



Is é an fad ingearach ó $(0, 3)$ go dtí $3x - 4y - 1 = 0$ ná:

$$d = \frac{|3(0) + (-4)(3) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-12 - 1|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{|-13|}{5} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Suíomh pointí agus líne

Bíonn comhartha an fhaid ingearaigh ó phointe go dtí líne an-úsáideach agus sinn ag scrúdú cé acu ar an taobh céanna de líne nó ar an dá thaobh chontrártha di atá pointí áirithe.

1. Is é an comhartha céanna a bhíonn ar na hingir le líne ó phointí ar an taobh céanna den líne.
2. Is é a mhalairt de chomhartha a bhíonn ar na hingir ó phointí ar an dá thaobh chontrártha den líne.

Sampla 2

Féach an ar an taobh céanna den líne $5x - 4y - 30 = 0$ atá na pointí $(5, -2)$ agus $(3, -3)$.

Is é an fad ingearach ó $(5, -2)$ go dtí an líne $5x - 4y - 30 = 0$ ná:

$$\text{Fad} = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$= \frac{5(5) + (-4)(-2) - 30}{\sqrt{5^2 + 4^2}}$$
$$= \frac{25 + 8 - 30}{\sqrt{41}} = \frac{3}{\sqrt{41}} \ldots\text{deimhneach}$$

Ní úsáidimid na barraí modail | | anseo mar go bhfuil freagra deimhneach nó diúltach uainn..

Is é an fad ingearach ó $(3, -3)$ go dtí an líne $5x - 4y - 30 = 0$ ná:

$$\text{Fad} = \frac{5(3) + (-4)(-3) - 30}{\sqrt{5^2 + 4^2}}$$
$$= \frac{15 + 12 - 30}{\sqrt{41}} = \frac{-3}{\sqrt{41}} \ldots\text{diúltach}$$

Ó tá malairt comharthaí ar na faid ingearacha, ní ar an taobh céanna den líne atá na pointí..

Sampla 3

Faigh cothromóidí an da líne atá comhthreomhar leis an líne $3x - 4y - 1 = 0$ agus 3 aonad uaithi.

Cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le $3x - 4y - 1 = 0$ is san fhoirm $3x - 4y + k = 0$ atá sí. Is pointe é $(0, -\frac{1}{4})$ ar an líne $x - 4y - 1 = 0$.

3 aonad atá an pointe $(0, -\frac{1}{4})$ ón líne $3x - 4y + k = 0$..

$$\Rightarrow \frac{|3(0) - 4(-\frac{1}{4}) + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$
$$\Rightarrow \frac{|1 + k|}{5} = 3$$
$$\Rightarrow \frac{1 + k}{5} = \pm 3 \quad \Rightarrow 1 + k = 15 \text{ nó } 1 + k = -15$$
$$\Rightarrow k = 14 \text{ nó } k = -16$$

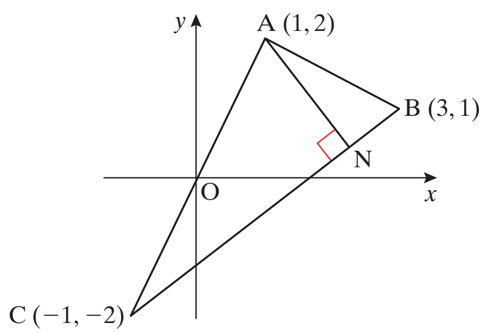
$|x| = 3$
$\Rightarrow x = \pm 3$

Is iad cothromóidí na línte:

$3x - 4y + 14 = 0$ or $3x - 4y - 16 = 0$.

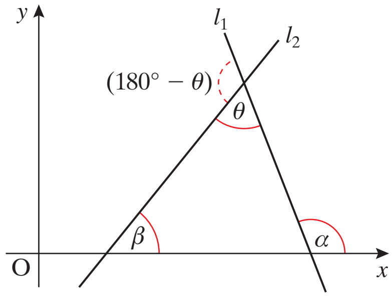
Triailcheisteanna 1.6

1. Faigh an fad ingearach ó $(2, -4)$ go dtí $3x - 4y - 17 = 0$.
2. Taispeáin go bhfuil an pointe $(1, 1)$ ar comhfhad ó na línte $3x + 4y - 12 = 0$ agus $5x - 12y + 20 = 0$.
3. Taispeáin gurb é $\sqrt{34}$ an fad ingearach ón bpointe $(6, 2)$ go dtí an líne $5x - 3y + 10 = 0$.
4. Fíoraigh (Deimhnigh) go bhfuil an pointe $(5, -5)$ ar comhfhad ó na línte $x - 2y + 10 = 0$ agus $2x + y - 30 = 0$.
5. Faigh na luachanna ar c más ionann 5 agus an fad ingearach ó $(3, 1)$ go dtí an líne $4x + 3y + c = 0$.
6. Fíoraigh go bhfuil an pointe $(2, 2)$ ar an líne $3x - y - 4 = 0$.
   Faigh uaidh sin an fad is giorra idir na línte comhthreomhara $3x - y - 4 = 0$ agus $6x - 2y + 7 = 0$.
7. Féach an bhfuil an pointe $(1, 1)$ ar comhfhad ó na línte $x + 7y - 3 = 0$ agus $x - y + 1 = 0$.
8. Faigh na luachanna ar a más ionann $\sqrt{10}$ agus an fad ingearach ón bpointe $(-2, 3)$ go dtí an líne $ax + y - 7 = 0$.
9. Má tá an pointe $(-2, a)$ ar comhfhad ó na línte $4x + 3y - 3 = 0$ agus $12x + 5y - 13 = 0$, faigh luach a, $a \in \mathbf{Z}$.
10. Taispeáin gur ar an taobh céanna den líne $3x + 2y - 7 = 0$ atá $(-2, 6)$ agus an bunphointe.
11. Taispeáin nach ar an taobh céanna den líne $3x + 4y - 36 = 0$ atá na pointí $(3, 4)$ agus $(9, 3)$.
12. An ar an taobh céanna den líne $2x - 3y + 7 = 0$ atá na pointí $(-3, 1)$ agus $(3, -4)$?
13. Scríobh síos cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le $4x + 3y + 1 = 0$.
    Uaidh sin faigh cothromóidí an dá líne atá comhthreomhar leis an líne $4x + 3y + 1 = 0$ agus dhá aonad uaithi.
14. Scríobh síos cothromóid líne ar bith atá ingearach leis an líne $3x - 4y + 5 = 0$.
    Anois faigh cothromóidí an dá líne atá ingearach leis an líne $3x - 4y + 5 = 0$, más é 4 aonad an fad ingearach ón bpointe $(1, 1)$ go dtí an dá líne.
15. Scríobh síos cothromóid líne ar bith tríd an bpointe $(-4, 2)$.
    Faigh uaithi sin cothromóidí an dá líne tríd an bpointe $(-4, 2)$ arb é 2 a bhfad ingearach ón mbunphointe.
16. 5 líne ar fad atá an t-ingear ón mbunphointe go dtí líne áirithe.
    Gabhann an líne tríd an bpointe $(3, 5)$.
    Faigh cothromóidí dhá líne den chineál sin.
17. Is iad na reanna ar thriantán ná na pointí A$(1, 2)$, B$(3, 1)$ agus C$(-1, -2)$.
    (i) Faigh fad an ingir ó A go BC, i.e. faigh $|AN|$.
    (ii) Uaidh sin faigh achar an triantáin ABC.



MÍR 1.7: An uillinn idir dhá líne

Tá an dá líne l_1 agus l_2.



Fána $l_1 = m_1$

$\Rightarrow m_1 = \tan \alpha$

Fána $l_2 = m_2$.

$\Rightarrow m_2 = \tan \beta$

Is é an uillinn, θ, idir na línte ná

$$\theta = \alpha - \beta$$

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Is é an dara huillinn idir l_1 agus l_2 ná $(180° - \theta)$.

$$\tan(180° - \theta) = -\tan \theta$$

$$= -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Ós féidir don uillinn idir l, agus l_2 a bheith ina géaruillinn nó ina maoluillinn, is gnách an uillinn a shainiú mar a thaispeántar ar dheis.

$$\tan \theta = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Nóta: Is gnách go n-úsáidimid $\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ chun an ghéaruillinn, θ idir dhá líne a fháil. Is é $180° - \theta$ an mhaoluillinn.

Sampla 1

Faigh an ghéaruillinn idir na línte $y = 2x + 5$ agus $3x + y = 7$.

Abraimis gurb é m_1 fána $y = 2x + 5 \Rightarrow m_1 = 2$

Abraimis gurb é m_2 fána $3x + y = 7 \Rightarrow m_2 = -3$

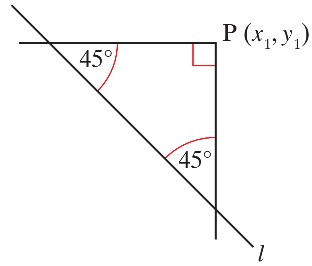
Is é θ an uillinn idir na línte.

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)} = \frac{2 + 3}{1 - 6} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$\tan \theta = -1 \Rightarrow \theta = 135°$$

$\therefore$ is é an ghéaruillinn ná $180° - 135° = 45°$

Fadhbanna níos deacra



Fabhb ar leith sa chéimseata chomhordanáideach is ea cothromóidí dhá líne a fháil sa chás go ngabhann an dá líne sin trí phointe a thugtar agus go ndéanann siad uillinn 45°, mar shampla, le líne a thugtar.

Feicimid sa léaráid ar dheis an dá líne trí P a dhéanann uillinn 45° leis an líne l.

Is é an tslí chun teacht ar chothromóidí na línte a theastaíonn, tosú leis an bhfoirmle seo:

$$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2},$$

Is é θ an uillinn idir an líne a theastaíonn agus an líne a thugtar, agus is é m_1 fána na líne a thugtar.

Leis na comharthaí $\pm$ a réitítear an chothromóid, agus is dhá luach ar m_2 a fhaightear.

Sampla 2

Faigh cothromóidí an dá líne tríd an bpointe (2, 3) a dhéanann uillinn 45° leis an líne $x - 2y = 1$.

Seasadh m_1 d'fhána na líne a thugtar, $x - 2y = 1$.

$$\Rightarrow m_1 = \tfrac{1}{2}$$

Seasadh m_2 d'fhána na líne a theastaíonn.

Uillinn 45° atá idir an dá líne.

Úsáidfimid an fhoirmle $\tan\theta = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, mar sin

$$\tan 45° = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \pm\frac{\frac{1}{2} - m_2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)m_2} \quad \Rightarrow \quad 1 = \pm\frac{1 - 2m_2}{2 + m_2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + m_2 = \pm(1 - 2m_2)$$

$$\Rightarrow \quad 2 + m_2 = 1 - 2m_2 \quad \text{or} \quad 2 + m_2 = -(1 - 2m_2)$$

$$\Rightarrow \quad 3m_2 = -1 \quad \text{or} \quad 2 + m_2 = -1 + 2m_2$$

$$\Rightarrow \quad m_2 = -\tfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad m_2 = 3$$

Ach leas a bhaint as an dá luach sin ar an bhfána agus as an bpointe (2, 3) is iad na cothromóidí a fhaighimid:

$\boldsymbol{m_2 = -\frac{1}{3}}$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = -\tfrac{1}{3}(x - 2)$$
$$3y - 9 = -x + 2$$
$$\text{i.e.} \quad x + 3y - 11 = 0$$

$\boldsymbol{m_2 = 3}$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = 3(x - 2)$$
$$\text{i.e} \quad 3x - y - 3 = 0$$

$\therefore$ is iad $x + 3y - 11 = 0$ agus $3x - y - 3 = 0$ na línte a theastaíonn.

Triailcheisteanna 1.7

1. Faigh tangant na géaruillinne idir gach ceann de na péirí línte seo a leanas:
(i) $x + 2y + 4 = 0$ agus $x - 3y + 2 = 0$
(ii) $2x + 3y - 1 = 0$ agus $x - 2y + 3 = 0$
(iii) $2x + y - 6 = 0$ agus $2x - 3y + 5 = 0$.

2. Faigh an ghéaruillinn idir na línte $y = 2x + 5$ agus $3x + y = 7$.

3. Faigh an mhaoluillinn idir na línte $x - 2y - 1 = 0$ agus $3x - y + 2 = 0$.

4. Faigh, go dtí an chéim is gaire, an uillinn is lú idir na línte $x - 3y + 4 = 0$ agus $2x + y - 5 = 0$.

5. Faigh méid na maoluillinne idir na línte $x - 2y + 7 = 0$ agus $3x - y + 2 = 0$.

6. Faigh méid na géaruillinne idir na línte $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ and $\sqrt{3}x - y - 7 = 0$.

7. Faigh fánaí na línte a dhéanann uillinn 45° leis an líne $2x - 3y + 1 = 0$.

8. Faigh cothromóidí an dá líne tríd an mbunphointe a dhéanann uillinn 45° leis an líne $2x + 3y - 4 = 0$.

9. Faigh cothromóidí an dá líne tríd an bpointe $(-1, 1)$ a dhéanann uillinn 45° leis an líne $2x + y - 2 = 0$.

10. Faigh cothromóidí an dá líne tríd an bpointe $(4, 2)$ a dhéanann uillinn $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ leis an líne $x + y - 2 = 0$.

11. Faigh cothromóid na líne a ndéanann an x-ais déroinnt ar an uillinn idir í agus an líne $2x - 3y - 6 = 0$.

12. Is í ℓ an líne $tx + y - 7 = 0$.
(i) Scríobh síos fána ℓ.
(ii) Más é 45° an uillinn idir an líne ℓ agus an líne $y = 2x + 5$, faigh dhá luach fhéideartha ar t.

MÍR 1.8: Úsáid a bhaint as gaolta líneacha chun fadhbanna a réiteach

Sa mhír seo léireoimid an tábhacht a bhaineann leis an líne dhíreach nuair a bhreactar ar ghraf an gaol idir dhá athróg. Ina lán turgnaimh eolaíochta, nuair a thaispeántar ar ghraf an gaol idir dhá thacar sonraí, bíonn na pointí ar líne dhíreach, nó an-ghar dó sin.

An **líne is fearr oiriúint** a thugtar ar an líne sin de ghnáth.
Déanfaimid tuilleadh staidéir ar an líne sin i gcuid eile den chúrsa.

Sa mhír seo ní bheimid ach ag plé le graif dhronlíneacha (graif ar a bhfuil líne dhíreach) agus taispeánfaimid cé chomh húsáideach agus a bhíonn siad i gcúrsaí eolaíochta agus gnó..

Sampla 1

10 cm ar fad a bhíonn lingeán nuair nach bhfuil sé sínte. Nuair a chrochtar é agus ualach 80 gceangailte leis, is é an fad sínte ná 28 cm. Ag glacadh leis go bhfuil síneadh an lingeáin i gcomhréir leis an ualach,

(i) tarraing graf den síneadh E, i gcoinne an ualaigh, L.
(Cuir an t-ualach, L, ar an ais chothrománach.)

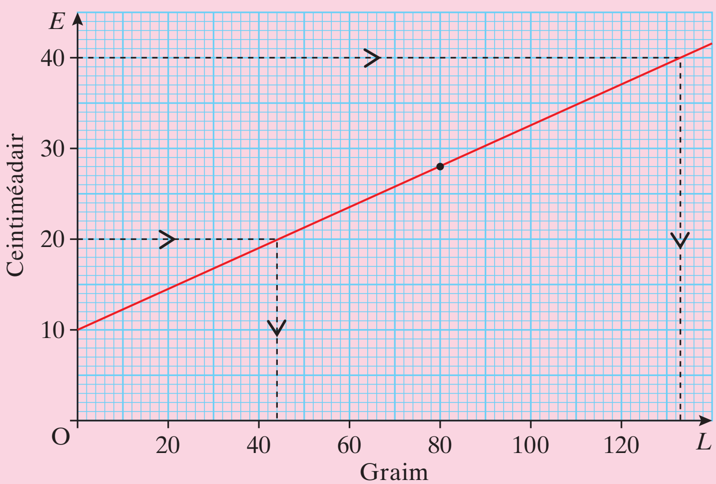
(ii) faigh cothromóid na líne atá tarraingthe agat i dtéarmaí L agus E.

(iii) bain úsáid as do ghraf le teacht ar an ualach a theastódh chun an lingeán a shíneadh 20 cm.

Téann an lingeán áirithe seo thar a theorainn leaisteach nuair a shíntear é go dtí ceithre oiread a bhunfhaid. (Ciallaíonn sé sin nach bhfillfidh sé ar a bhunfhad má níos mó ná sin é.)

(iv) Faigh an t-ualach a theastódh le go dtarlódh sé sin.

(i) Is dhá phointe ar an líne iad (0, 10) agus (80, 28).



(ii) Tá na pointí (0, 10) agus (80, 28) ar an líne.

$$\text{Fána} = \frac{28 - 10}{80 - 0} = \frac{18}{80} = \frac{9}{40}$$

Anseo cuirtear L in ionad x agus cuirtear E in ionad y.

Cothromóid na líne: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\text{E} - 10 = \frac{9}{40}(\text{L} - 0)$$

$$\Rightarrow \quad 40\text{E} - 400 = 9\text{L}$$

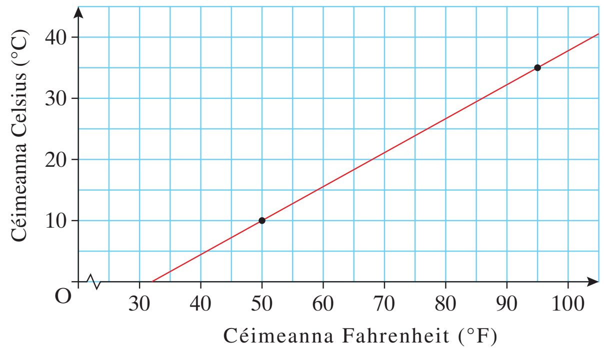
$\Rightarrow$ is é $9\text{L} - 40\text{E} + 400 = 0$ an chothromóid a theastaíonn.

(iii) Ón ngraf feicimid go dteastaíonn ualach 44 gram chun an lingeán a shíneadh go fad 20 cm.

(iv) Ualach 133 gram a theastaíonn chun an teorainn leaisteach de 40 cm a shroicheadh.

Triailcheisteanna 1.8

1. Taispeánann an graf líneach thíos an gaol idir céimeanna Celsius agus céimeanna Fahrenheit.



(i) Bain úsáid as an ngraf chun iad seo a leanas a thiontú (garmheastacháin a bheidh sna freagraí):
  (a) 35°C go Fahrenheit (b) 15°C go Fahrenheit
  (c) 50°F go Celsius (d) 100°F go Celsius.

(ii) Bain úsáid as an dá phointe atá marcáilte ar an ngraf chun cothromóid na líne a fháil san fhoirm $ax + by + c = 0$.

(iii) Bain úsáid as an gcothromóid atá faighte agat chun 95°C a thiontú go céimeanna Fahrenheit.

2. Nuair a thagann fear glanta cairpéad go dtí teach chun cairpéid a ghlanadh, bíonn a tháille €C

bunaithe ar an bhfoirmle $C = €(20 + 4M)$,

áit arb é M líon na méadar cearnach de chairpéid a ghlantar.
Tarraing graf dronlíneach den choibhneas seo, ag breacadh M ar an ais cothrománach le haghaidh $0 \leqslant M \leqslant 80$. Bain úsáid as do ghraf chun iad seo a leanas a fháil:

(i) an costas ar 75 m^2 de chairpéad a ghlanadh

(ii) an méid méadair chearnacha de chairpéad is féidir a ghlanadh ar €200.

Agus tú ag úsáid na foirmle, faigh

(iii) an costas ar 105 m^2 de chairpéad a ghlanadh.

3. Infheistítear suim €5000 agus íoctar ús simplí ag ráta 8%.

(i) Ríomh an t-ús a fhaightear tar éis bliain amháin, tar éis dhá bhliain, agus tar éis trí bliana, agus, uaidh sin, tarraing sceitse den ghraf d'úis (U) i gcoinne ama (A), ag cur ama ar an ais chothrománach.

(ii) Faigh cothromóid na líne atá tarraingthe agat, ag úsáid na n-athróg U agus A, áit a bhfuil $U =$ ús agus $A =$ am.

(iii) Bain úsáid as an gcothromóid le teacht ar an bhfad ama a gcaithfear an t-airgead a infheistiú le go sroichfidh an t-ús iomlán €3500.

Ach an t-ús a shuimiú leis an tsuim atá infheistithe, gheobhaidh tú méid na hinfheistíochta tar éis tréimhse ama.

(iv) faigh cothromóid na líne atá tarraingthe agat, ag úsáid na n-athróg P agus L.

4. Tá gnólacht a dhéanann seaicéid in ann 100 seaicéad a dhéanamh in aghaidh an lae, ach ní féidir leis iad sin ar fad a dhíol má bhíonn ar na mórdhíoltóirí níos mó ná €60 a íoc ar sheaicéad. Ar an láimh eile, ní féidir ach 50 seaicéad sa lá a dhíol ag an bpraghas atá ar sheaicéad faoi láthair, €100. Ag glacadh leis gur líne dhíreach é an graf de phraghas, P, i gcoinne líon na seaicéad a dhíoltar in aghaidh an lae, L,

(i) tarraing sceitse den ghraf, ag cur líon na seaicéad a dhíoltar in aghaidh an lae ar an ais cheartingearach

(ii) faigh cothromóid na líne atá tarraingthe agat, ag úsáid na n-athróg P agus L.

Bain úsáid as an gcothromóid chun iad seo a fháil:

(iii) an praghas ag a bhféadfaí 88 seaicéad in aghaidh an lae a dhíol

(iv) líon na seaicéad ba chóir a dhéanamh dá mbeidís le díol ar €72 an ceann.

5. Bíonn dhá ghnólacht tacsaithe in iomaíocht le chéile. Tá na struchtúir seo a leanas acu maidir le táillí:

Gnólacht A: táille sheasta €5 móide €2 in aghaidh an chiliméadair

Gnólacht B: gan aon táille sheasta agus €2.20 in aghaidh an chiliméadair

(i) Sceitseáil an graf de phraghas (ais cheartingearach) i gcoinne an fhaid a taistealaíodh don dá ghnólacht (ar na haiseanna céanna).

(ii) Faigh cothromóid an dá líne, ag úsáid P le haghaidh praghais agus F le haghaidh an fhaid a taistealaíodh.

(iii) Bain úsáid as do ghraf le fáil amach céard é an fad dá ngearrann an dá ghnólacht an méid céanna.

(iv) Cé acu gnólacht a d'úsáidfeá dá mbeadh turas 12 km le déanamh agat?

6. Nuair a thagann athrú ar phraghas margaidh earra a dhíoltar i saormhargadh, tagann athrú freisin ar an líon den earra sin a ordaítear, D, agus ar an líon den earra a sholáthraítear, S.
I mí áirithe, $D = 20 + 0.2p$ agus $S = -12 + p$.

(i) Sceitseáil an dá líne sin ar an ngraf céanna.

Sroicheann an margadh cothromaíocht nuair is ionann an líon a ordaítear agus an líon a sholáthraítear.

(ii) Faigh an praghas cothromaíochta agus an líon a cheannaítear agus a dhíoltar ag an staid cothromaíochta sin.

CUIR TRIAIL ORT FÉIN 1

Ceisteanna A

1. Is é $3x - 2y + 6 = 0$ cothromóid na líne ℓ.
Faigh cothromóid na líne ingearach le ℓ a bhfuil an pointe $(-1, 4)$ uirthi.

2. Faigh achar an triantáin a bhfuil na reanna $(0, 0)$, $(3, -2)$ agus $(-2, 4)$ air.

3. Tá na pointí $(3, -2)$ agus $(1, 6)$ ar an líne ℓ.
Má tá an líne $2x + ay + 7 = 0$ ingearach le ℓ, faigh luach a.

4. $\frac{1}{3}$ an fhána atá leis an líne trí $(6, a)$ agus $(-3, 6)$.
Céard é luach a?

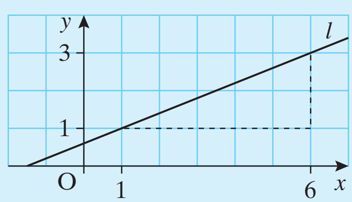
5. Trasnaíonn an líne $y = \frac{3}{2}x - 2$ an x-ais ag an bpointe P agus an y-ais ag an bpointe Q.

(i) Scríobh síos fána na líne.

(ii) Faigh comhordanáidí P agus Q.

(iii) Ríomh achar an triantáin OPQ, áit arb é O an bunphointe.

6. Scríobh síos fána na líne ar dheis, l.
Uaidh sin faigh cothromóid l.



7. Línte díreacha iad $y = k^2x + 12$ agus $2ky = 4x + 5$ agus $k \neq 0$, agus tá siad ingearach le chéile.
(i) Faigh luach k.
(ii) Faigh pointe trasnaithe an dá líne.

8. Faigh amach cé acu de na péirí línte seo a leanas atá ingearach lena chéile:
(a) $2x + y = 3$ agus $x - 2y + 4 = 0$
(b) $y = 3x + 2$ agus $x + 3y - 2 = 0$
(c) $y + 2x + 1 = 0$ agus $x = 2y - 4$
(d) $x + 3y = 6$ agus $3x + y + 2 = 0$

9. Faigh cothromóid na líne tríd an bpointe $(5, 2)$ atá ingearach leis an líne $x + 2y - 3 = 0$.

10. Déroinnteoir ingearach na líne trí na pointí $(1, 2)$ agus $(5, 4)$ buaileann sé leis an y-ais ag an bpointe $(0, k)$.
Faigh k.

Ceisteanna B

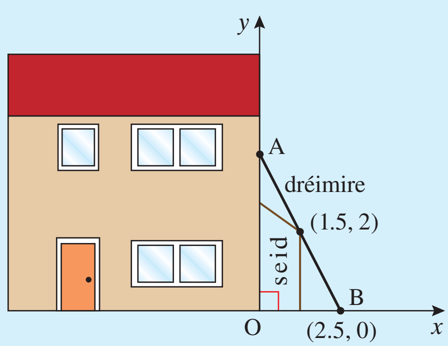
1. (i) Ríomh an fad ingearach ón bpointe $(-1, -5)$ go dtí an líne $3x - 4y - 2 = 0$.
(ii) An fad céanna atá an pointe $(-1, -5)$ ó na línte $3x - 4y - 2 = 0$ agus $3x - 4y + k = 0$, $k \neq -2$. Faigh luach k.

2. (i) Cuir i gcás na pointí $A(-7, 3)$ agus $B(8, -2)$.
Faigh comhordanáidí an phointe a roinneann [AB] sa chóimheas $2 : 3$.
(ii) Is é ℓ an líne $2x + ky = 6$.
(a) Faigh, i dtéarmaí k, na pointí ina dtrasnaíonn ℓ an x-ais agus an y-ais.
(b) Más é k aonad cearnach achar an triantáin a shainítear le ℓ, leis an x-ais agus leis an y-ais, faigh luach k.

3. (i) Faigh cothromóid na líne atá comhthreomhar leis an líne $2x + y = 5$ agus a ghabhann tríd an bpointe $(2, 5)$.
(ii) (a) Faigh cothromóid na líne ℓ atá ingearach leis an líne $2x + y = 5$ agus a ghabhann tríd an bpointe $(1, k)$, áit ar tairiseach é k.
(b) Uaidh sin faigh an luach ar k dá ngabhann an líne ℓ tríd an mbunphointe.

4. Is iad $A(4, 2)$, $B(-1, 7)$ agus $C(h, k)$ na reanna ar thriantán áirithe.
Más iad $(2, 4)$ comhordanáidí an mheánláir ar an triantán ABC, faigh luachanna h and k.

5. Chun an fhuinneog thuas staighre ar thaobh tí a ghlanadh, ní mór an dréimire a leagan síos sa chaoi is nach dteagmhaíonn sé ach le himeall na seide le balla, mar athaispeántar sa léaráid. Seasann na comhordanáidí d'fhaid ó O i méadair, sna treonna x agus y a thaispeántar.
(i) Faigh cothromóid líne an dréimire.
(ii) Faigh airde an phointe A a shroicheann barr an dréimire.
(iii) Faigh fad an dréimire, ceart go dtí an ceintiméadar is gaire.



6. Faigh comhordanáidí an ingearláir i dtriantán a bhfuil na reanna $(1, 8)$, $(1, -2)$ agus $(7, 1)$.

7. Gabhann an líne k tríd an bpointe $(-4, 6)$ agus tá fána m léi, áit a bhfuil $m > 0$.
   (i) Scríobh síos cothromóid k i dtéarmaí m.
   (ii) Faigh, i dtéarmaí m, comhordanáidí na bpointí ina dtrasnaíonn k na haiseanna..
   (iii) Is é 54 aonad cearnach achar an triantáin a shainítear le k, leis an x-ais agus leis an y-ais. Faigh na luachanna féideartha ar m.

8. (i) Faigh luach k más é 6 aonad an fad ón bpointe $(3, k)$ go dtí an líne $3x - 4y + 7 = 0$ agus má tá $k < 0$.
   (ii) Bain úsáid as an luach sin ar k le teacht ar chothromóid na líne trí $(3, k)$ atá comhthreomhar leis an líne $3x - 4y + 7 = 0$.

9. Tá an pointe $(2, 5)$ ar an líne ℓ agus tá fána m léi.
   (i) Faigh cothromóid ℓ i dtéarmaí m.
   (ii) Faigh, i dtéarmaí m, comhordanáidí na bpointí ina dtrasnaíonn ℓ an x-ais agus an y-ais.
   (iii) Faigh luachanna m más é 36 aonad cearnach achar an triantáin a shainítear le ℓ, leis an x-ais dheimhneach agus an y-ais dheimhneach.

10. Is dronuilleog é ABCD, áit arb iad A, B agus C na pointí $(3, 4)$, $(1, k)$ agus $(4, -3)$ faoi seach.
   (i) Faigh grádán na líne AB. Tabhair do fhreagra i dtéarmaí k.
   (ii) Faigh amach an dá luach fhéideartha ar k.
   (iii) Faigh achar na dronuilleoige ABCD sa chás go bhfuil k deimhneach..

Ceisteanna C

1. (i) Tá fána dheimhneach leis an líne k agus gabhann sí tríd an bpointe P $(2, -9)$. Trasnaíonn k an x-ais ag Q agus an y-ais ag R agus $|PQ| : |PR| = 3 : 1$. Faigh comhordanáidí Q agus comhordanáidí R.
   (ii) Trasnaíonn an líne $3x + 2y = c$ an x-ais ag P agus an y-ais at Q. Más é 24 aonad cearnach achar an triantáin OPQ, faigh luach c.

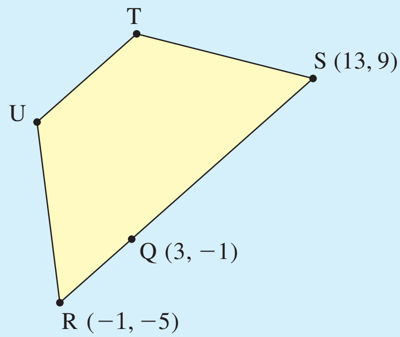
2. Faigh cothromóidí an dá líne comhthreomhar le $4x - 3y + 8 = 0$ más é 4 an fad ingearach ón mbunphointe go dtí an dá líne.

3. Is iad $(0, -9)$, $(-3, 6)$ agus $(8, 3)$ na reanna ar thriantán.
   (i) Faigh comhordanáidí imlár an triantáin..
   (ii) Faigh fad gha an imchiorcail.
   (iii) Faigh achar an chiorcail i dtéarmaí π.

4. Sa chomhthreomharán OABC, áit arb é O an bunphointe, is é B an pointe $(2, 3)$. Is é cothromóid OA ná $x = 4y$ agus is é fána OC ná -1.
   (i) Tarraing sceitse garbh den chomhthreomharán agus ansin faigh cothromóid BC.
   (ii) Faigh comhordanáidí na bpointí A agus C.

5. Faigh cothromóidí na línte tríd an bpointe $(2, 4)$ a dhéanann uillinn $45°$ leis an líne $x - 2y - 6 = 0$.

6. Is ceathairshleasán é RSTU. R = (−1, −5) agus S = (13, 9).
Tá Q(3, −1) ar an líne RS.



(i) Is iad $(-2k, 3k)$ comhordanáidí U, áit a bhfuil $k \in \mathbb{R}$ agus $k > 0$.
Is é 28 aonad cearnach achar an triantáin RQU.
Faigh luach k.

(ii) Is é $-\frac{3}{11}$ fána TS agus tá SR comhthreomhar le TU.
Faigh comhordanáidí T.

7. Nuair is é 7% an ráta úis do thaiscí, meallann cumann foirgníochta beag coigiltí €35 milliún.
Nuair a ardaítear an ráta go dtí 8.5%, tagann méadú €2 mhilliún ar na coigiltí.
Ag glacadh leis gur líneach atá an graf de choigiltí i gcoinne rátaí úis i gcás rátaí úis idir 5% agus 12%,

(i) sceitseáil an graf de choigiltí (i milliúin euro) i gcoinne rátaí úis (%) san eatramh seo.
Cuir na rátaí úis ar an ais chothrománach.

(ii) faigh cothromóid na líne.

Bain úsáid as an gcothromóid atá faighte agat chun

(iii) luach na gcoigiltí a mheallann ráta 11.5% a fháil

(iv) teacht ar an ráta úis a theastaíonn chun coigiltí €40 milliún a mhealladh.

8. Tá an pointe (2, −4) ar líne áirithe, agus tá fána m léi, $m \neq 0$.
Trasnaíonn an líne an x-ais ag $(x_1, 0)$ agus an y-ais ag $(0, y_1)$.
Má tá $x_1 + y_1 = -4$, faigh fánaí an dá líne a shásaíonn an coinníoll sin.
Uaidh sin faigh tangant na géaruillinne idir an dá líne..

9. Is é ℓ an líne $4x + 3y - 5 = 0$.

(i) Fíoraigh go bhfuil $(2, -1) \in \ell$.

(ii) Scríobh síos cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le ℓ.

(iii) Faigh uaidh sin cothromóidí an dá líne atá comhthreomhar le ℓ agus 2 aonad uaithi.

10. Is é ℓ an líne $tx + (t + 2)y - 11 = 0$, agus tá $t \in R$.

(i) Scríobh síos fána ℓ i dtéarmaí t.

(ii) Más uillinn 45° atá idir an líne ℓ agus an líne $x - 2y - 1 = 0$, faigh an dá luach fhéideartha ar t.

Achoimre ar Phríomhphointí

Le haghaidh aon dá phointe $A(x_1, y_1)$ agus $B(x_2, y_2)$:

1. **Fad [AB]** $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. **Lárphointe [AB]** $= \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \quad \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

3. **Fána, *m*, AB:** $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

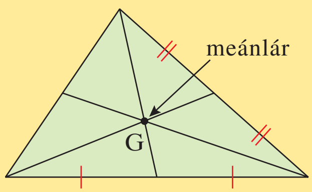
4. **Achar triantáin**
Is í seo an fhoirmle le haghaidh achar triantáin a bhfuil na reanna $(0, 0)$, (x_1, y_1) agus (x_2, y_2) air:
Achar $= \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

5. Má tá fána m_1 le líne amháin agus fána m_2 le líne eile agus más é θ an uillinn eatarthu,
$\tan\theta = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$.

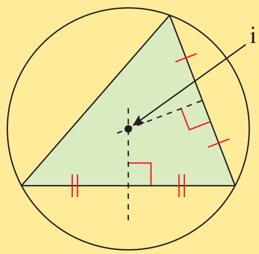
6. Is í an fhoirmle seo a thugann an fad ingearach ón bpointe (x_1, y_1) go dtí an líne $ax + by + c = 0$:
$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

7. Is é an pointe a roinneann an mhírlíne ó (x_1, y_1) agus (x_2, y_2) sa chóimheas $h : k$ ná
Go hinmheánach: $\left(\dfrac{hx_2 + kx_1}{h + k}, \dfrac{hy_2 + ky_1}{h + k}\right)$ **Go seachtrach:** $\left(\dfrac{hx_2 - kx_1}{h - k}, \dfrac{hy_2 - ky_1}{h - k}\right)$

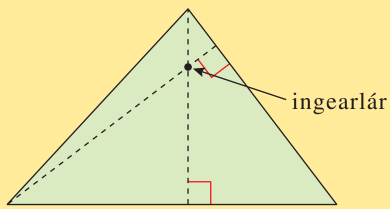
8. Is é **meánlár** triantáin pointe trasnaithe na meánlínte.
$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$



9. Is é **imlár** triantáin pointe trasnaithe dhéroinnteoirí ingearacha na sleasa.



10. Is é **ingearlár** triantáin pointe trasnaithe na n-ingear ó na reanna go dtí na sleasa urchomhaireacha.



caibidil 2

Triantánacht 1

Focail Thábhachtacha

tomhas ina raidiain   stua   teascóg   feidhm thriantánachta   ciorcal an aonaid   ceathrú   riail an tsínis   riail an chomhshínis   tríthoiseach   uillinn airde   uillinn ísle   peiriad   raon   peiriadach   asamtóit   réiteach ginearálta

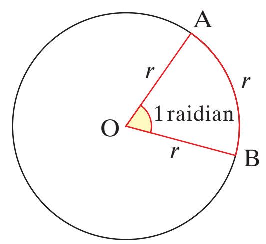
MÍR 2.1: Tomhas ina raidiain

I do chuid staidéir ar an gcéimseata agus ar an triantánacht go dtí seo, is le huillinneacha a bhí tomhaiste ina gcéimeanna a bhí tú ag obair. Is ionann imrothlú amháin agus 360°. Beagnach i gcónaí san ardtriantánacht áfach, is ina raidiain a thomhaistear na huillinneacha.

Sa léaráid ar dheis taispeántar an stua AB agus é ar comhfhad leis an nga, r.

Deirtear gurb é tomhas $\angle AOB$ ná 1 raidian amháin.

Dá mba $2r$ ar fad a bheadh an stua AB, 2 raidian a bheadh in $|\angle AOB|$.



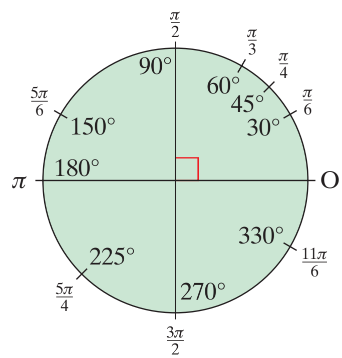
Raidian Is ionann raidian agus méid na huillinne ag lárphointe ciorcail atá á iompar ag stua atá ar comhfhad leis an nga.

Is ionann imlíne gach ciorcail agus $2\pi r$, i.e., 2π a iolrú faoin nga, agus ciallaíonn sé sin gur 2π raidian a bhíonn in imrothlú iomlán amháin.

$$\Rightarrow \quad 2\pi \text{ raidian} = 360°$$
$$\Rightarrow \quad \pi \text{ raidian} = 180°$$

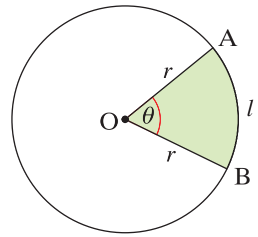
Is minic a bhaintear leas as na huillinneacha seo, agus is ina gcéimeanna agus ina raidiain a thugtar sa bhosca seo iad:

Céimeanna	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Raidiain	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



Tharla π raidian $= 180° \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ raidian} = \dfrac{180°}{\pi} = 57{\cdot}3°$

Fad stua — Achar teascóige



Más ionann l agus fad stua ciorcail ar ga dó r, is mar seo a thugtar θ, an uillinn ag lárphointe an chiorcail.

$$\theta \text{ raidian } = \frac{l}{r}$$

$$\Rightarrow \quad l = r\theta$$

Chomh maith leis sin, ós ionann achar an chiorcail agus πr^2, is ionann achar na teascóige AOB agus

$$\text{Achar} = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 \Rightarrow \text{Achar} = \frac{\theta r^2}{2} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Fad stua $l = r\theta$
Achar teascóige $= \frac{1}{2} r^2 \theta$

Sampla 1

Scríobh (i) $\frac{2\pi}{5}$ raidian ina gcéimeanna
(ii) 210° ina raidiain.

(i) $\frac{2\pi}{5}$ raidian $= \frac{2 \times 180^\circ}{5} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

(ii) 210° a iompú ina raidiain

$180^\circ = \pi$ raidian

$\Rightarrow \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ raidian

$\Rightarrow \quad 210^\circ = \frac{\pi}{180} \times \frac{210}{1}$ raidian $= \frac{21\pi}{18}$

$= \frac{7\pi}{6}$ raidian

Sampla 2

Faigh iad seo i gcás ciorcail ar ga dó 8 cm.
(i) an uillinn ag lárphointe an chiorcail atá á iompar ag stua 10 cm ar fad
(ii) fad an stua, más ionann $\frac{\pi}{4}$ agus an uillinn ag lárphointe an chiorcail atá á hiompar ag an stua sin.

(i) Fad an stua $l = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{l}{r} = \frac{10}{8} \Rightarrow \theta = 1\frac{1}{4}$ raidian.

(ii) Fad an stua $= r\theta$

$= 8 \times \frac{\pi}{4}$

$= 2\pi$ cm

Triailcheisteanna 2.1

1. Scríobh gach ceann de na huillinneacha seo a leanas ina raidiain, agus tabhair do chuid freagraí i dtéarmaí π:
(i) 30° (ii) 45° (iii) 150° (iv) 135° (v) 36° (vi) 240° (vii) 390°

2. Scríobh gach ceann de na huillinneacha seo a leanas ina gcéimeanna:

(i) π (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{5\pi}{6}$ (v) $\frac{4\pi}{9}$ (vi) $\frac{11\pi}{6}$ (vii) $\frac{5\pi}{12}$

3. I gcás ciorcail ar ga dó 4cm, faigh faid na stuanna atá ag iompar na n-uillinneacha seo ag lárphointe an chiorcail:

(i) 2 raidian (ii) 4 raidian (iii) $2\frac{1}{2}$ raidian (iv) $\frac{5}{4}$ raidian

4. I gcás ciorcail ar ga dó 6 cm, faigh, ina raidiain, méideanna na n-uillinneacha ag lárphointe an chiorcail atá á n-iompar ag na stuanna ar na faid seo:

(i) 6 cm (ii) 12 cm (iii) 3 cm (iv) 9 cm (v) $7\frac{1}{2}$ cm

5. Uillinn 2 raidian atá ag lárphointe ciorcail agus í á hiompar ag stua 15 cm ar fad.
Faigh fad an gha.

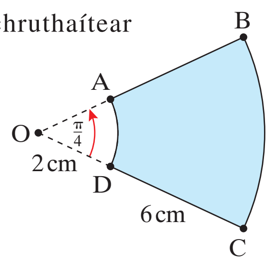
6. Is é 5 cm ga ciorcail.
Faigh achar teascóige sa chiorcal más 6 cm ar fad atá an stua.

7. I gcás ciorcail ar ga dó 8 cm, 40 cm^2 atá in achar teascóige sa chiorcal.
Faigh, ina raidiain, méid na huillinne sa teascóg sin.

8. 12π cm ar fad atá imlíne ciorcail áirithe.
Faigh méid na huillinne i dteascóg den chiorcal, más ionann achar na teascóige agus 3π cm^2.

9. 27 cm^2 an t-achar atá i dteascóg ciorcail áirithe.
6 cm ar fad atá ga an chiorcail.
Faigh, ina raidiain, méid na huillinne sa teascóg.

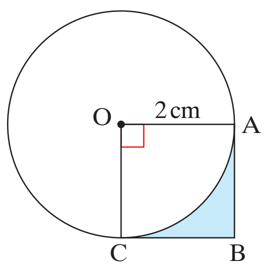
10. Faigh achar na coda scáthaithe ABCD a chruthaítear nuair a dhéantar uillinn rothlaithe $\frac{\pi}{4}$ raidian timpeall an láir O.
Tabhair do fhreagra i dtéarmaí π.



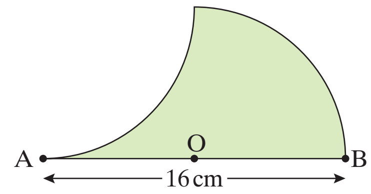
11. 10 cm ar fad atá stua ciorcail. 4 cm ar fad atá ga an chiorcail.
θ an mhéid atá san uillinn ag lárphointe an chiorcail atá á hiompar ag an stua.

(i) Faigh θ ina raidiain.
(ii) Faigh θ ina céimeanna, ceart go dtí an chéim is gaire.

12. San fhíor ar dheis, is cearnóg OABC agus 2 cm ar fad atá ga an chiorcail.
Faigh achar an réigiúin scáthaithe i dtéarmaí π.

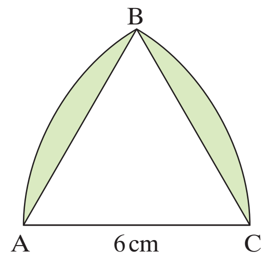


13. Taispeántar sa léaráid mírlíne [AB] agus stuanna dhá cheathrú ciorcail, a bhfuil a ngathanna ar comhfhad. Tá lárphointe ceann de na ciorcail ag O, lárphointe [AB]. Faigh achar na fíorach scáthaithe i dtéarmaí π.



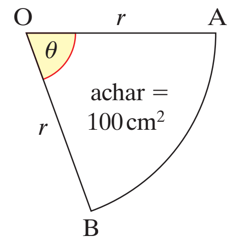
14. Taispeántar sa léaráid dhá stua, AB agus BC.
Is é C lárphointe an stua AB agus is é A lárphointe an stua BC. $|AC| = 6$ cm.

(i) Taispeáin go bhfuil $|\angle ABC| = 60°$.
(ii) Faigh fad an stua AB.
(iii) Faigh achar an réigiúin scáthaithe.



15. Píosa sreinge 40 cm ar fad, lúbtar é chun cruth na teascóige AOB a dhéanamh, ar ga di r.
Más é 100 cm^2 achar na teascóige, faigh

(i) slonn don uillinn teascóige θ i dtéarmaí r
(ii) luach r
(iii) luach θ.



MÍR 2.2: Cóimheasa triantánachta

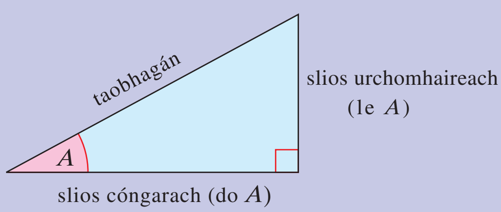
Tá taithí agat ó do chuid staidéir ar an triantánacht go dtí seo ar a bheith ag úsáid Theoirim Phíotagaráis agus cóimheasa triantánachta chun sleasa nó uillinneacha de thriantán dronuilleach a fháil, i.e. na sleasa nó uillinneacha nach dtugtar duit.

Tugtar thíos na trí chóimheas bunaidh sa triantánacht:

$$\sin A = \frac{\text{an slios urchomhaireach}}{\text{an taobhagán}}$$

$$\cos A = \frac{\text{an slios cóngarach}}{\text{an taobhagán}}$$

$$\tan A = \frac{\text{an slios urchomhaireach}}{\text{an slios cóngarach}}$$



Tá trí chóimheas triantánachta eile is féidir a shainmhíniú ar an gcaoi seo: deilín an tsínis, deilín an chomhshínis, agus deilín an tangaint

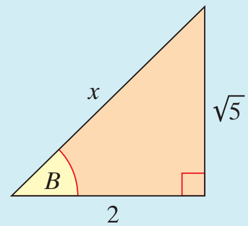
Seiceant (sec θ) $= \dfrac{1}{\cos\theta}$; **Comhsheiceant** (cosec θ) $= \dfrac{1}{\sin\theta}$; **Comhthangant** (cot θ) $= \dfrac{1}{\tan\theta}$.

Sampla 1

Má tá $\tan B = \frac{\sqrt{5}}{2}$, faigh luach $\sin B$ agus luach $\cos B$.

$\tan B = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ slios urchomhaireach le $B = \sqrt{5}$ agus slios cóngarach $= 2$.

Anois tarraing sceitse garbh de thriantán dronuilleach.
Tugaimis x ar fhad an taobhagáin.



$x^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 \ldots (\sqrt{5})^2 = 5$

$x^2 = 4 + 5$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

Ón triantán: $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ agus $\cos B = \frac{2}{3}$.

Áireamhán a úsáid

Úsáidimid na heochracha $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ agus $\boxed{\tan}$ ar áireamhán leictreonach chun síneas, comhshíneas agus tangant aon uillinne a fháil.

Chun sin 35° a fháil, cuir isteach $\boxed{\sin}$ 35 $\boxed{=}$.

Is é an toradh ná 0.573576… = 0.5736, ceart go dtí 4 ionad dheachúlacha.

Codanna de chéim

Is féidir céim a roinnt ina 60 cuid.

$1° = 60'$

Nóiméad a thugtar ar gach cuid. $1'$ an nod air sin.

Mar sin $34.5° = 34°30'$.

Chun tan 34.5° nó 34°30′ a fháil ar d'áireamhán, is féidir ceachtar den dá mhodh seo a úsáid:

1. Le haghaidh tan 34.5°

cuir isteach $\boxed{\tan}$ 34.5 $\boxed{=}$

Toradh = 0.6873

2. Le haghaidh tan 34°30′

cuir isteach $\boxed{\tan}$ 34 $\boxed{{}^{\circ},,,}$ 30 $\boxed{{}^{\circ},,,}$ $\boxed{=}$

Toradh = 0.6873

Na heochracha $\boxed{\sin^{-1}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ agus $\boxed{\tan^{-1}}$ a úsáid

Má insítear dúinn go bhfuil $\sin A = 0.8661$, gheobhaimid an uillinn A ach an eochair $\boxed{\sin^{-1}}$ a úsáid.

Gheobhaimid an eochair $\boxed{\sin^{-1}}$ ach $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$.

Mar sin má tá $\sin A = 0.8661$, gheobhaimid A ach $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ 0.8661 $\boxed{=}$.

Is é an toradh ná 60.008° = 60°.

Ar an gcaoi chéanna, má tá $\tan B = 1.2734$, gheobhaimid an uillinn B ach $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$ 1.2734 $\boxed{=}$.

Is é an toradh ná 51.86°… ceart go dtí dhá ionad dheachúlacha.

Sampla 2

(i) Faigh cos 72°18′, ceart go dtí 4 ionad dheachúlacha.

(ii) Má tá $\sin A = 0.5216$, faigh A ceart go dtí an chéim is gaire.

Tabhair faoi deara go n-úsáidtear an eochair $\boxed{°,,,}$ faoi dhó.

(i) Chun cos 72°18′ a fháil, cuir isteach $\boxed{\cos}$ 72 $\boxed{°,,,}$ 18 $\boxed{°,,,}$ $\boxed{=}$

Is é an freagra ná 0.3040.

Nó $18' = \frac{18}{60}^{\circ} = 0.3° \Rightarrow 72°18' = 72.3°$

Mar sin, chun 72.3° a fháil, cuir isteach $\boxed{\cos}$ 72.3 $\boxed{=}$

(ii) Má tá $\sin A = 0.5216$, gheobhaimid A ach é seo a chur isteach:

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ 0.5216 $\boxed{=}$

Is é an freagra ná 31.44°. $\Rightarrow \quad A = 31°$, ceart go dtí an chéim is gaire.

Nóta: Má thugtar $\sin A = \frac{4}{7}$ duit, is féidir leat an uillinn A a fháil ar an áireamhán ar an gcaoi seo:

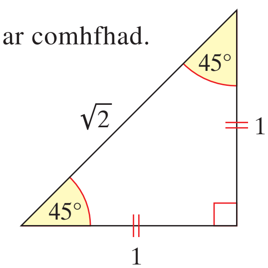
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{(}$ 4 $\boxed{\div}$ 7 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Is é an freagra ná 34.8°.

Na huillinneacha 30°, 45° agus 60°

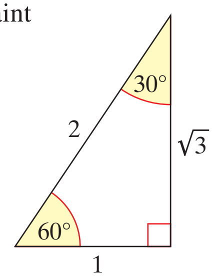
Baintear úsáid as na huillinneacha 30°, 45° agus 60° go han-mhinic agus úsáidfimid triantáin chun cóimheasa sínis, comhshínis agus tangaint na n-uillinneacha sin a chur in iúl mar chodáin nó mar shurdaí.

Is triantán comhchosach é an triantán ar dheis. 1 aonad ar fad atá na sleasa atá ar comhfhad. $\sqrt{2}$ aonad ar fad atá an taobhagán. Is féidir na cóimheas an tsínis, cóimheas an chomhshínis agus cóimheas an tangaint a fháil ón triantán.



$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \tan 45° = 1$

Tá uillinneacha 60° agus 30° sa triantán dronuilleach ar dheis. Is féidir linn úsáid a bhaint as an triantán seo chun cóimheasa triantánachta an dá uillinn sin a scríobh síos.



$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\qquad \tan 60° = \sqrt{3}$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Nóta: Cóimheas an tsínis, cóimheas an chomhshínis agus cóimheas an tangaint le haghaidh 30°, 45° agus 60°, tugtar iad ar leathanach 13 de *Foirmlí agus Táblaí*.

Triailcheisteanna 2.2

1. Bain úsáid as d'áireamhán chun luach gach ceann de na cóimheasa seo a leanas a fháil, ceart go dtí ceithre ionad dheachúlacha:

(i) sin 48° (ii) cos 74° (iii) tan 28.4° (iv) cos 43°24′ (v) tan 30°36′

2. Bain úsáid as d'áireamhán chun tomhas gach ceann de na huillinneacha seo a fháil, ceart go dtí an chéim is gaire:

(i) $\sin A = 0.7453$ (ii) $\cos B = 0.3521$ (iii) $\tan C = 1.4538$

(iv) $\cos A = 0.2154$ (v) $\tan B = 0.8923$ (vi) $\sin C = 0.2132$

3. Faigh tomhas na huillinne θ, ceart go dtí an uillinn is gaire, i ngach ceann díobh seo a leanas:

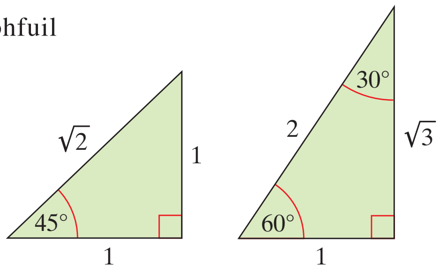
(i) $\sin\theta = \frac{2}{3}$ (ii) $\cos\theta = \frac{3}{5}$ (iii) $\tan\theta = \frac{7}{8}$ (iv) $\sin\theta = \frac{2}{5}$

4. Bain úsáid as na triantáin ar dheis le taispeáint go bhfuil

(i) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$

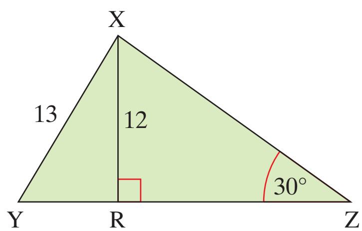
(ii) $\sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30° = 1$

(iii) $\cos^2 60° + \cos 60° \sin 30° = \frac{1}{2}$



5. Taispeáin go bhfuil $\sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$.

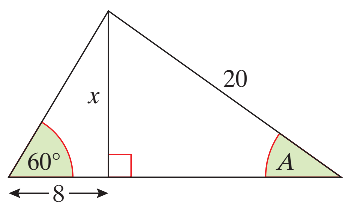
6. Faigh imlíne an triantáin XYZ san fhoirm $a + b\sqrt{c}$, áit a bhfuil a, b agus c ina slánuimhreacha.



7. Sa triantán ar dheis, faigh

(i) x, ceart go dtí ionad deachúlach amháin

(ii) an uillinn A, ceart go dtí an chéim is gaire.

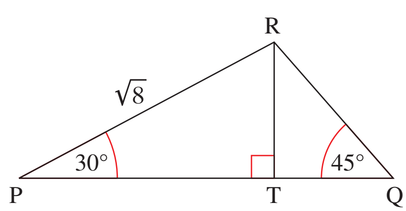


8. Sa triantán ar dheis, $RT \perp PQ$, $|PR| = \sqrt{8}$, $|\angle RPT| = 30°$ agus $|\angle RQT| = 45°$.

Scríobh iad seo ina surdaí, sna téarmaí is simplí:

(i) $|RT|$ (ii) $|PT|$.

Uaidh sin faigh achar $\triangle RPQ$, Tabhair do fhreagra san fhoirm $a + \sqrt{b}$, áit a bhfuil $a, b \in \mathbb{N}$.



MÍR 2.3: Feidhmeanna triantánachta

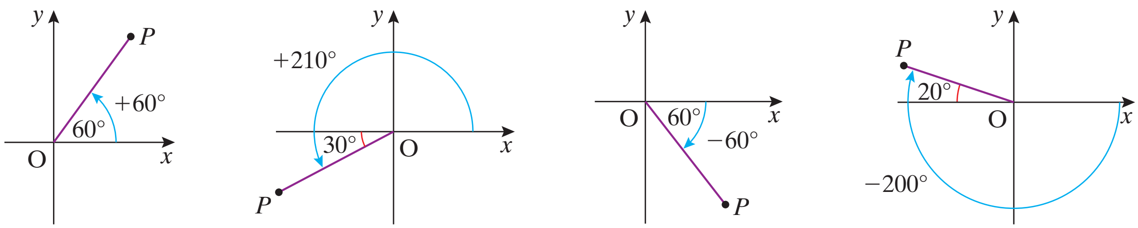
Sa mhír seo beimid ag plé le huillinneacha ó 0° go 360° agus taispeánfar an chaoi le síneas, comhshíneas nó tangant na n-uillinneacha sin a fháil.

Tomhaistear uillinneacha ón x-ais dheimhneach.

Tomhaistear uillinneacha deimhneacha i dtreo tuathal.

Tomhaistear uillinneacha diúltacha i dtreo deiseal.

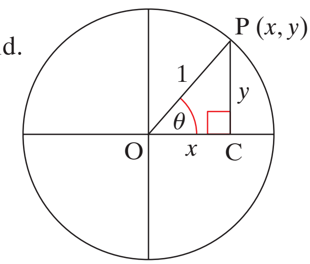
Léiríonn na léaráidí thíos dhá uillinn dheimhneacha agus dhá uillinn dhiúltacha.



1. Ciorcal an Aonaid

Ag (0, 0) atá lárphointe an chiorcail ar dheis, agus 1 aonad ar fad atá ga an chiorcail. Ciorcal an aonaid a thugtar air sin de ghnáth.

Bíodh P(x, y) ina phointe ar bith ar an gciorcal, mar atá sa léaráid.



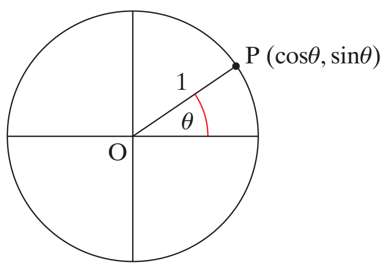
Ón triantán OPC,

$$\frac{x}{1} = \cos\theta \qquad\qquad x = \frac{y}{1} = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad x = \cos\theta \qquad\qquad \Rightarrow \quad y = \sin\theta$$

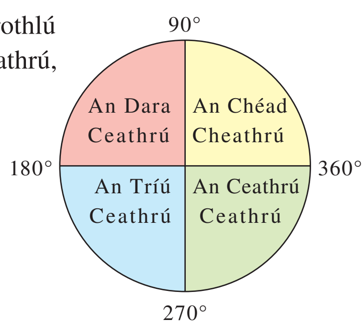
$\therefore$ is iad comhordanáidí P ná **(cos θ, sin θ)**

Is ionann **(cos θ, sin θ)** agus comhordanáidí pointe ar bith ar imlíne chiorcal an aonaid.



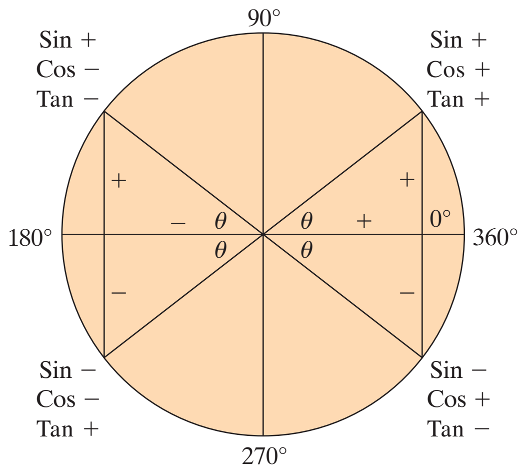
2. Na Ceithre Cheathrú

Déanann an x-ais agus an y-ais imrothlú iomlán 360° a roinnt ina cheithre cheathrú, mar atá le feiceáil ar dheis.

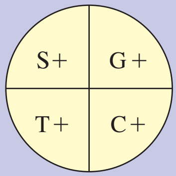


Tá an uillinn θ i ngach ceann de cheithre cheathrú an chiorcail aonaid ar dheis. Cuireann na comharthaí ar gach triantán in iúl cé acu deimhneach nó diúltach a bhíonn na cóimheasa sa cheathrú sin.

Taispeántar sa bhosca thíos na cóimheasa deimhneacha sna ceithre cheathrú.



(i) Sa chéad cheathrú, gach (G) cóimheas deimhneach
(ii) Sa dara ceathrú, níl ach sin(S) deimhneach
(iii) Sa tríú ceathrú, níl ach tan(T) deimhneach
(iv) Sa cheathrú ceathrú, níl ach cos(C) deimhneach



Sampla 1

Faigh i bhfoirm surdaí (i) sin 120° (ii) cos 225°

(i) sin 120°:

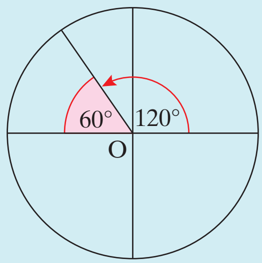
Tá 120° sa dara ceathrú

$\Rightarrow$ tá cóimheas an tsínis deimhneach

An uillinn tagartha ná $180° - 120° = 60°$.

Ag úsáid leathanach 13 de *Foirmlí agus Táblaí*,

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$



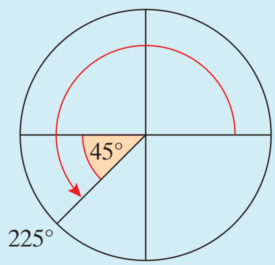
(ii) cos 225°:

Tá 225° sa tríú ceathrú

$\Rightarrow$ tá cóimheas an chomhshínis diúltach

An uillinn tagartha ná $225° - 180° = 45°$.

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Sampla 2

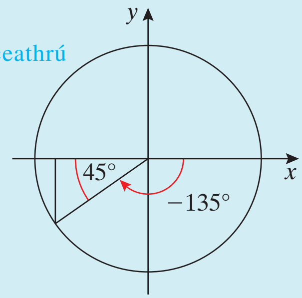
(i) Scríobh $\cos(-135°)$ i bhfoirm surda.

(ii) Má tá $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, faigh dhá luach ar x má tá $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

(i) $\cos(-135°) = \cos 45°$ sa tríú ceathrú

$= -\cos 45°$ … comhshíneas diúltach sa 3ú ceathrú

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

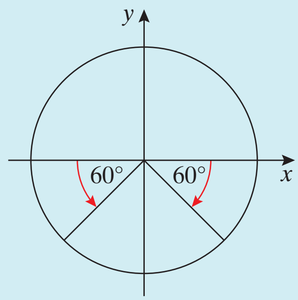


(ii) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad x = 60°$ sa 3ú ceathrú nó sa 4ú ceathrú

$\Rightarrow \quad x = (180° + 60°)$ nó $x = (360° - 60°)$

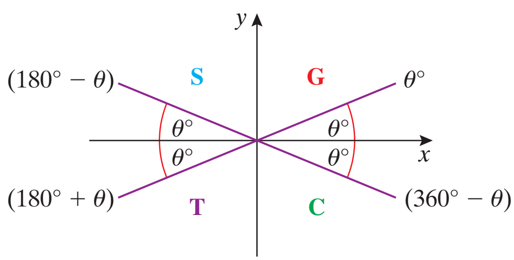
$\Rightarrow \quad x = 240°$ nó $x = 300°$



Taispeántar sa léaráid ar dheis géaruillinn, θ i ngach ceann de na ceithre cheathrú. Taispeánann G, C, T agus S na cóimheasa deimhneacha sna ceathrúna sin.

Taispeántar sa léaráid go bhfuil $\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$ mar go bhfuil an síneas diúltach sa 3ú ceathrú.

Tugtar thíos na torthaí le haghaidh sínis, comhshínis agus tangaint:

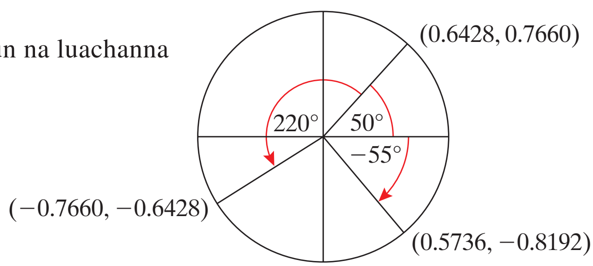


$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$	$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$	$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$
$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$	$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$
$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$	$\cos(360° - \theta) = \cos\theta$	$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$

Triailcheisteanna 2 . 3

1. Bain úsáid as an gciorcal aonaid ar dheis chun na luachanna seo a scríobh síos:

(i) $\sin 50°$ (ii) $\cos 220°$
(iii) $\cos 50°$ (iv) $\sin 220°$
(v) $\sin(-55°)$ (vi) $\cos(305°)$



2. Scríobh síos, le cabhair áireamháin, luach gach ceann de na cóimheasa seo, ceart go dtí ceithre ionad dheachúlacha:
(i) sin 138° (ii) cos 212° (iii) tan 318° (iv) cos 159°

3. Má tá cos 120° = −cos 60°, déan cóip díobh seo a leanas agus comhlánaigh (críochnaigh) ar an gcaoi chéanna iad:
(i) sin 130° = … (ii) cos 115° = … (iii) tan 160° = …
(iv) cos 220° = … (v) sin 250° = … (vi) tan 300° = …

4. Scríobh gach ceann díobh seo a leanas ina chodán nó ina shurda, le cabhair an eolais sa leabhar *Foirmlí agus Táblaí* agat:
(i) sin 120° (ii) cos 135° (iii) sin 240° (iv) sin 210°
(v) cos 330° (vi) tan 225° (vii) cos 150° (viii) sin 300°

5. Cén cheathrú ina bhfuil
(i) cos < 0 agus tan > 0 (ii) cos > 0 agus sin > 0
(iii) tan < 0 agus sin > 0 (iv) tan > 0 agus cos > 0?

6. I gcás gach ceann de na huillinneacha seo a leanas, cén uillinn idir 0° agus 360° a bhfuil an síneas céanna aici leis an uillinn sin?
(i) 56° (ii) 112° (iii) 300° (iv) 195° (v) 105°

7. Faigh, ceart go dtí an chéim is gaire, an dá luach ar A má tá sin $A = 0.2167$ agus $0° \leqslant A \leqslant 360°$.

8. Faigh, ceart go dtí an chéim is gaire, an dá luach ar gach ceann de na huillinneacha seo sa sa raon 0° go 360°.
(i) $\cos A = -0.8428$ (ii) $\sin B = -0.6947$ (iii) $\tan C = 0.9325$

9. Má tá $\sin\theta = \frac{1}{2}$, faigh dhá luach ar θ, má tá $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

10. Má tá $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, faigh dhá luach ar tan θ, má tá $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

11. Má tá $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, faigh dhá luach ar cos A, má tá $0° \leqslant A \leqslant 360°$.

12. Má tá $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, faigh dhá luach ar θ, gan áireamhán, má tá $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

13. Faigh A, ceart go dtí an chéim is gaire, má tá $\sin A = -\frac{4}{5}$ agus $\cos A = -\frac{3}{5}$ i gcás $A \leqslant 360°$.

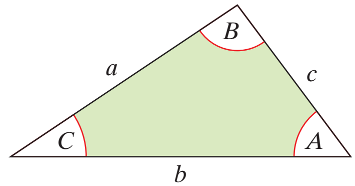
14. Má tá $\sin B = \frac{3}{5}$ agus $\cos B = -\frac{4}{5}$, faigh luach tan B, gan áireamhán, má tá $0° \leqslant B \leqslant 360°$.

15. Má tá $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ agus $\sin B = -\frac{1}{2}$, , scríobh cos B ina shurda.

16. Má tá $\tan A = \frac{1}{2}$ agus $180° < A < 270°$, faigh sin A i bhfoirm surda.

17. Scríobh gach ceann díobh seo ina shurda nó ina chodán:
(i) sin 420° (ii) cos 495° (iii) tan (−120°)

MÍR 2.4: Riail an tSínis – Achar triantáin



Pléifimid sa roinn seo sleasa agus uillinneacha triantáin, agus is iad na gnáthnoda A, B agus C a bheidh againn ar na huillinneacha, agus a, b agus c ar na sleasa urchomhaireach leis na huillinneacha sin.

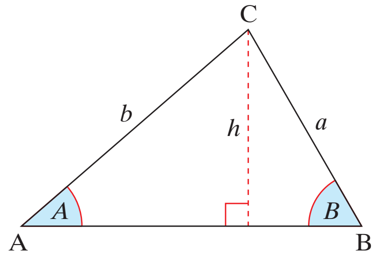
Tá taithí agat ó do chuid staidéir ar an triantánacht go dtí seo ar a bheith ag úsáid Theoirim Phíotagaráis chun sleasa agus uillinneacha de thriantán dronuilleach fháil.

D'fhonn déileáil le triantán ar bith, foghlaimeoimid faoin gcéad cheann de dhá ghaol atá an-tábhachtach idir uillinneacha agus sleasa an triantáin.
Riail an tsínis a thugtar air sin.

1. Riail an tSínis: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Cruthú

Tóg ingear h ó C go [AB].



(i) $\dfrac{h}{b} = \sin A \quad \Rightarrow \quad h = b \sin A$

(ii) $\dfrac{h}{a} = \sin B \quad \Rightarrow \quad h = a \sin B$

$\Rightarrow \quad a \sin B = b \sin A$

Roinn an dá thaobh ar $\sin A \ \sin B$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a \sin B}{\sin A \ \sin B} = \dfrac{b \sin A}{\sin A \ \sin B}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

Ar an gcaoi chéanna is féidir a thaispeáint go bhfuil $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{or} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Nóta: Má theastaíonn uainn úsáid a bhaint as an riail chéanna chun uillinn nach bhfuil ar eolas againn a fháil, is foirm níos oiriúnaí den riail í $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$.

Úsáid a bhaint as riail an tsínis

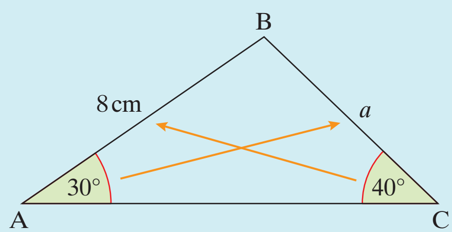
Chun úsáid a bhaint as riail an tsínis le triantán a réiteach, ní mór go mbeadh slios amháin agus an uillinn urchomhaireach leis ar eolas againn, chomh maith le huillinn nó slios amháin eile.

Sampla 1

I gcás an triantáin ABC, $|AB| = 8$ cm, $|\angle BAC| = 30°$ agus $|\angle BCA| = 40°$.
Faigh $|BC|$.

Tá sceitse den triantán le feiceáil ar dheis..

Tarraing léaráid den triantán i gcónaí agus cuir léi an t-eolas a thugtar duit.



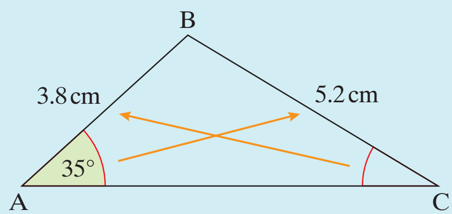
Ón triantán, $|AB| = 8, A = 30°$ agus $C = 40°$.

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{8}{\sin 40°}$$
$$\Rightarrow \quad a \sin 40° = 8 \sin 30°$$
$$\Rightarrow \quad a = \frac{8 \sin 30°}{\sin 40°}$$
$$\Rightarrow \quad a = 6.22\,\text{cm}$$
$$\Rightarrow \quad |BC| = 6.22\,\text{cm}$$

Sampla 2

I gcás $\triangle ABC$, $|AB| = 3.8$ cm, $|BC| = 5.2$ cm agus $|\angle BAC| = 35°$. Faigh $|\angle ACB|$.

I gcás an triantáin ABC
$A = 35°, a = 5.2$ cm agus $c = 3.8$ cm

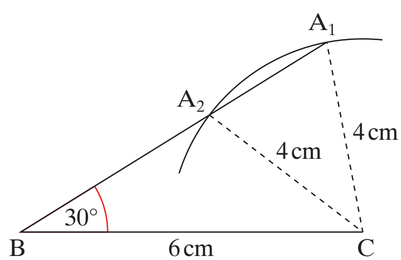


$$\frac{\sin C}{3.8} = \frac{\sin 35°}{5.2}$$
$$\Rightarrow \quad \sin C = \frac{3.8 \sin 35°}{5.2}$$
$$= 0.4192$$
$$\Rightarrow \quad C = \sin^{-1}(0.4192)$$
$$\Rightarrow \quad C = 24.8°$$
$$\Rightarrow \quad |\angle ACB| = 24.8°$$

Rabhadh!

I $\triangle ABC$, $|AC| = 4$ cm, $|BC| = 6$ cm agus $|\angle ABC| = 30°$.

Má tharraingímid an triantán seo le rialóir agus compás, gheobhaimid an léaráid thíos.



Tharlódh don rinn A a bheith i gceachtar de dhá áit, A_1 agus A_2.
Is mar sin a bhíonn mura mbíonn eolas againn ach faoi dhá shlios, agus faoi uillinn seachas an uillinn eatarthu sin.

Is **cás débhríoch** é nuair is féidir dhá thriantán a tharraingt de réir an eolais a thugtar.

I gcás an triantáin thuas, $|\angle BA_1C| = 48.6°$ agus $|\angle BA_2C| = 180° - 48.6°$
$= 131.4°$

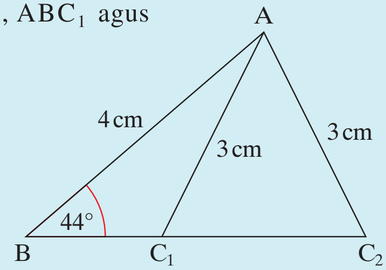
Sampla 3

I gcás an triantáin ABC, $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 3$ cm agus $|\angle ABC| = 44°$.

(i) Tarraing sceitse den dá thriantán a d'fhéadfadh a bheith ann de réir an eolais sin.

(ii) Faigh an dá luach a d'fhéadfadh a bheith ar $\angle ACB$.

(i) Tá an dá thriantán a d'fhéadfadh a bheith ann, ABC_1 agus ABC_2, le feiceáil ar dheis.



(ii) $\dfrac{\sin C}{4} = \dfrac{\sin 44°}{3}$

$\Rightarrow \quad \sin C = \dfrac{4 \times \sin 44°}{3} = 0.9262$

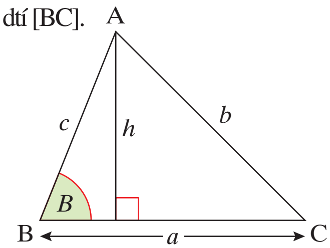
$\Rightarrow \quad C = \sin^{-1}(0.9262)$

$\Rightarrow \quad C = 67.9° \quad$ nó $\quad 180° - 67.9°$

$\Rightarrow \quad |\angle ACB| = 67.9° \quad$ nó $\quad 112.1°$

2. Achar triantáin

I gcás an triantáin ar dheis, is é h an airde ingearach, i.e. an fad ingearach ó A go dtí [BC].



Achar $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ an bhoinn $\times$ an airde ingearach

$= \frac{1}{2}a \times h$

$= \frac{1}{2}ah$

Ach $\dfrac{h}{c} = \sin B \quad \Rightarrow \quad h = c \sin B$

$\Rightarrow$ achar $\triangle ABC = \frac{1}{2}ac \sin B$

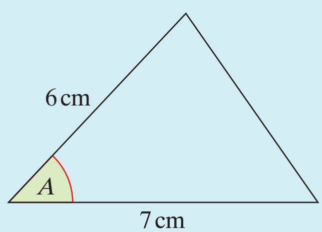
Agus muid ag úsáid airdí ingearacha difriúla,

achar $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C \quad$ nó $\quad \frac{1}{2}ac \sin B \quad$ nó $\quad \frac{1}{2}bc \sin A$

> Achar $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C \quad$ nó $\quad \frac{1}{2}ac \sin B \quad$ nó $\quad \frac{1}{2}bc \sin A$
>
> I bhfocail, an t-achar = leath an toraidh ar dhá shlios ar bith a iolrú faoi shíneas na huillinne eatarthu.

Sampla 4

Más é 12 cm^2, achar an triantáin ar dheis, faigh tomhas na huillinne A, ceart go dtí an chéim is gaire.



Achar an $\triangle = \frac{1}{2}(6)(7) \sin A$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(6)(7) \sin A = 12$

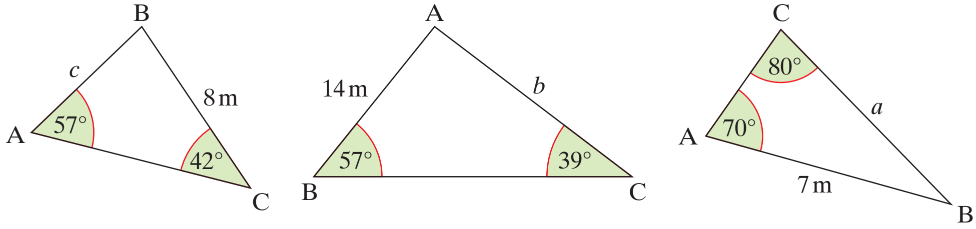
$\Rightarrow \quad \sin A = \frac{12}{21} = 0.5714$

$\Rightarrow \quad A = \sin^{-1}(0.5714)$

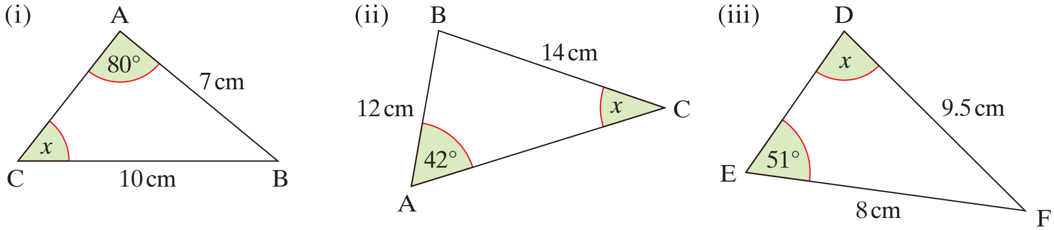
$\Rightarrow \quad A = 34.8° = 35°$, ceart go dtí an chéim is gaire.

Triailcheisteanna 2.4

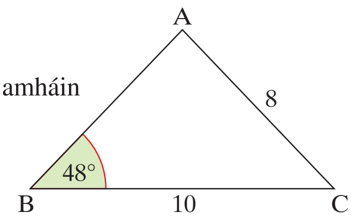
1. Faigh fad an tsleasa atá marcáilte le litir i ngach ceann de na triantáin seo.
Bíodh gach freagra ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



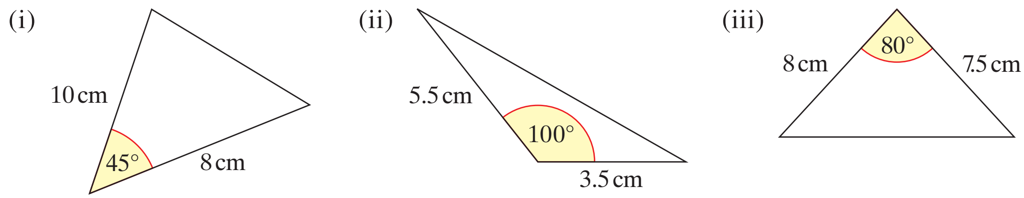
2. I gcás gach ceann de na triantáin seo a leanas, faigh luach na huillinne x ceart go dtí an uillinn is gaire:



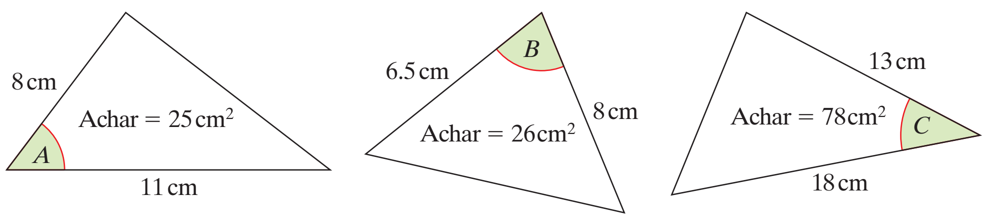
3. I gcás an triantáin ABC, $|AC| = 8$, $|BC| = 10$
agus $|\angle ABC| = 48°$.
Faigh (i) $|\angle BAC|$ (ii) $|AB|$, ceart go dtí ionad deachúlach amháin
(iii) achar $\triangle ABC$, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.



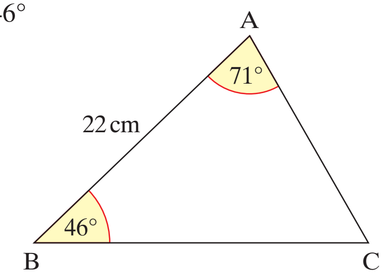
4. Faigh achar gach ceann de na triantáin seo ina cm^2, ceart go dtí ionad deachúlach amháin:



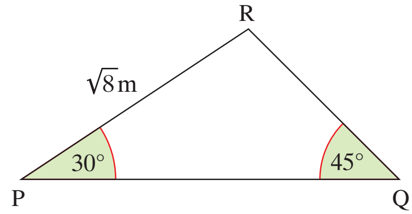
5. Faigh méid na géaruillinne atá marcáilte le litir i ngach ceann de na triantáin seo.
Bíodh gach freagra ceart go dtí an chéim is gaire.



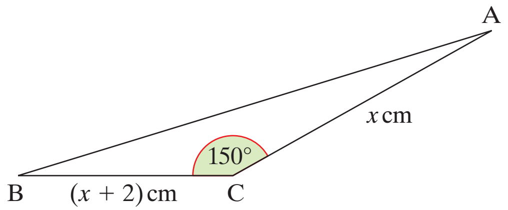
6. I gcás an triantáin ar dheis, $|AB| = 22$ cm, $|\angle ABC| = 46°$ agus $|\angle BAC| = 71°$.
Faigh, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire,
(i) $|BC|$
(ii) achar $\triangle ABC$.



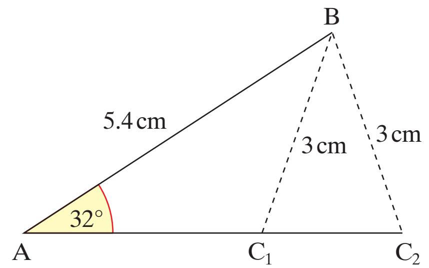
7. Sa triantán ar dheis, $|PR| = \sqrt{8}$ m, $|\angle RPQ| = 30°$ agus $|\angle RQP| = 45°$.
(i) Faigh $|RQ|$.
(ii) Uaidh sin taispeáin gurb é 2.7 m^2 achar $\triangle PQR$, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



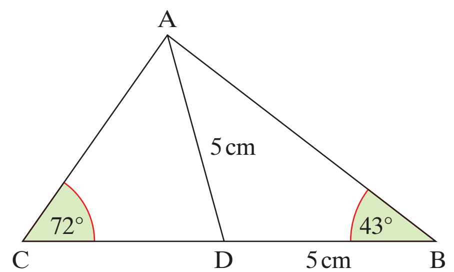
8. I gcás an triantáin ABC ar dheis, $BC = (x + 2)$ cm, $AC = x$ cm agus $|\angle BCA| = 150°$.
Más 6 cm^2 atá in achar an triantáin, faigh luach x.



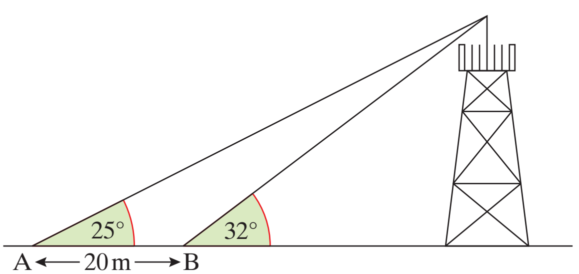
9. Taispeántar sa léaráid dhá thriantán fhéideartha le $|AB| = 5.4$ cm, $|\angle BAC| = 32°$ agus $|BC| = 3$ cm.
Faigh an dá luach a d'fhéadfadh a bheith ar an uillinn C ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



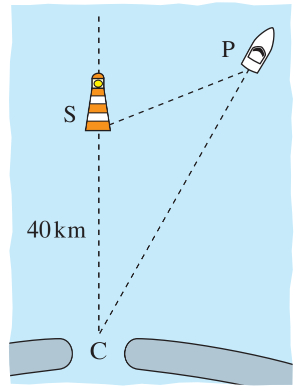
10. Sa léaráid ar dheis, $|AD| = |DB| = 5$ cm, $|\angle ABC| = 43°$ agus $|\angle ACB| = 72°$.
Faigh (i) $|AB|$ (ii) $|CD|$.
Bíodh gach freagra ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



11. Ó phointe A ar an leibhéal céanna le bonn crann tarchurtha raidió, is é 25° uillinn airde bharr an chrainn tarchurtha.
Ó phointe B, 20 méadar níos gaire don chrann tarchurtha, agus ar an leibhéal céanna, is é 32° an uillinn airde.
Faigh airde an chrainn tarchurtha raidió ina méadair, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.

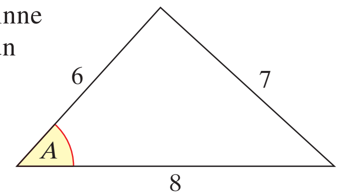


12. Tá teach solais, S, 40 km ó thuaidh díreach de chuan, C. Fágann luasbhád an cuan C agus taistealaíonn sí sa treo O 53° T ón gcuan go dtí go sroicheann sí pointe P. Tá an pointe P O 75° T de S. Ríomh an fad a thaistil an luasbhád, ceart go dtí an km is gaire.



MÍR 2.5: Riail an chomhshínis

Sa triantán ar dheis, tugtar dúinn fad trí shlios ach ní thugtar tomhas uillinne ar bith dúinn. Ní féidir linn úsáid a bhaint as riail an tsínis sa chás seo chun an uillinn A a fháil.



Úsáidfimid riail eile a bhaineann le triantáin a réiteach.

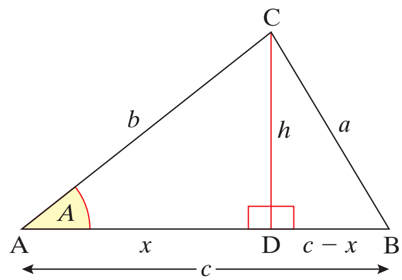
Riail an chomhshínis a thugtar uirthi.

Is í seo riail an chomhshínis i gcás triantáin ar bith:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.}$$

Riail an Chomhshínis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

***Cruthú**



Sa $\triangle ABC$, tá CD ingearach le AB.

Bíodh $|CD| = h$ agus $|AD| = x$

Mar sin $|DB| = c - x$

Anois cuirimid Teoirim Phíotagaráis i bhfeidhm ar na triantáin ACD agus CDB.

Sa $\triangle ACD$: $h^2 + x^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = b^2 - x^2$

Sa $\triangle BCD$: $h^2 + (c - x)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = a^2 - (c - x)^2$

Ag cothromú an dá luach ar h^2, faighimid

$$a^2 - (c - x)^2 = b^2 - x^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = b^2 - x^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \qquad \text{Ach } \frac{x}{b} = \cos A$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2c\,(b \cos A) \qquad \Rightarrow \quad x = b \cos A$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Ar an gcaoi chéanna is féidir a chruthú go bhfuil

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ and $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Is gnách riail an chomhshínis a úsáid sna cásanna seo:

(i) chun an tríú slios ar thriantán a fháil nuair a bhíonn an dá shlios eile agus an uillinn eatarthu ar eolas againn

(ii) chun triantán a réiteach nuair a bhíonn faid na dtrí shlios ar eolas againn.

Riail an chomhshínis

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

nó $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

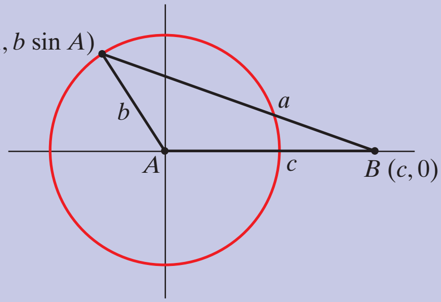
nó $$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

nó $$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Cruthú eile ar Riail an Chomhshínis

An modh eile seo chun Riail an Chomhshínis a chruthú, baineann sé le ciorcal an aonaid agus leis an bhfoirmle don fhad idir dhá phointe.

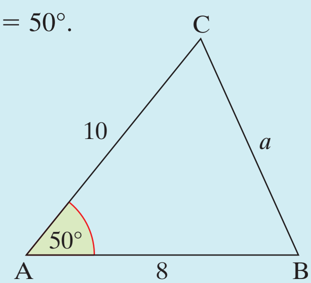


Tarraing ciorcal ar lárphointe dó an bunphointe.
Tugaimis A ar an bpointe sin.
Críochnaigh an triantán ABC, áit a bhfuil B ar an x-ais agus C ar an gciorcal.
Is iad comhordanáidí B ná $(c, 0)$.
Ó tá $|AC| = b$, is é an fad b ga an chiorcail.
Mar sin is iad comhordanáidí C ná $(b \cos A, b \sin A)$.
$|BC| = a$ agus $|BC| =$ fad ó $(c, 0)$ go $(b \cos A, b \sin A)$.

$$\Rightarrow\ a^2 = (c - b\cos A)^2 + (0 - b\sin A)^2$$
$$\Rightarrow\ a^2 = c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A$$
$$= c^2 - 2bc\cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A)$$
$$\Rightarrow\ a^2 = c^2 - 2bc\cos A + b^2 \quad \ldots \cos^2 A + \sin^2 A = 1$$
$$\Rightarrow\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Sampla 1

I gcás an triantáin ABC, $|AB| = 8$, $|AC| = 10$ agus $|\angle BAC| = 50°$.
Faigh $|CB|$.



Bíodh $|CB| = a$.

Ag úsáid $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

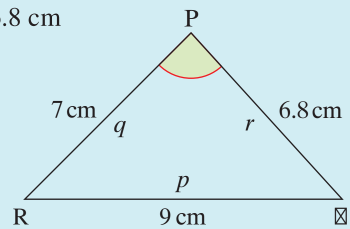
$$a^2 = 10^2 + 8^2 - 2(10)(8)\cos 50°$$
$$= 100 + 64 - 160\,(0.6428)$$
$$a^2 = 61.15$$

$\Rightarrow\ a = \sqrt{61.15} = 7.8$, ceart go dtí ionad deachúlach amháin

$\Rightarrow\ |CB| = 7.8$

Sampla 2

I gcás an triantáin PQR ar dheis, $|PR| = 7$ cm, $|PQ| = 6.8$ cm agus $|RQ| = 9$ cm.
Faigh $|\angle RPQ|$.



Teastaíonn an uillinn P uainn, mar sin tosaímid le cos P.

$$\cos P = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr}$$

$$= \frac{7^2 + (6.8)^2 - 9^2}{2(7)(6.8)}$$

$\Rightarrow \quad \cos P = 0.1495$

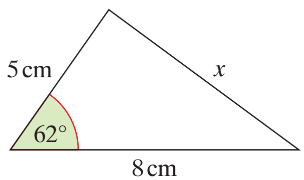
$\Rightarrow \quad P = \cos^{-1}(0.1495)$

$\Rightarrow \quad |\angle RPQ| = 81.4°$

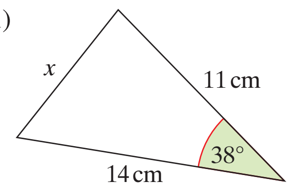
Triailcheisteanna 2.5

1. Ríomh fad an tsleasa x i ngach ceann de na triantáin seo.
Bíodh do chuid freagraí ceart go dtí ionad deachúlach amháin.

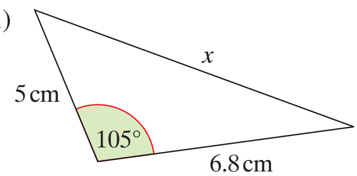
(i)



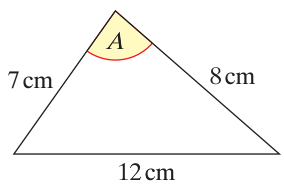
(ii)

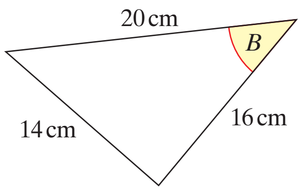


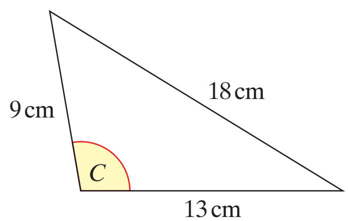
(iii)



2. Faigh, ceart go dtí an chéim is gaire, tomhas na huillinne atá marcáilte le litir i ngach ceann de na triantáin seo:



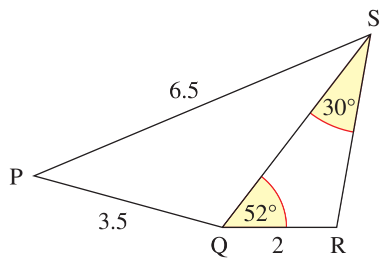




3. Más 3 cm, 5 cm agus 7 cm ar fad atá sleasa triantáin áirithe, taispeáin gur 120° atá san uillinn is mó ann.

4. Faigh, ceart go dtí ionad deachúlach amháin, achar an triantáin a bhfuil na sleasa air 4 aonad, 8 n-aonad agus 10 n-aonad ar fad.

5. San fhíor ar dheis, $|PQ| = 3.5$, $|QR| = 2$, $|PS| = 6.5$, $|\angle QSR| = 30°$ agus $|\angle SQR| = 52°$.
Faigh (i) $|QS|$ ceart go dtí ionad deachúlach amháin
(ii) $|\angle PQS|$.



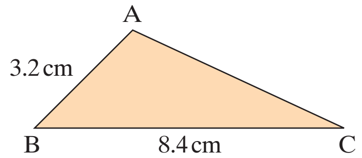
6. Cuireann tógálaí rópa timpeall ar cheapach thriantánach talún, PQR.
Tá fad [PQ] = 42 agus tá fad [PR] = 50 m.
$|\angle QPR| = 72°$.
Ríomh an fad rópa a theastaíonn ón tógálaí.
Bíodh do fhreagra ceart go dtí ionad deachúlach amháin.

7. I gcás an triantáin ABC, $|AC| = 15$ cm, $|AB| = 12$ cm agus is é achar $\triangle ABC$ ná 65 cm^2. Faigh
(i) $|\angle BAC|$, ceart go dtí an chéim is gaire (ii) $|BC|$ ina cm, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.

8. 4 cm, 5 cm agus 6 cm ar fad atá sleasa triantáin áirithe.
θ an mhéid atá san uillinn is mó ann.
(i) Faigh, ina chodán, an luach atá ar cos θ.
(ii) Taispeáin uaidh sin go bhfuil $\sin\theta = ab^{-1}\sqrt{7}$, áit ar slánuimhreacha iad a agus b.
Scríobh síos luach a agus b.

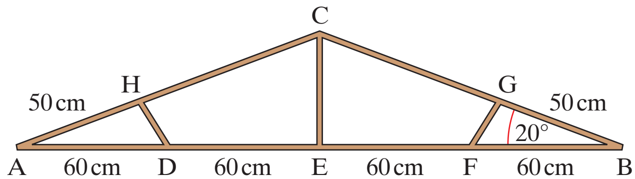
9. I gcás triantáin áirithe, tá an slios is faide 2 cm ar fad agus tá ceann de na sleasa eile $\sqrt{2}$ cm ar fad.
Más ionann achar an triantáin agus 1 cm^2, taispeáin gur dronuilleach agus comhchosach atá an triantán.

10. Is ionann achar an $\triangle ABC$ agus 10 cm^2.
$|AB| = 3.2$ cm agus $|BC| = 8.4$ cm.
Faigh imlíne an triantáin ABC ina cm,
ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



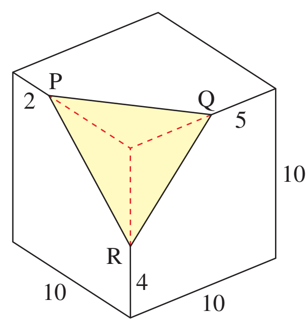
11. An slios is faide ar thriantán, tá sé $(2x - 1)$ cm.
Na sleasa eile, tá siad $(x - 1)$ cm agus $(x + 1)$ cm.
Más 120°, an mhéid atá san uillinn is mó, faigh
(i) luach x (ii) achar an triantáin i bhfoirm surda.

12. Taispeántar sa léaráid thíos cuid de chreat adhmaid díon seide.



I gcás an triantáin ABC, $|AC| = |BC|$ agus $|AD| = |DE| = |EF| = |FB| = 60$ cm.
$|\angle ABC| = 20°$ agus $|AH| = |BG| = 50$ cm.
Faigh (i) fad [FG], ceart go dtí ionad deachúlach amháin.
(ii) an fad iomlán adhmaid a theastaíonn chun an chreat a thaispeántar sa léaráid a dhéanamh.

13. Sa léaráid ar dheis feicfidh tú ciúb a bhfuil an slios air 10 cm ar fad. Tá cúinne amháin den chiúb gearrtha de.
Ríomh méid na huillinne PQR, ceart go dtí an chéim is gaire.



MÍR 2.6: Fadhbanna tríthoiseacha

Sa mhír seo, beidh tú ag plé le fadhbanna triantánachta tríthoiseacha.

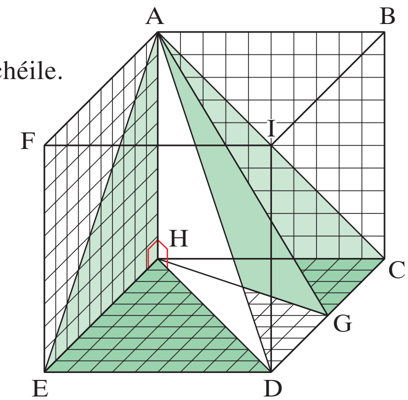
Ceann de na chéad rudaí a bheidh ort a dhéanamh ná oibriú amach cé na huillinneacha nó cé na faid a chaithfidh tú a ríomh. Ar an ábhar sin tá sé ríthábhachtach go sceitseálfaidh tú léaráidí maithe.

Is éard a bhíonn sa chuid is mó d'fhadhbanna tríthoiseacha ná sraith triantán atá ceangailte lena chéile. Tá tábhacht ar leith le triantáin dhronuilleacha a aithint. Má theastaíonn méid uillinne i dtriantán ar leith uainn, nó fad sleasa, beidh sé níos éasca é sin a dhéanamh má tharraingímid an triantán sin leis féin. Ón bpointe sin ar aghaidh is féidir leat a bheith ag obair le fíor dháthoiseach, díreach mar a bhí tú ag déanamh go dtí seo.

Sa chiúb ar dheis tá a lán triantáin dhronuilleacha ceangailte lena chéile.

Is féidir úsáid a bhaint as an triantán HED chun fad an tsleasa [HD] a fháil.

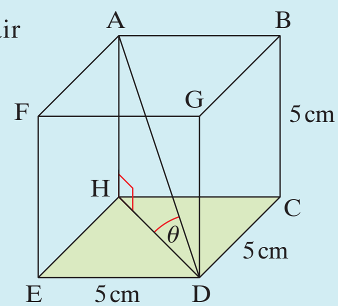
Ansin, agus sinn ag obair leis an triantán AHD, is féidir úsáid a bhaint as an slios [HD] chun $|AD|$ agus $|\angle ADH|$.



Sampla 1

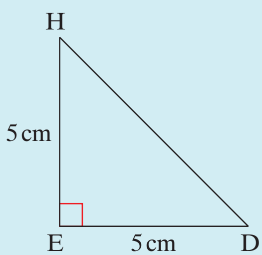
Léaráid atá ar dheis de chiúb a bhfuil an slios air 5 cm ar fad.

Faigh tomhas na huillinne idir an trasnán [AD] agus bonn an chiúib.



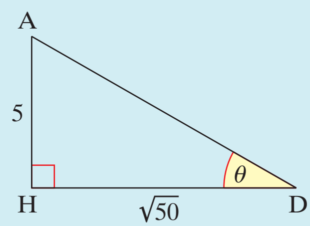
(i) Tarraing $\triangle$HED as an nua

$$|HD|^2 = 5^2 + 5^2$$
$$= 50$$
$$\Rightarrow \quad |HD| = \sqrt{50}$$



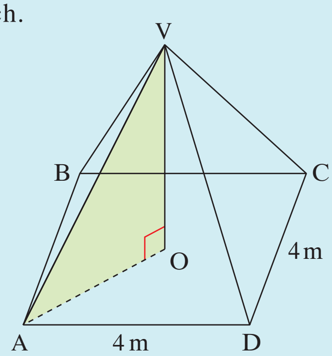
(ii) Tarraing $\triangle$AHD as an nua

$$\tan\theta = \frac{5}{\sqrt{50}}$$
$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right)$$
$$\Rightarrow \quad \theta = 35.26°$$



Sampla 2

Féach ar an bpirimid thíos. Bonn cearnógach atá aici agus 4 m ar fad atá an slios air. 3 m an airde cheartingearach.

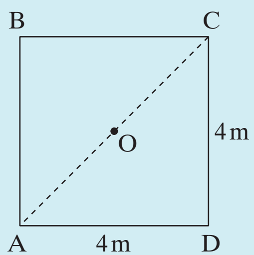


(i) Ríomh fad an imill [AV].

(ii) Uaidh sin ríomh, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire, achar iomlán na gceithre aghaidh thriantánacha.

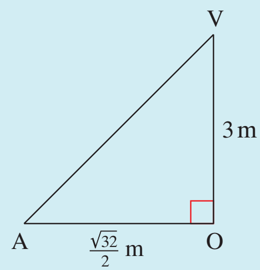
(i) Ag úsáid an bhoinn ABCD:

$$|AC|^2 = 4^2 + 4^2$$
$$|AC|^2 = 32$$
$$\Rightarrow \quad |AC| = \sqrt{32}$$
$$|AO| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{\sqrt{32}}{2}\text{ m}$$



Ag úsáid $\triangle$AVO:

$$|AV|^2 = 3^2 + \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2$$
$$= 9 + \frac{32}{4}$$
$$= 17$$
$$\Rightarrow \quad |AV| = \sqrt{17}\text{ m}$$



(ii) Achar na haghaidhe AVD:

$$h^2 + 2^2 = (\sqrt{17})^2$$
$$h^2 + 4 = 17$$
$$h^2 = 13 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{13}\text{ m}$$

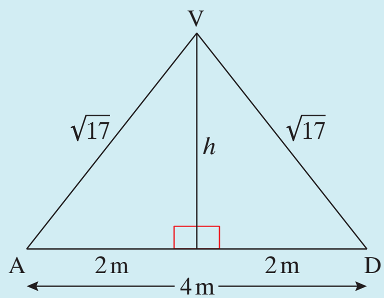
Achar $\triangle$AVD $= \frac{1}{2}(4\text{ cm})(\sqrt{13})$

$= 2\sqrt{13}\text{ m}^2$

Achar na 4 aghaidh $= 4(2\sqrt{13})\text{ m}^2$

$= 28.84\text{ m}^2$

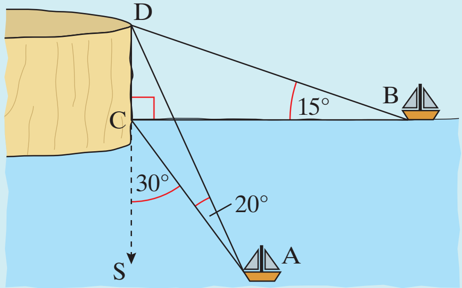
$= 29\text{ m}^2$, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.



Nóta: Mura bhfuil triantán dronuilleach, úsáidimid riail an tsínis nó riail an chomhshínis chun uillinn nó slios nach bhfuil ar eolas againn a fháil.

Sampla 3

Ó bharr aille ceartingearaí 100 m ar airde, tá bád A sa treo O 30° D agus tá bád B soir díreach.



20° atá in uillinn airde bharr na haille ó bhád A agus 15° atá san uillinn airde ó bhád B. Ríomh cá fhad atá na báid óna chéile.
Bíodh do fhreagra ceart go dtí an méadar is gaire.

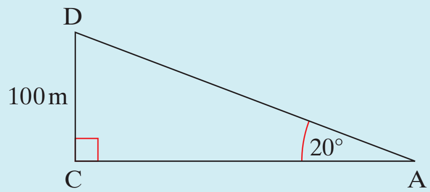
(i) Ag úsáid $\triangle ADC$:

$$\frac{100}{|CA|} = \tan 20°$$

$$\Rightarrow \quad |CA| \tan 20° = 100$$

$$\Rightarrow \quad |CA| = \frac{100}{\tan 20°} = \frac{100}{0.364}$$

$$\Rightarrow \quad |CA| = 274.7\text{ m}$$

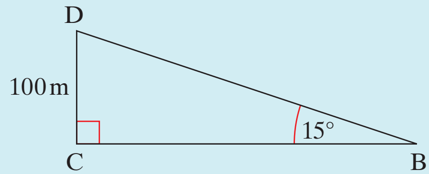


(ii) Ag úsáid $\triangle BCD$:

$$\frac{100}{|CB|} = \tan 15°$$

$$\Rightarrow \quad |CB| = \frac{100}{\tan 15°}$$

$$\Rightarrow \quad |CB| = 373.2\text{ m}$$



(iii) Ag úsáid $\triangle ACB$:
Anseo bainimid leas as riail an chomhshínis chun $|AB|$ a fháil.

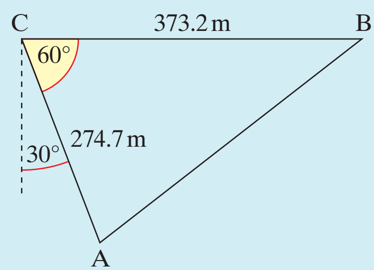
$$|AB|^2 = (373.2)^2 + (274.7)^2 - 2(373.2)(274.7)\cos 60°$$

$$\Rightarrow \quad |AB|^2 = 112\,220.29$$

$$\Rightarrow \quad |AB| = 334.99$$

$$= 335 \text{ méadar}$$

$\Rightarrow$ 335 méadar óna chéile atá na báid.

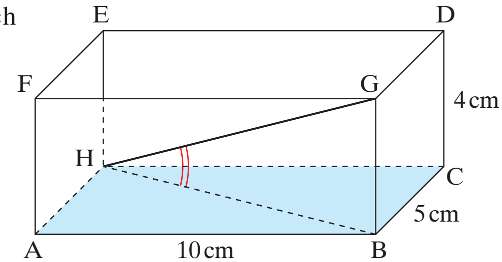


Triailcheisteanna 2.6

1. 10 cm faoi 5 cm faoi 4 cm atá bosca dronuilleogach oscailte, mar atá le feiceáil ar dheis.

(i) Faigh fad an trasnáin [GH].

(ii) Faigh tomhas na huillinne idir GH agus bonn an bhosca.



2. Feicfidh tú sa léaráid ar dheis crann tarchurtha raidió ceartingearach [BT] atá ina sheasamh ag cúinne na ceapaí talún dronuilleogaí cothrománaí ABCD.
12 m ar airde atá an crann agus tá $|BC| = 15$ m.
25° atá in uillinn airde bharr an chrainn ó A.

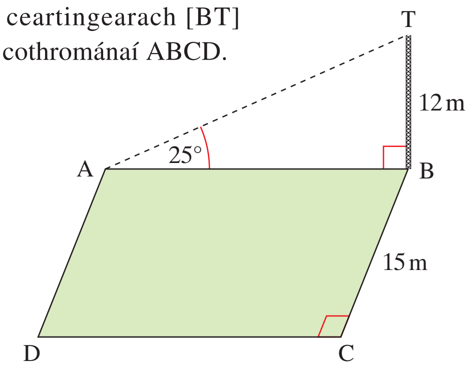
(i) Faigh fad [AB].

(ii) Ríomh uillinn airde bharr an chrainn ó C.

(iii) Faigh $|DB|$.

(iv) Ríomh uillinn airde bharr an chrainn ó D.

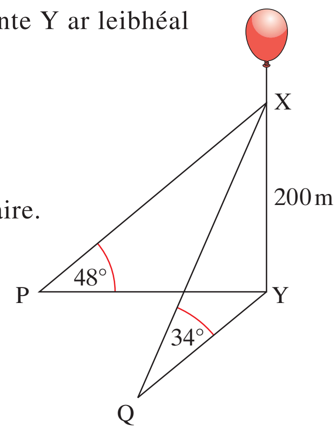
Bíodh gach freagra ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



3. 200 m in airde atá an balún X go ceartingearach os cionn an phointe Y ar leibhéal na talún. Ar leibhéal na talún atá dhá phointe, P agus Q, freisin.
48° atá in uillinn airde X ó P.
34° atá in uillinn airde X ó Q.

(i) Faigh $|PY|$ agus $|QY|$ ceart go dtí an méadar is gaire.

(ii) Má tá $|\angle PYQ| = 84°$, faigh $|PQ|$ ceart go dtí an méadar is gaire.



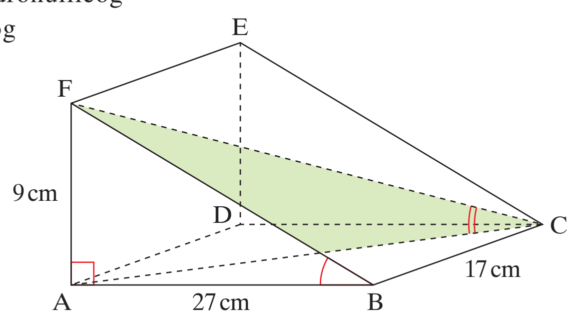
4. Sa tsamhail de rampa atá le feiceáil ar dheis, dronuilleog chothrománach atá in ABCD agus dronuilleog cheartingearach atá in ADEF.

Faigh (i) $|\angle ABF|$

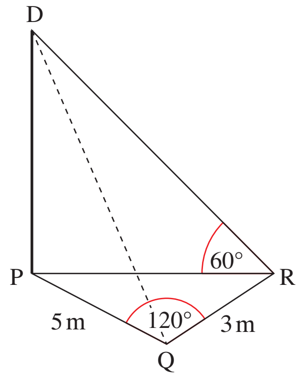
(ii) $|AC|$

(iii) $|\angle ACF|$.

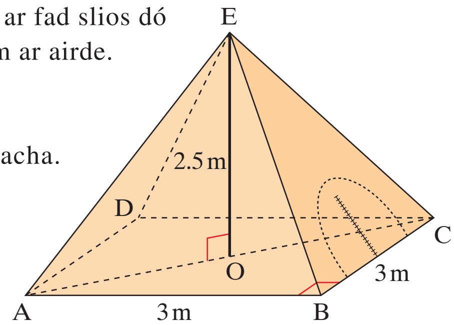
Bíodh gach freagra ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



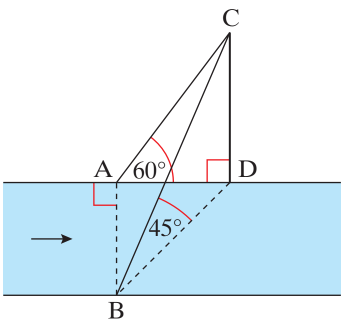
5. Is pointí ar phlána cothrománach iad P, Q agus R.
Cuaille is ea [PD] atá ceartingearach.
$60°$ atá in uillinn airde D ó R.
Má tá $|PQ| = 5$ m, $|QR| = 3$ m agus $|\angle PQR| = 120°$, faigh
(i) $|PR|$
(ii) $|DQ|$, ceart go dtí an méadar is gaire.



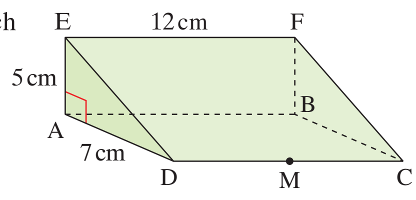
6. Cruth pirimide atá ar phuball. Tá bonn cearnógach aige ar fad slios dó 3 mhéadar, agus cuaille ceartingearach lárnach atá 2.5 m ar airde.
(i) Ríomh fad an imill ar fiar [AE], ceart go dtí ionad deachúlach amháin.
(ii) Faigh achar iomlán na gceithre aghaidh thriantánacha. Bíodh do fhreagra ina m^2, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



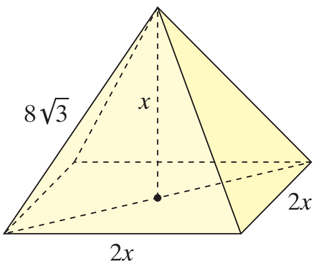
7. Soir díreach a shníonn abhainn a bhfuil túr ceartingearach [CD] ar a bruach clé.
$60°$ atá in uillinn airde an túir ón bpointe A in aghaidh an tsrutha, ar an mbruach céanna leis an túr.
$45°$ atá san uillinn airde ó phointe B ar an mbruach eile trasna go díreach ó A.
Más 36 méadar ar airde atá an túr, faigh leithead na habhann, ceart go dtí an méadar is gaire.



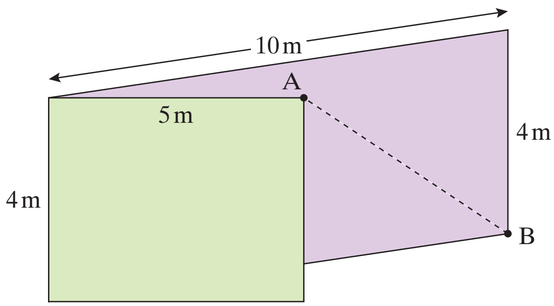
8. Dronuilleog chothrománach atá in ABCD san fhíor sholadach ar dheis, agus dronuilleog cheartingearach atá in ABFE.
Is é M lárphointe [CD].
Tá $|AD| = 7$ cm, $|AE| = 5$ cm agus $|EF| = 12$ cm,
Faigh iad seo:
(i) $|DF|$ (ii) $|\angle BDF|$ (iii) $|\angle FMB|$.
Bíodh gach freagra ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



9. Dronphirimid atá sa léaráid ar dheis.
Cearnóg atá sa bhonn, ar fad sleasa dó $2x$ cm.
$8\sqrt{3}$ cm ar fad atá gach ceann de na himill ar fiar.
x cm ar airde atá an phirimid.
Ríomh luach x.

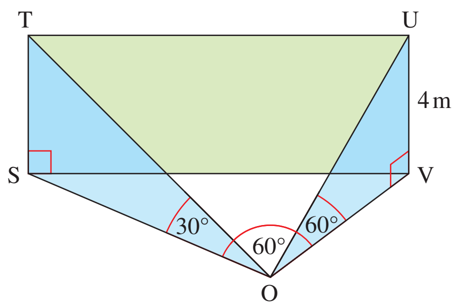


10. Feicfidh tú sa léaráid thíos dhá bhalla, ar fad dóibh 10 méadar agus 5 mhéadar, ag teacht le chéile ag dronuillinneacha. 4 mhéadar ar airde atá an dá bhalla.

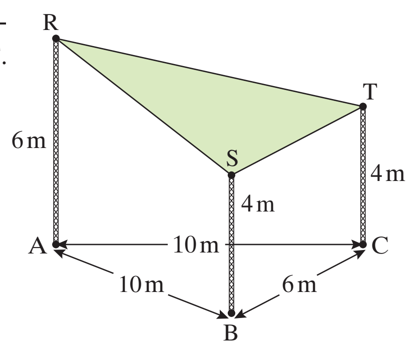


Ríomh an fad idir na pointí A agus B ar na ballaí.
Bíodh do fhreagra ina mhéadair, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.

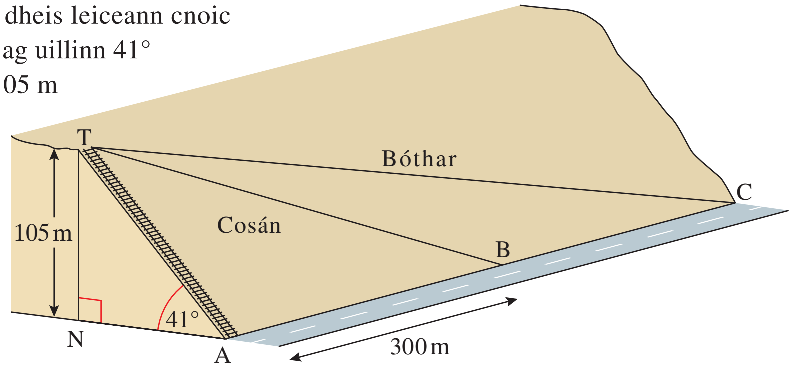
11. Taispeánann an fhíor ar dheis balla ceartingearach TUVS ceithre mhéadar ar airde.
Ó phointe O ar leibhéal na talún, 60° atá san uillinn airde ó O go U agus 30° atá san uillinn airde atá ag T ó O.
Má tá $|\angle SOV| = 60°$, faigh fad an bhalla [SV] ina mhéadair, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



12. Feicfidh tú san fhíor ar dheis trí chuaille cheartin-gearacha agus iad ag iompar díon triantánach, RST.
$|AB| = |AC| = 10$ méadar, $|AR| = 6$ m,
$|SB| = |TC| = 4$ m agus $|BC| = 6$ m.
(i) Faigh achar an scáthláin ABC.
(ii) Faigh achar an dín RST.



13. Taispeántar sa léaráid ar dheis leiceann cnoic plánach, a théann le fána ag uillinn 41° leis an gcothromán. Is é 105 m airde cheartingearach an chnoic. Ritheann bóthar cothrománach díreach ar feadh bhun an chnoic. Ritheann iarnród cáblach AT díreach suas an leiceann cnoic.



(i) Ríomh fad an iarnróid [AT], ceart go dtí an méadar is gaire.

Tá cosán ag dul go díreach ó B go T, áit a bhfuil $|AB| = 300$ m

(ii) Ríomh fad an chosáin [BT].

Tá grádán 1 sa 5 ag an mbóthar díreach CT, rud a chiallaíonn go n-éiríonn sé méadar amháin go ceartingearach in aghaidh gach cúig mhéadar a thaistealaítear **ar feadh an bhóthair**.

(iii) Faigh fad an bhóthair [CT].

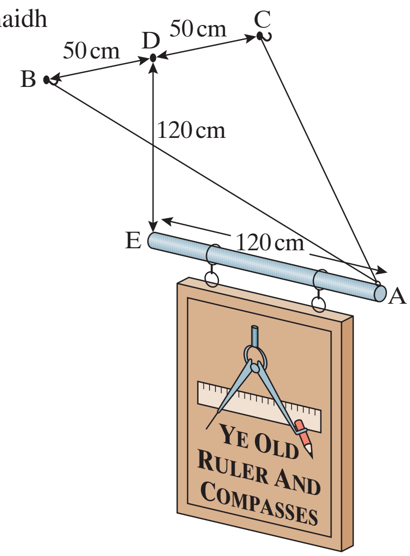
(iv) Faigh $|BC|$, ceart go dtí an méadar is gaire.

14. Sa léaráid ar dheis, iompraíonn cuaille [EA] comhartha le haghaidh teach ósta. Tá an cuaille ingearach le balla ceartingearach agus tá sé á iompar ag dhá shreang, [AB] agus [AC]. Tá na crúcaí ag B agus C i líne chothrománach agus tá D 120 cm go ceartingearach os cionn E.

(i) Ríomh fad [DA].

(ii) Ríomh fad gach sreinge, ceart go dtí an ceintiméadar is gaire.

(iii) Faigh an uillinn a dhéanann an tsreang AB leis an mballa, ceart go dtí an chéim is gaire.



MÍR 2.7: Graif d'fheidhmeanna triantánachta

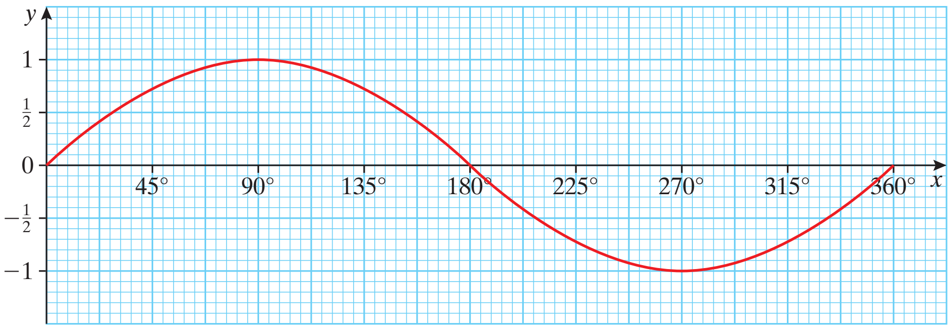
Graf $y = \sin x$

Cosúil le feidhm ar bith eile, is féidir an fheidhm $y = \sin x$ a ghrafadh ach luachanna éagsúla ar x agus a ghlacadh agus na luachanna comhfhreagracha ar y a fháil.

Is éard atá sa tábla thíos ná uillinneacha idir 0° agus 360° agus an luach atá ar shíneas (y-luach) gach ceann de na huillinneacha sin.

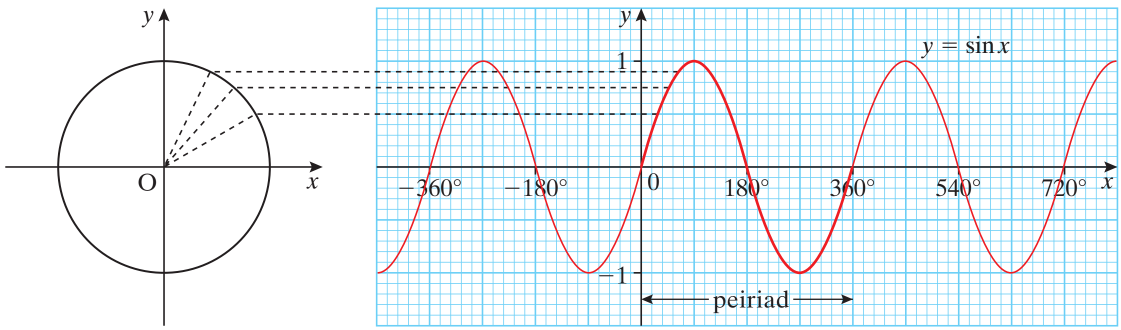
$x =$	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = \sin x$	0	0.7	1	0.7	0	−0.7	−1	−0.7	0

Is é an cuar mín thíos an toradh nuair a rianaítear na hordphéirí sin:



Má leantar le luachanna x le linn imrothlú iomlán eile de 360° nó −360°, is iad na luachanna céanna ar sin x a gheofar i gcás gach imrothlaithe de 360° (or 2π).

Seo agat graf $y = \sin x$ i gcás $-360° \leqslant x \leqslant 720°$.



Is léir ar an ngraf sin gurb iad na luachanna céanna ar shíneas x a thugtar i gcás gach 360° (nó 2π).

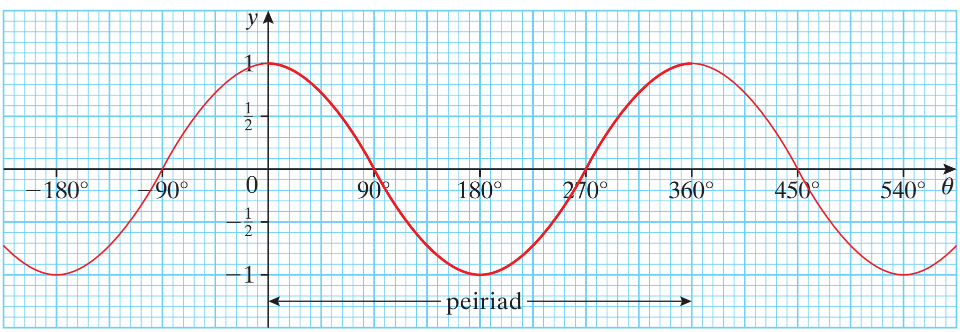
Sin é an fáth a ndeirimid gur graf **peiriadach** é graf sin x, agus gurb é 360° (nó 2π**) an peiriad**.

Is é 1 an y-luach is airde ar an ngraf agus is é −1 an luach is ísle.

Is é [−1, 1] **raon** na feidhme, mar sin.

Graf $y = \cos x$

Ach tacar ordphéirí den chineál céanna a chur le chéile, gheobhaimid an cuar seo a leanas le haghaidh $y = \cos x$ san fhearann $-180° \leqslant x \leqslant 540°$.



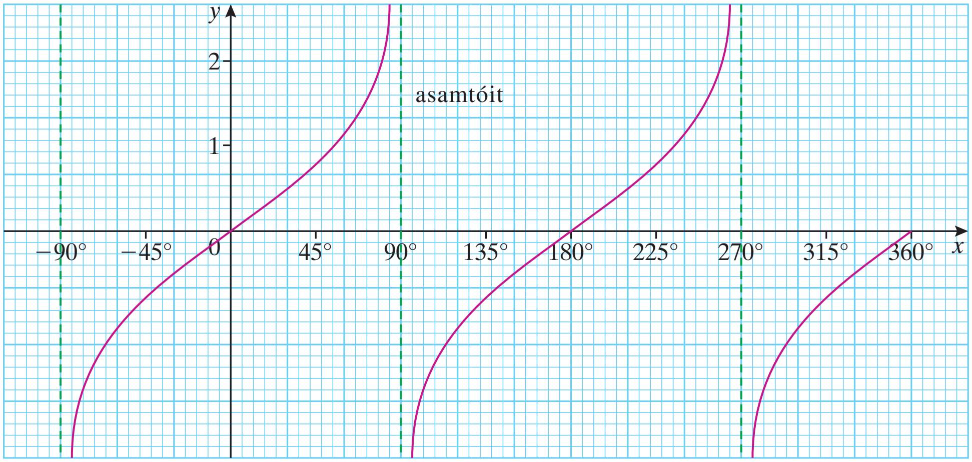
Cosúil le sin x, tá cos x peiriadach agus is é **360° an peiriad**.

Is é [−1, 1] an raon sa chás seo freisin.

Graf y = tan x

Seo tábla luachanna le haghaidh $y = \tan x$ i gcás $0 \leqslant x \leqslant 360°$.

x =	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
y = **tan**	0	1	neamhshainithe	−1	0	1	neamhshainithe	−1	0

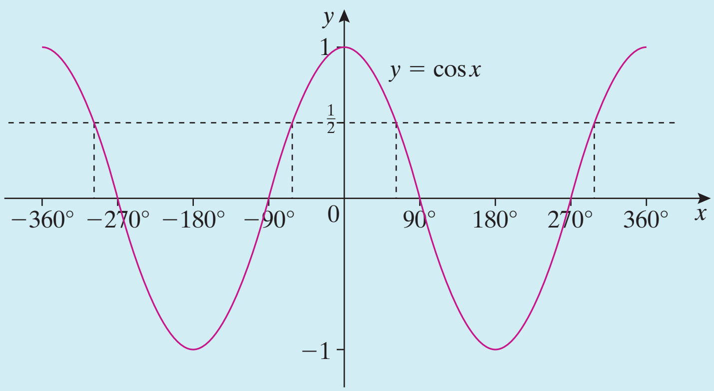


Tá feidhm an tangaint an-difriúil le feidhm an tsínis agus feidhm an chomhshínis, ach tá sé peiriadach mar sin féin. Faighimid na luachanna céanna i dtimthriallta de 180°,, mar sin is é 180° (nó π) an peiriad. Ag $x = 90°$ agus ag $x = 270°$ faighimid dhá asamtóit cheartingearacha, línte a ndruideann cuar an tangaint leo ach nach dteagmhaíonn leo riamh.

Sampla 1

Tarraing graf de $y = \cos x$ san fhearann $-360° \leqslant x \leqslant 360°$.
Taispeáin ar an ngraf go bhfuil ceithre uillinn san fhearann seo a shásaíonn an chothromóid $\cos x = \frac{1}{2}$.

Tá sceitse den ghraf le feiceáil thíos.



Trasnaíonn an líne $y = \frac{1}{2}$ (i.e. $\cos x = \frac{1}{2}$) an graf ag ceithre phointe.

Na pointí ina mbuaileann na línte ceartingearacha ó na trasnaithe sin leis an x-ais, tugann siad luachanna na gceithre uillinn.

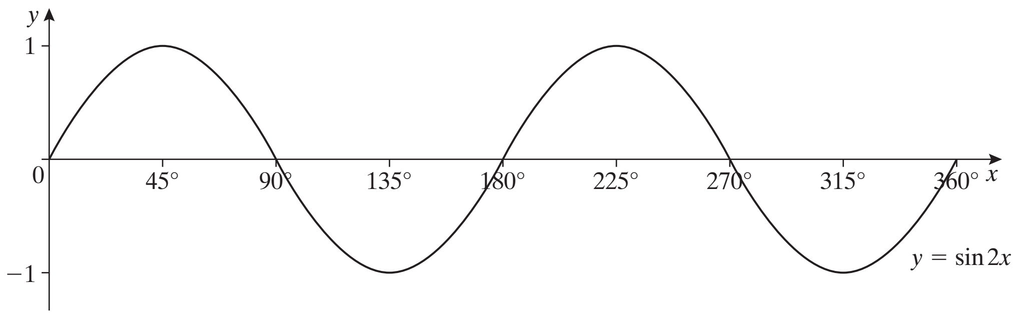
Graif de a sin nx agus a cos nx, $n \in \mathbb{N}$

Céard a tharlaíonn don fheidhm $y = \sin x$ nuair a iolraítear x faoi uimhir sa chaoi is go mbíonn $y = \sin 2x$ nó $y = \sin 3x$?

Seo tábla luachanna le haghaidh $y = \sin 2x$.

$x =$	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$2x =$	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°	630°	720°
$y = \sin 2x$	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0

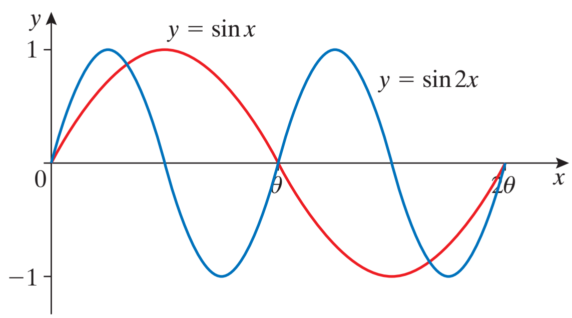
Seo an chuma atá ar ghraf $y = \sin 2x$.



Tá an cruth céanna ar ghraf $y = \sin 2x$ agus atá ar ghraf $y = \sin x$ ach is é 180° an peiriad. I bhfocail eile, is féidir **dhá** chuar sínis a chur isteach sa raon 0° go 360°.

Mar sin, i gcás sin $2x$, is é an peiriad ná $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ar an gcaoi chéanna, i gcás cos $2x$, is é an peiriad ná $\frac{2\pi}{2} = \pi$.



> I gcás $y = \sin x$, is é an peiriad ná 2π
>
> I gcás $y = \sin 2x$, is é an peiriad ná $\frac{2\pi}{2} = \pi$
>
> I gcás $y = \sin 3x$, is é an peiriad ná $\frac{2\pi}{3}$
>
> I gcás $y = \sin nx$, is é an peiriad ná $\frac{2\pi}{n}$

Ar an gcaoi chéanna, tá peiriad $\frac{2\pi}{3}$ ag $y = \cos 3x$ agus tá peiriad $\frac{2\pi}{n}$ ag $y = \cos nx$

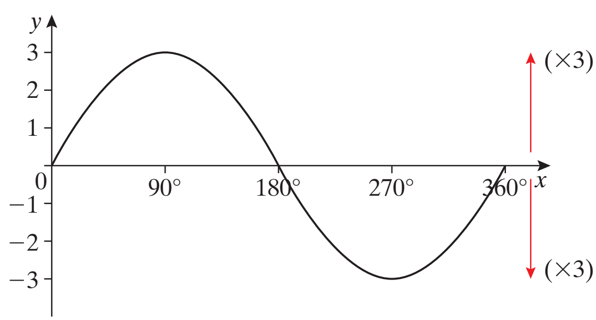
Graf $y = a \sin x$

Cuir i gcás graf $y = \mathbf{3} \sin x$.

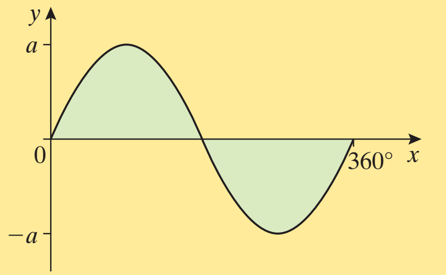
Is é éifeacht an **3** ná graf $y = \sin x$ a shíneadh faoi thrí. Ní théann sé i bhfeidhm ar x-threo an ghraif ar chor ar bith.

Tá graf $y = 3 \sin x$ le feiceáil ar dheis.

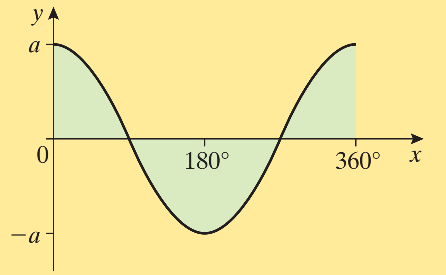
Is é $(-3, 3)$ an raon.



Raon feidhme



Is é $[-a, a]$ an raon atá ag $y = a \sin x$



Is é $[-a, a]$ an raon atá ag $y = a \cos x$

Sampla 2

Sceitseáil graf $y = 4 \sin 2x$ san fhearann $-180° \leqslant x \leqslant 180°$.

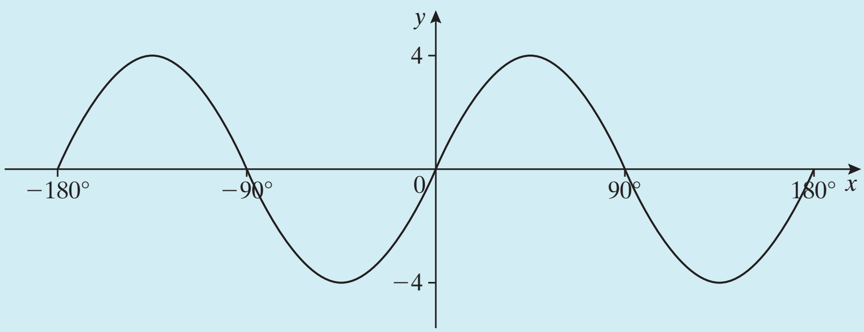
I gcás ghraf na feidhme $y = 4 \sin 2x$,

(i) peiriad $= \dfrac{2\pi}{2} = 180°$

i.e. is féidir cuar sínis iomlán a chur isteach san fhearann $0° - 180°$.

(ii) is é $[-4, 4]$ an raon.

Tá sceitse den ghraf le feiceáil thíos.



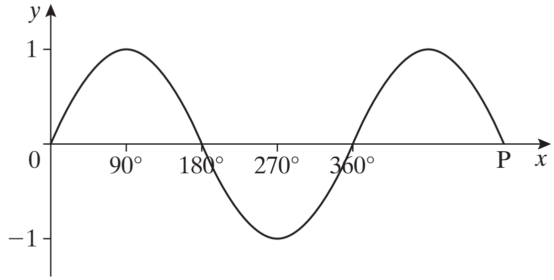
Triailcheisteanna 2.7

1. Tarraing graf na feidhme $y = \sin x$ san fhearann $0 \leqslant x \leqslant 720°$.
Céard é (i) peiriad
(ii) raon na feidhme?

Agus tú fós ag úsáid an phéire aiseanna chéanna, tarraing graf $y = 3 \sin x$ san fhearann céanna.
Céard é (iii) peiriad
(iv) raon na feidhme seo?

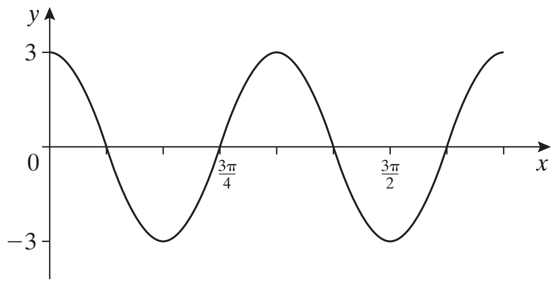
2. Tarraing sceitse den fheidhm $y = \cos x$ san fhearann $-360° \leqslant x \leqslant 360°$.
Scríobh síos (i) peiriad
(ii) raon na feidhme.

3. Graf den fheidhm $y = \sin x$ atá sa léaráid ar dheis.
(i) Scríobh síos comhordanáidí an phointe P.
(ii) Déan cóip gharbh den ghraf agus bain úsáid as na haiseanna céanna chun graf a tharraingt de $y = \sin 2x$ san fhearann $0 \leqslant x \leqslant 360°$. Scríobh síos peiriad $y = \sin 2x$.

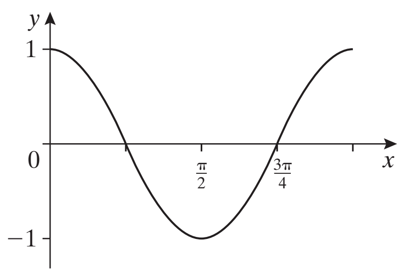


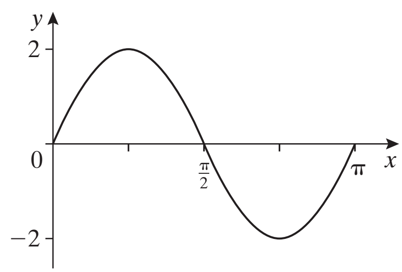
4. Scríobh síos peiriad agus raon gach ceann de na feidhmeanna seo:
(i) $y = 3 \cos x$ (ii) $y = 2 \sin 2x$ (iii) $y = 4 \sin 3x$

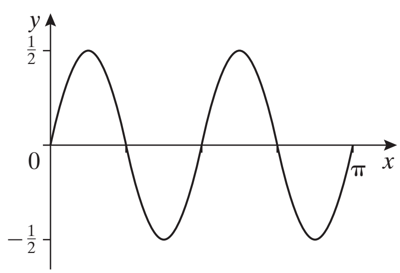
5. Scríobh síos peiriad agus raon na feidhme ar dheis.
Uaidh sin, scríobh síos an fheidhm san fhoirm $y = \ldots$.

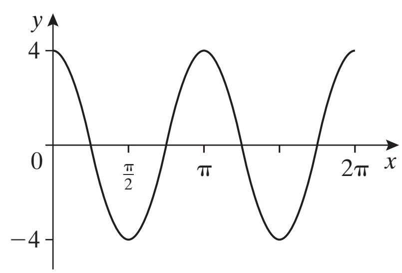


6. Scríobh síos peiriad agus raon gach ceann de na cuair seo a leanas.
Uaidh sin, scríobh síos an fheidhm.

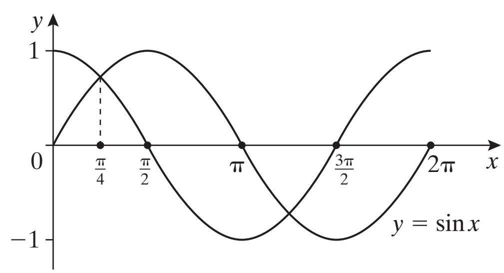
(i)


(ii)


(iii)


(iv)


7. Tá graif $y = \sin x$ agus $y = \cos x$ le feiceáil ar dheis:
Scríobh síos, ón ngraf, luach gach ceann díobh seo a leanas:
(i) $\sin \frac{\pi}{2}$ (ii) $\sin \pi$ (iii) $\cos 0$
(iv) $\cos \pi$ (v) $\sin \frac{3\pi}{2}$



Cén dá luach ar x san fhearann atá tugtha a fhágann go bhfuil $\sin x = \cos x$?

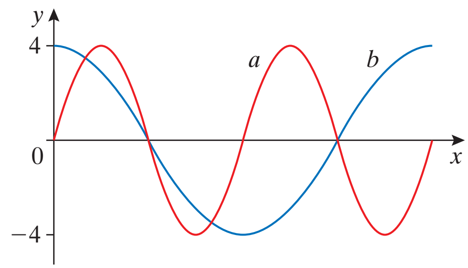
8. Ar an ngraf ar dheis, feicfidh tú dhá fheidhm

$$y = 4\cos x$$

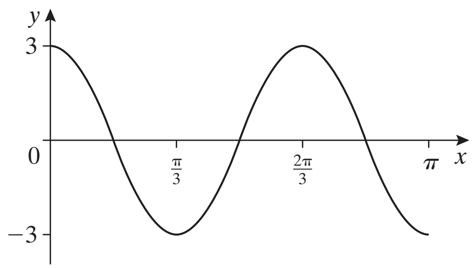
agus $y = 4\sin 2x$

Luaigh cé acu feidhm a seasann a di agus cé acu feidhm a seasann b di.

Anois déan cóip de na graif agus lipéadaigh an scála ar an x-ais.



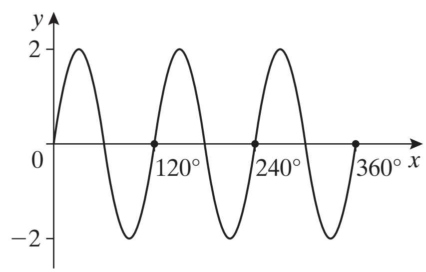
9. Scríobh síos cothromóid den fheidhm thíos.



Uaidh sin scríobh síos na luachanna ar x san fhearann tugtha a fhágann go bhfuil

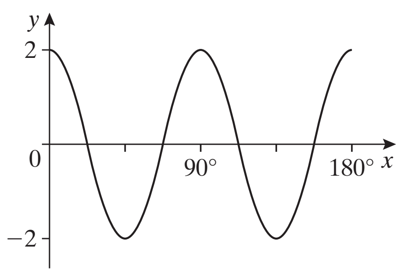
(i) $f(x) = 3$ (ii) $f(x) = 0$ (iii) $f(x) = -3$.

10. Scríobh síos cothromóid na feidhme triantánachta ar dheis.

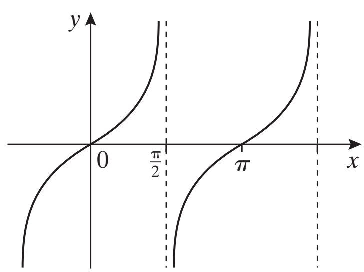


11. Scríobh síos feidhm fhéideartha i gcás gach ceann de na graif seo a leanas:

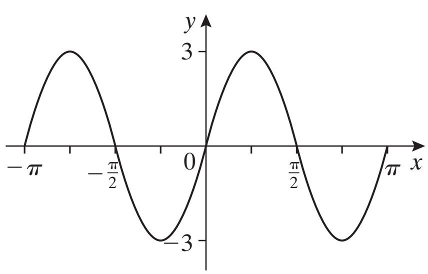
(i)



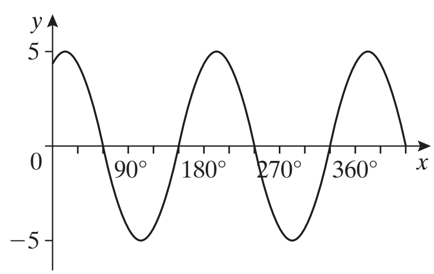
(ii)



(iii)



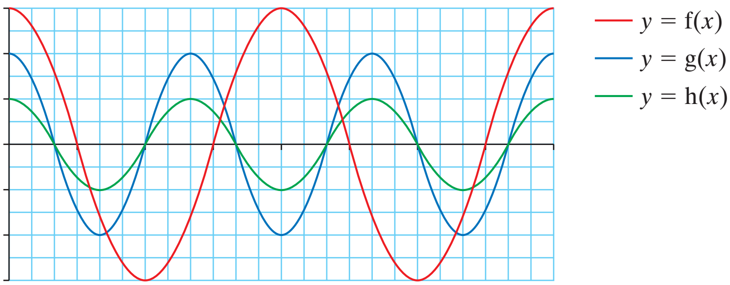
(iv)



12. Taispeántar graif trí fheidhm sa léaráid thíos. Níl na scálaí ar na haiseanna lipéadaithe.
Is iad na trí fheidhm ná:

$x \rightarrow \cos 3x$
$x \rightarrow 2\cos 3x$
$x \rightarrow 3\cos 2x$

Sainaithin na feidhmeanna agus scríobh do chuid freagraí sna spásanna laistíos den léaráid.



(i) $f(x) =$; $g(x) =$; $h(x) =$
(ii) Déan cóip gharbh den léaráid agus lipéadaigh na scálaí ar an x-ais agus ar an y-ais.

MÍR 2.8: Réitigh ghinearálta ar chothromóidí triantánachta

I Mír 2.3 réitíomar cothromóidí ar nós $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i gcás uillinneacha sa raon $0 \leqslant x \leqslant 360°$ (nó $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$).

Is iondúil gur thug sé sin dhá luach dúinn ar an uillinn x.

Cuir i gcás arís an chothromóid $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

An freagra a thugann áireamhán atá ag obair i gcéimeanna ná 60°.

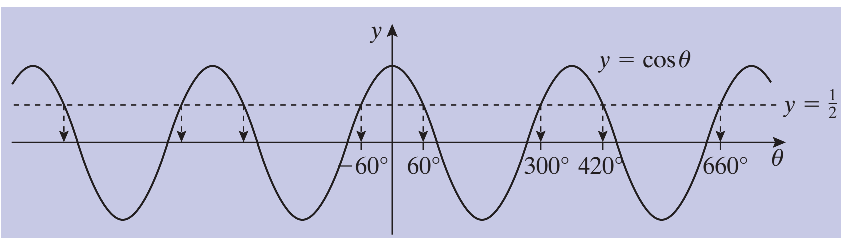
Ach ná déan dearmad nach bhfuil ansin ach an príomhluach.

Seiceáil go bhfuil $\theta = 300°$ agus $\theta = 420°$ ceart freisin.

An chothromóid $\cos\theta = \frac{1}{2}$, níl aon srian ar raon na luachanna ar θ ar réitigh den chothromóid iad.

Taispeánann an graf thíos an fheidhm $y = \cos\theta$ agus an fheidhm $y = \frac{1}{2}$.

Is léir ón ngraf go bhfuil líon éigríochta réiteach ar an gcothromóid $y = \frac{1}{2}$ mar go leanann an graf $y = \cos\theta$ an patrún céanna arís is arís eile, gan aon deireadh.



Sa raon $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$, tá dhá luach ar θ a fhágann go bhfuil $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

Is iad na luachanna sin ná 60° agus 300°. Tabhair faoi deara gurb ionann $\theta = 420°$ agus $60° + 360°$ agus gurb ionann $\theta = 660°$ agus $300° + 360°$. Mar sin is féidir tuilleadh réiteach ar an gcothromóid a fháil ach 360° a chur arís is arís eile leis na huillinneacha 60° agus 300°.

Mar sin is iad réitigh na cothromóide cos $\theta = \frac{1}{2}$ ná

$\theta = 60° + n360°$ nó $\theta = 300° + n360°$, áit a bhfuil n ina shlánuimhir.

Réiteach ginearálta na cothromóide a thugtar air sin.

Is féidir linn réiteach ginearálta cothromóid triantánachta ar bith, atá san fhoirm sin $\theta = k$ nó cos $\theta = k$, a fháil ar an gcaoi chéanna.

Tugtar an modh sin thíos.

Cuimhnigh

> Chun réiteach ginearálta sin $x = k$ nó cos $x = k$, a fháil, faigheann tú an dá réiteach san eatramh $0° \leq \theta \leq 360°$ agus ansin suimíonn tú $n360°$ leis an dá réiteach.

Sampla 1

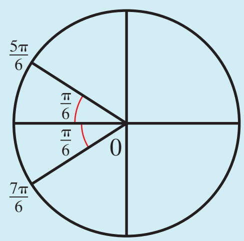
Faigh réiteach ginearálta na cothromóide cos $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, θ ina raidiain.

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ (30°)… an uillinn tagartha

tá comhshíneas diúltach sa 2ú agus sa 3ú ceathrú.

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ sa 2ú agus sa 3ú ceathrú

$\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$ nó $\frac{7\pi}{6}$



Is é an réiteach ginearálta ná $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$ nó $2n\pi + \frac{7\pi}{6}$.

Sampla 2

Réitigh an chothromóid sin $3\theta = \frac{1}{2}$ i gcás $\theta \in R$, θ ina raidiain.

$\sin 3\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 3\theta = \frac{\pi}{6}$ nó $\frac{5\pi}{6}$ … tá síneas deimhneach sa 1ú agus sa 2ú ceathrú

Na réitigh ar fad le haghaidh 3θ (i.e. an réiteach ginearálta) ná

$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ nó $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow \theta = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$ nó $\frac{2n\pi}{3} + \frac{5\pi}{18}$

> Ba chóir an réiteach ginearálta iomlán le haghaidh 3θ a fháil sula roinntear ar a 3 chun na luachanna ginearálta ar θ a fháil.

Nóta: Léirítear sa sampla seo a leanas an chaoi le húsáid a bhaint as réiteach ginearálta cothromóide chun gach uillinn in eatramh ar leith a fháil.

Sampla 3

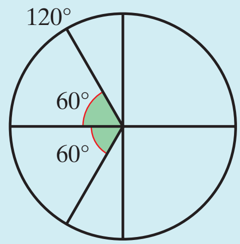
Faigh na réitigh uile ar cos $2\theta = -\frac{1}{2}$ i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

$\cos 2\theta = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

$\Rightarrow \quad 2\theta = 60°$ … an uillinn tagartha

tá comhshíneas diúltach sa 2ú agus sa 3ú ceathrú.

$\Rightarrow \quad 2\theta = 120°$ nó $240°$



Chun na réitigh uile a fháil, suimímid $n(360°)$ le gach uillinn.

$\Rightarrow \quad 2\theta = 120° + n(360°)$ nó $2\theta = 240° + n(360°)$

$\Rightarrow \quad \theta = 60° + n(180°)$ nó $\theta = 120° + n(180°)$

Chun luachanna θ sa raon $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$, bíodh $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$n = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60°$ nó $120°$

$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 240°$ nó $300°$

$n = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta = 420°$ nó $480°$

Ós lasmuigh den raon 0° go 360° atá 420° agus 480°, ní chuirimid na luachanna sin san áireamh.

Mar sin is iad luachanna θ ná 60°, 120°, 240°, 300°.

Réiteach ginearálta tan $x = k$

Is féidir an réiteach ginearálta ar tan $x = k$ a fháil ar bhealach atá cosúil lena bhfuil sna samplaí thuas. Ach is é π peiriad chuar an tangaint; mar sin faighimid luach x x san eatramh 0 go π agus ansin suimímid $n\pi$ leis sin chun an réiteach ginearálta a fháil.

Mar shampla, má tá tan $\theta = \sqrt{3}$

$$\theta = 60° \left(\text{or } \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \theta = n180° + \frac{\pi}{3}, \text{ i.e., an réiteach ginearálta}$$

Triailcheisteanna 2.8

1. Faigh an dá luach ar x a fhágann go bhfuil $\sin x = \frac{1}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 360°$.

2. Faigh an dá réiteach ar an gcothromóid $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i gcás $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3. Má tá $\tan \theta = 1$, faigh an dá réiteach ar an gcothromóid $y = \tan \theta$ i gcás $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

4. Faigh **gach** réiteach ar an gcothromóid $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$, i gcás $\theta \in R$ agus θ ina raidiain..

5. Faigh réiteach ginearálta na cothromóide $\cos 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, i gcás $\theta \in R$ agus θ ina chéimeanna.

6. Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\sin 3\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, i gcás $\theta \in R$ agus θ ina raidiain.

7. Faigh réiteach ginearálta na cothromóide $2 \cos 4\theta = 1$, θ ina raidiain.

8. Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, x ina raidiain.

9. Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, i gcás $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

10. Má tá $2 \cos 2\theta = -\sqrt{3}$, faigh gach luach ar θ a shásaíonn an chothromóid sin, i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

11. Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\tan 2\theta = \sqrt{3}$, $\theta \in R$ agus θ ina raidiain.

12. Faigh réiteach ginearálta na cothromóide $2 \cos 4\theta = \sqrt{3}$, $\theta \in R$ agus θ ina raidiain.

13. Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$, i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

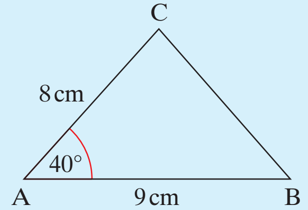
14. Faigh, ceart go dtí an chéim is gaire, na réitigh uile ar an gcothromóid $\sin 3\theta = 0.78$ i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

CUIR TRIAIL ORT FÉIN 2

Ceisteanna A

1. I gcás an triantáin ABC ar dheis, $|AB| = 9$ cm, $|AC| = 8$ cm agus $|\angle CAB| = 40°$.

Faigh achar $\triangle ABC$, ina cm^2, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.

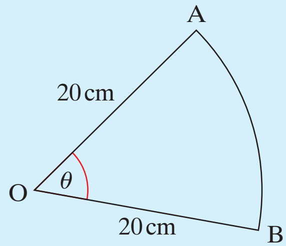


2. Faigh na luachanna ar θ a fhágann go bhfuil $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

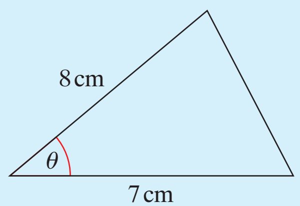
3. 240 cm^2 an t-achar atá sa teascóg AOB.

(i) Scríobh θ ina raidiain.

(ii) Faigh fad an stua AB.



4. Má tá $\tan \theta = \frac{3}{4}$, faigh achar an triantáin ar dheis gan áireamhán a úsáid.

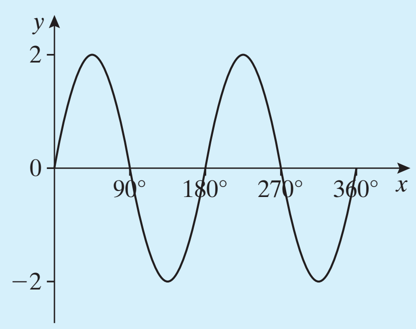


5. (i) Scríobh síos peiriad agus raon na feidhme a bhfuil a graf le feiceáil ar dheis.

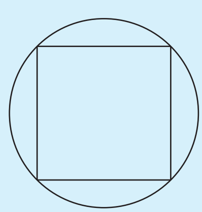
(ii) Más é

$$y = a \sin bx,$$

an fheidhm, faigh luachanna a agus b.



6. Tá cearnóg inscríofa i gciorcal, mar atá le feiceáil ar dheis. Mar π aonad cearnach, atá in achar an chiorcail, faigh achar na cearnóige.



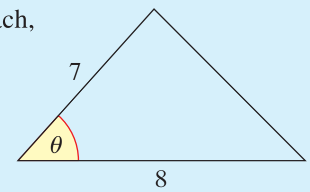
7. Má tá sin $\theta = -\frac{3}{5}$ agus cos $\theta = \frac{4}{5}$, faigh luach tan θ san fhearann $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$, gan úsáid a bhaint as áireamhán.

8. 20 cm^2 an t-achar atá i dtriantán, PQR. $|PQ| = 10$ cm agus $|PR| = 8$ cm.

Faigh an dá luach a d'fhéadfadh a bheith ar $|\angle QPR|$.

9. Faigh na luachanna ar θ a fhágann go bhfuil 4 sin $\theta = 3, 0 \leqslant \theta \leqslant 360°$.
Bíodh gach freagra ceart go dtí an chéim is gaire.

10. Más ionann achar an triantáin sa léaráid agus $14\sqrt{3}$ aonad cearnach, faigh luach cos θ. Bíodh do fhreagra ina chodán.



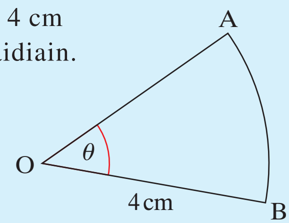
Ceisteanna B

1. 17 cm, 12 cm agus 8 cm ar fad atá sleasa triantáin áirithe.
(i) Faigh an uillinn is mó sa triantán, ceart go dtí an chéim is gaire.
(ii) Uaidh sin ríomh achar an triantáin ina cm^2, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.

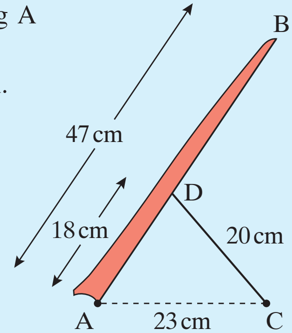
2. (i) Faigh gach réiteach ar an gcothromóid

$$\cos 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \theta \in R \text{ agus } \theta \text{ ina raidiain.}$$

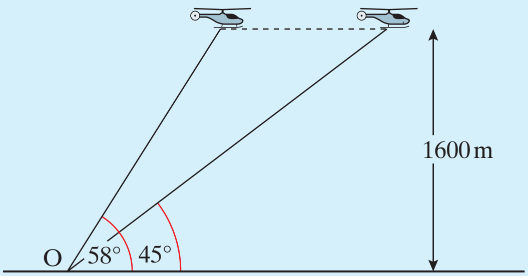
(ii) Teascóg de chiorcal í AOB. Is é O lárphointe an chiorcail, agus 4 cm atá sa gha. Más ionann achar AOB agus 12 cm^2, scríobh θ ina raidiain.



3. Is éard atá sa léaráid ná boinéad cairr, [AB], curtha ar insí ag A agus coinnithe ar oscailt ag stagh, [CD].
$|AC| = 23$ cm, $|AB| = 47$ cm, $|AD| = 18$ cm agus $|CD| = 20$ cm.
(i) Ríomh fad na huillinne CAD, ceart go dtí an chéim is gaire.
(ii) Faigh airde B os cionn leibhéal AC.
Bíodh do fhreagra ceart go dtí an ceintiméadar is gaire.



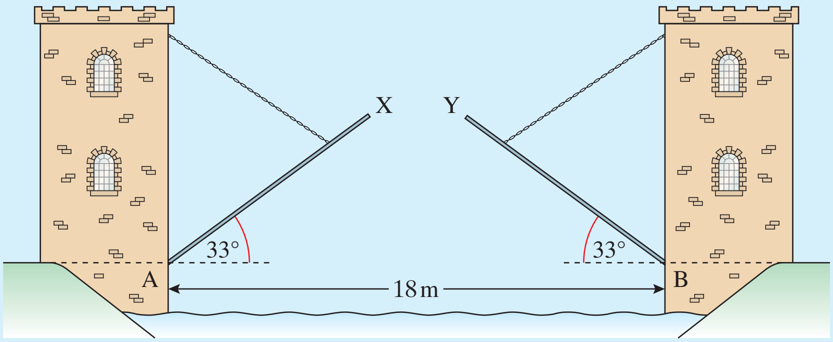
4. Taispeántar sa léaráid dhá dhearcadh, ón bpointe O, ar héileacaptar atá ag eitilt agus é 1600 méadar os cionn na talún. Ar an gcéad dearcadh, bhí an héileacaptar soir díreach de O agus ba é 58° an uillinn airde. Nóiméad amháin níos déanaí bhí sé fós soir díreach de O, ach ba é 45° an uillinn airde.



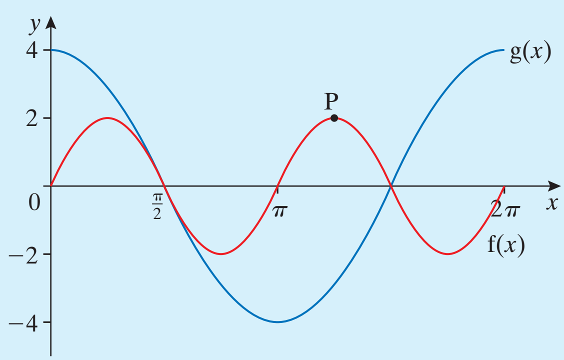
Ríomh luas an héileacaptair ina chiliméadair san uair, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.

5. I gcás $\triangle ABC$, $|AB| = 10$ cm, $|BC| = a\sqrt{3}$ cm, $|AC| = 5\sqrt{13}$ cm agus $|\angle ABC| = 150°$.
Faigh (i) luach a. (ii) achar beacht $\triangle ABC$.

6. Taispeántar droichead tógála siméadrach sa léaráid. Nuair a íslítear iad, buaileann na bóithre [AX] agus [BY] le chéile sa lár, gan aon spás eatarthu agus gan aon fhorluí.
Ríomh fad [XY], ina mhéadair, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.

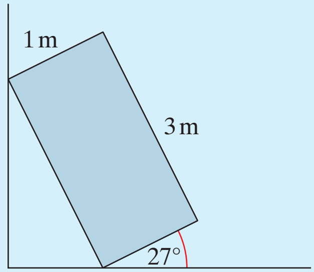


7. Feicfidh tú thíos graf dhá fheidhm thriantánachta, $f(x)$ agus $g(x)$.



(i) Céard é raon $g(x)$?
(ii) Céard é peiriad $f(x)$?
(iii) Scríobh síos luach $g(\pi)$
(iv) Scríobh síos cothromóid gach feidhme
(v) Scríobh síos comhordanáidí an phointe P.

8. Tá cloch phábhála dhronuilleogach 3 m faoi 1 m ina seasamh i gcoinne balla ceartingearach, mar atá le feiceáil ar dheis. Cén airde os cionn na talún atá an pointe is airde den cloch? Tabhair do fhreagra ina mhéadair, ceart go dhá ionad dheachúlacha.



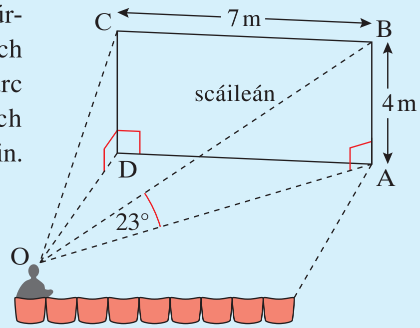
9. Sa léaráid feicfidh tú duine ag breathnú ar scannán sa phictiúr--lann. Tá sí ina suí go díreach os comhair chúinne íochtarach an scáileáin, ar thaobh na láimhe clé. Le go mbeadh radharc sásúil ar an scáileán ag duine sa phictiúrlann, ní mór nach n-éireodh na súile trí níos mó ná 30° ó bhun go barr an scáileáin.

(i) Ríomh:

(a) OA, ceart go dtí ionad deachúlach amháin

(b) an uillinn idir an dá phlána OAB agus ABCD, ceart go dtí an chéim is gaire

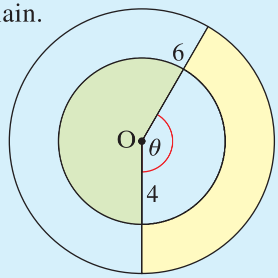
(ii) An bhfuil 'radharc sásúil' díreach ar aghaidh ag an duine seo?



10. (i) Réitigh an chothromóid $\cos 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, i gcás $\theta \in R$ agus θ ina raidiain.

(ii) Sa léaráid ar dheis feicfidh tú dhá chiorcal chomhlárnacha. Is é O a lárphointe agus tá a ngathanna 4 cm agus 6 cm ar fad. Is ionann achar don dá réigiún scáthaithe.

Taispeáin go bhfuil $\theta = \frac{8\pi}{9}$ raidian.



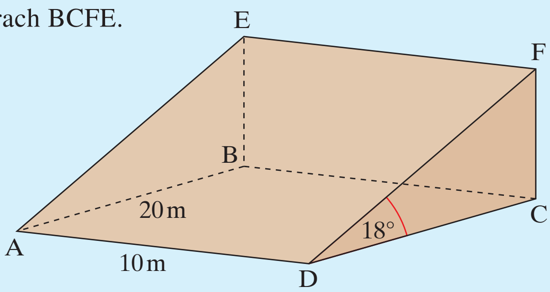
Ceisteanna C

1. Déantar rampa ADFE i gcoinne balla ceartingearach BCFE. Is dronuilleoga iad ADFE agus BCFE araon. $|AB| = 20\,\text{m}$, $|AD| = 10\,\text{m}$ agus $|\angle FDC| = 18°$. Ríomh gach ceann díobh seo a leanas, ceart go dtí ionad deachúlach amháin:

(i) $|CF|$ (ii) $|DF|$

(iii) $|\angle CAD|$ (iv) $|AF|$

(v) $|\angle FAC|$

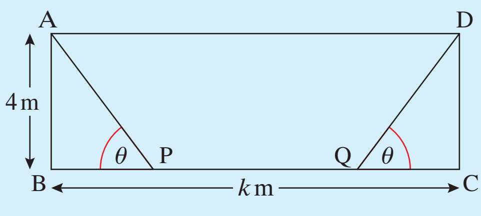


2. Léaráid den dronuilleog ABCD atá ar dheis. Tá $|AB| = 4$ m agus $|BC| = k$ méadar.

$|\angle APB| = |\angle CQD| = \theta$.

(i) Scríobh $|PQ|$ i dtéarmaí k agus $\tan\theta$.

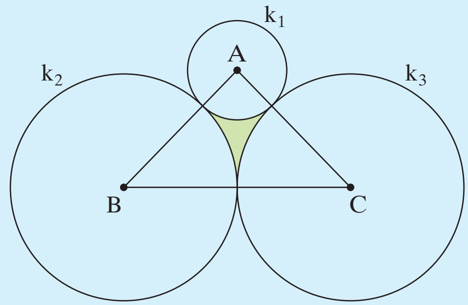
(ii) Má tá $k = 12$ m agus $|PQ| = (12 - 4\sqrt{3})$ m, faigh θ ceart go dtí an chéim is gaire.



3. Is iad A, B agus C lárphointí na gciorcal k_1, k_2 agus k_3, mar a thaispeántar. Teagmhaíonn na trí chiorcal le chéile go seachtrach agus $AB \perp AC$. $2\sqrt{2}$ cm is fad ga do k_2 agus do k_3.

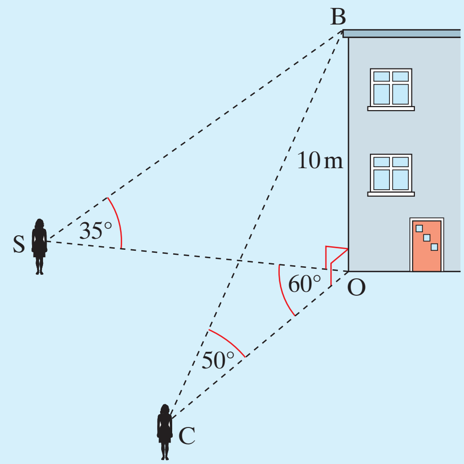
(i) Faigh, i bhfoirm surda, fad gha k_1.

(ii) Faigh achar an réigiúin scáthaithe i dtéarmaí π.



4. Tá Sorcha (S) agus Cáit (C) ina seasamh fad slí áirithe ó fhoirgneamh atá 10 m ar airde. Tomhaiseann Sorcha an uillinn airde ag barr an fhoirgnimh agus is é 35° an freagra a fhaigheann sí. Ón áit a bhfuil Cáit, is é 50° uillinn airde bharr an fhoirgnimh.

Má tá 60° san $|\angle SOC|$ idir Sorcha, Cáit agus bun an fhoirgnimh, faigh an fad idir Sorcha agus Cáit, ceart go dtí an méadar is gaire.

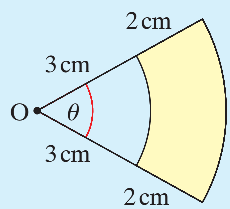


5. (i) Tarraing graf den fheidhm $y = 3 \sin 2x$ san fhearann $0° \leqslant x \leqslant 360°$. Scríobh síos peiriad agus raon na feidhme.

(ii) Ag úsáid na dtoisí a thaispeántar ar an léaráid ar dheis,

(a) faigh imlíne an réigiúin scáthaithe nuair atá $\theta = 0.8$ raidian.

(b) faigh luach θ nuair is 14 cm imlíne an réigiúin scáthaithe.



6. a, b agus c ar fad atá na sleasa ar thriantán.
Is í A an uillinn urchomhaireach leis an slios ar fad dó a

(i) Cruthaigh go bhfuil $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

(ii) Más slánuimhreacha díreach i ndiaidh a chéile iad a, b agus c, taispeáin go bhfuil

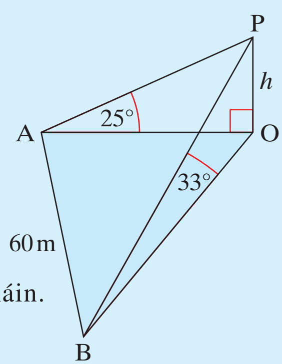
$$\cos A = \frac{a+5}{2a+4}$$

7. Sa léaráid, is pointí i bplána cothrománach iad A, B agus O agus tá P os cionn O go ceartingearach, áit a bhfuil $OP = h$ m. Tá A siar díreach de O, tá B ó dheas díreach de O agus tá $AB = 60$ m. 25° atá in uillinn airde P ó A agus 33° atá in uillinn airde P ó B.

(i) Faigh an fad [AO] i dtéarmaí h.

(ii) Faigh an fad [BO] i dtéarmaí h.

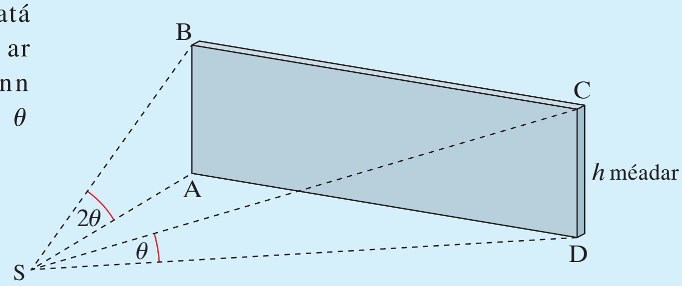
(iii) Faigh luach h, ina mhéadair, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



8. Tá balla ceartingearach ABCD, atá h méadar ar airde, ina sheasamh ar halamh chothrom. Is é 2θ uillinn airde B ón bpointe S agus is é θ uillinn airde an phointe C ó S.

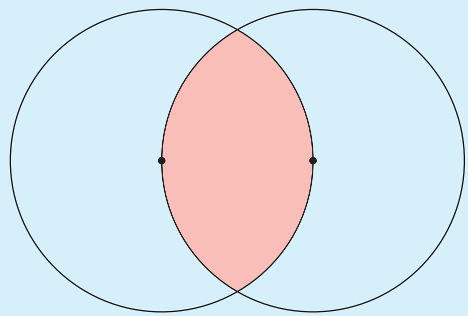
Má tá $|SD| = 5|SA|$, faigh θ ceart go dtí an chéim is gaire.

$\left[\text{Leid: } \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right]$

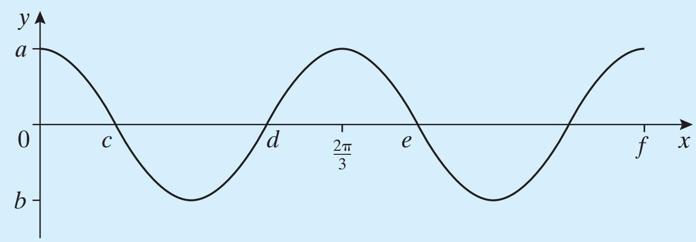


9. (i) Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\cos 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, i gcás $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

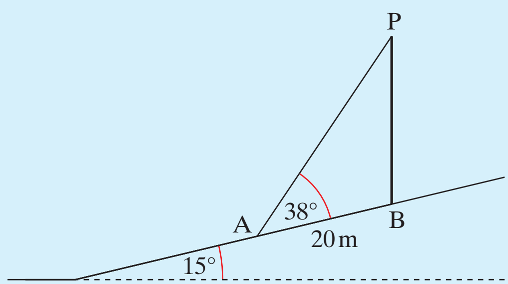
(ii) 4 cm is fad ga don dá chiorcal ar dheis. I gcás an dá chiorcal, tá a lárphointe ar imlíne an chiorcail eile. Faigh an t-achar *beacht* atá i bpáirt ag an dá chiorcal.



10. (i) Taispeántar sa léaráid thíos graf $y = 4\cos 3x$. Scríobh síos comhordanáidí na bpointí a, b, c, d, e agus f. Tabhair na huillinneacha ina raidiain.



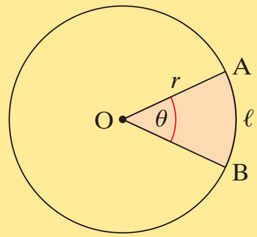
(ii) Cuirtear suas cuaille [PB] ar phíosa talún atá claonta, mar a thaispeántar. Tá an talamh claonta ar uillinn 15°. Ag pointe A ar an bhfána agus 20 méadar ó bhonn an chuaille, 38° atá in uillinn airde bharr an chuaille. Faigh airde an chuaille ina méadair, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



Achoimre ar Phríomhphointí

1. Tomhas ina raidiain

Is ionann θ agus 1 raidian amháin má bhíonn an stua AB agus an ga ar comhfhad.



$$1 \text{ raidian} = \frac{180°}{\pi}$$

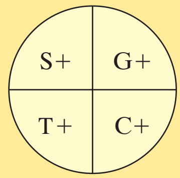
Fad an stua AB: $\ell = r\theta$

Achar na teascóige AOB: Achar $= \frac{1}{2} r^2 \theta$

2. Cóimheasa uillinneacha níos mó ná 90°

Taispeánann an léaráid na cóimheasa deimhneacha sna ceithre cheathrú.

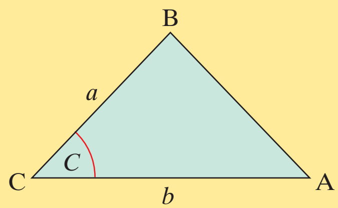
(i) Sa chéad cheathrú, gach (G) deimhneach
(ii) Sa dara ceathrú, níl ach sin (S) deimhneach
(iii) Sa tríú ceathrú, níl ach tan (T) deimhneach
(iv) Sa cheathrú ceathrú, níl ach cos (C) deimhneach.



3. Achar triantáin

Achar an triantáin ABC:

Achar $= \frac{1}{2} ab \sin C$



4. Riail an tSínis

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{nó} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

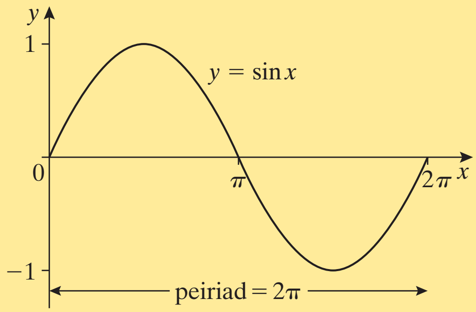
5. Riail an Chomhshínis

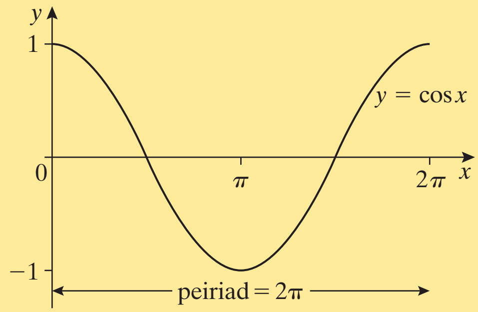
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{nó} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

6. Réiteach ginearálta ar chothromóidí triantánachta

Chun réiteach ginearálta (gach réiteach) na gcothromóidí $\sin x = k$ nó $\cos x = k$ a fháil, faigh ar dtús an dá réiteach san eatramh $0° \leqslant x \leqslant 360°$ agus ansin suimigh $n360°$ le gach ceann de na réitigh. Chun an chothromóid $\sin 3x = k$ a réiteach, faigh i dtosach an réiteach ginearálta i gcás na huillinne $3x$ agus ansin roinn an dá chuid ar 3 chun an réiteach ginearálta a fháil i gcás x.

7. Graif d'fheidhmeanna triantánachta





360° (nó 2π) an peiriad atá ag feidhm an tsínis agus ag feidhm an chomhshínis.
180° (nó π) an peiriad atá ag feidhm an tangaint.

An Chéimseata 1

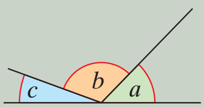
caibidil 3

Focail Thábhachtacha

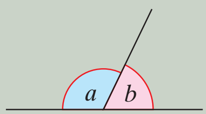
comhchosach comhshleasach comhfhreagrach ailtéarnach aicsiom teoirim coinbhéarta atoradh cóimheas trasnaí mírlíne triantáin chomhchosúla tadhlaí corda pointe tadhaill

MÍR 3.1: Uillinneacha, triantáin agus comhthreomharáin

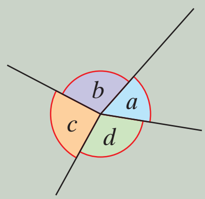
Cabhróidh na léaráidí thíos leat cuimhneamh ar roinnt de na torthaí a raibh plé agat leo nuair a bhí tú ag déanamh staidéir ar an gcéimseata cheana.



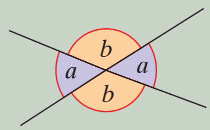
$a + b + c = 180°$
Is é 180° suim na n-uillinneacha a thadhlaíonn ag pointe ar líne dhíreach



$a + b = 180°$
Tugaimid **uillinneacha forlíontacha** ar phéire uillinneacha arb é 180° a shuim.

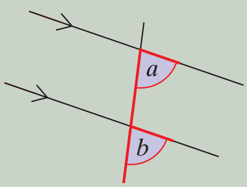


$a + b + c + d = 360°$
Is é 360° suim na n-uillinneacha a thadhlaíonn ag pointe.

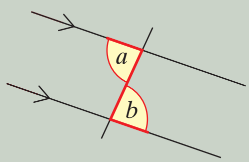


Nuair a thrasnaíonn dhá líne a chéile, ar cóimhéid a bhíonn **rinnuillinneacha urchomhaireacha**

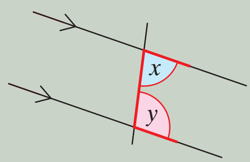
Tá na hairíonna seo a leanas ag uillinneacha a chruthaítear nuair a thrasnaíonn líne dhíreach péire línte comhthreomhara:



Ar cóimhéid a bhíonn **uillin--neacha comhfhreagracha.** Mar sin, tá $a = b$. Má lorgann tú cruth F, feicfidh tú iad.

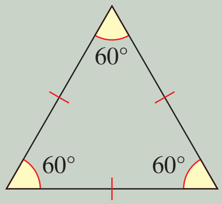


Ar cóimhéid a bhíonn **uillinneacha ailtéarnacha.** Mar sin, tá $a = b$.
Lorg cruth Z.

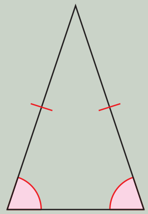


Is é 180° suim na **n-uillin--neacha inmheánacha** x agus y. $x + y = 180°$.

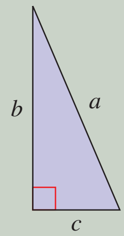
Triantáin agus a n-airíonna



Triantán comhshleasach
- na 3 shlios ar comhfhad
- na 3 uillinn inmheánacha ar cóimhéid (60°)

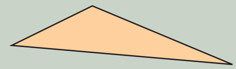


Triantán comhchosach
- dhá shlios ar comhfhad
- an dá bhonnuillinn ar cóimhéid

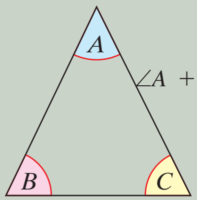


Triantán dronuilleach
- 90° atá in uillinn amháin

$a^2 = b^2 + c^2$

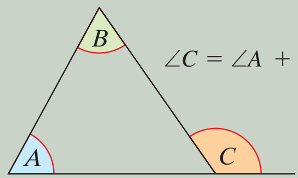


Tugaimid **triantán corrshleasach** ar thriantán nach mbíonn aon dá shlios air ar comhfhad ná aon dá uillinn ann ar cóimhéid.



$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

180° suim na n-uillinneacha i dtriantán.

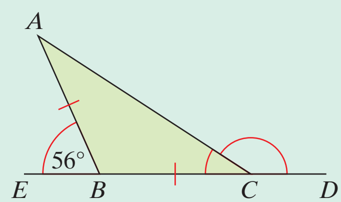


$\angle C = \angle A + \angle B$

Bíonn **uillinn sheachtrach** triantáin cothrom le suim an dá uillinn inmheánacha urchomhaireacha.

Sampla 1

Sa triantán tugtha, $|AB| = |BC|$, agus $|\angle ABE| = 56°$.
Faigh (i) $|\angle ACB|$ (ii) $|\angle ACD|$.

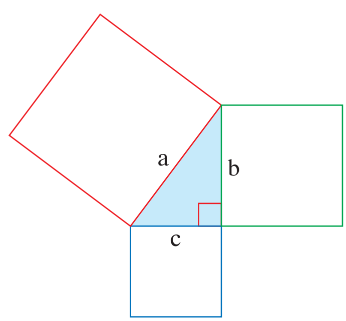


(i) $|\angle ABC| = 180° - 56° = 124°$
$|\angle BAC| = |\angle BCA|$ … triantán comhchosach
Ach $|\angle BAC| + |\angle ACB| = 180° - 124° = 56°$
$\Rightarrow \quad |\angle ACB| = 28°$

(ii) $|\angle ACB| + |\angle ACD| = 180°$ … líne dhíreach
$\Rightarrow \quad |\angle ACD| = 180° - |\angle ACB|$
$= 180° - 28°$
$\Rightarrow \quad |\angle ACD| = 152°$

Teoirim Phíotagaráis

Ba mhatamaiticeoir agus fealsamh Gréigeach é Píotagarás. Bhí sé beo sa séú céad R.C. Is dócha gurb í an teoirim ar a bhfuil a ainm, Teoirim Phíotagaráis, an teoirim is cailiúla agus is coitianta i gcúrsaí matamaitice.

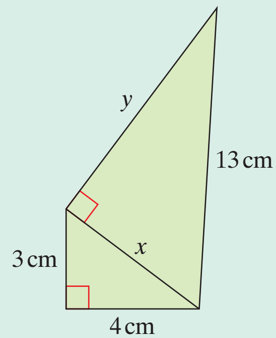


$a^2 = b^2 + c^2$

Teoirim Phíotagaráis
I dtriantán dronuilleach, bíonn achar na cearnóige ar an taobhagán cothrom le suim achair na gcearnóg ar an dá shlios eile.

Sampla 2

Ríomh na faid marcáilte le x agus y.

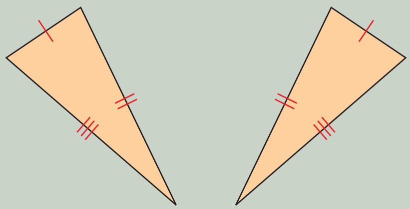


$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 \\ x &= \sqrt{25} \\ x &= 5\,\text{cm} \end{aligned}$$

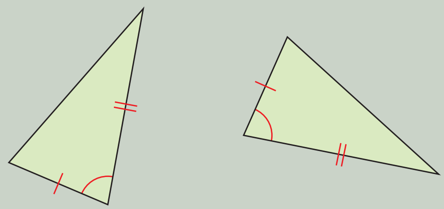
$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= 13^2 \\ y^2 + 5^2 &= 13^2 \\ y^2 + 25 &= 169 \\ y^2 &= 169 - 25 \\ y &= \sqrt{144} \\ y &= 12\,\text{cm} \end{aligned}$$

Triantáin Iomchuí

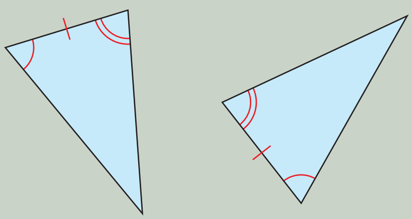
Tá triantáin iomchuí dá chéile má tá aon cheann de na coinníollacha seo fíor:



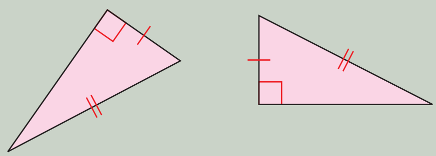
Trí shlios ar cheann amháin ar comhfhad le trí shlios ar an gceann eile (**SSS**).



Dhá shlios ar thriantán amháin díobh ar comhfhad le dhá shlios ar an gceann eile, agus an uillinn eatarthu ar cóimhéid sa dá thriantán (**SUS**).



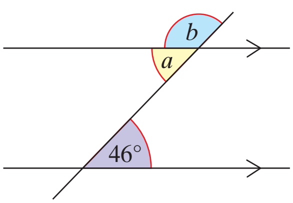
Dhá uillinn i dtriantán amháin ar cóimhéid le dhá uillinn sa triantán eile, agus an slios eatarthu ar comhfhad sa dá thriantán (**USU**).

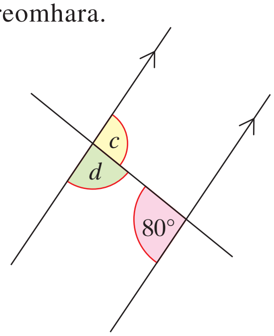


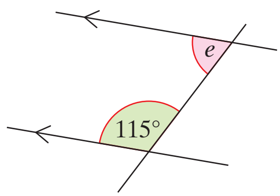
Dronuillinn sa dá thriantán, an dá thaobhagán ar comhfhad, agus slios amháin ar thriantán amháin ar comhfhad leis an slios comhfhreagrach ar an triantán eile (**DTS**).

Triailcheisteanna 3.1

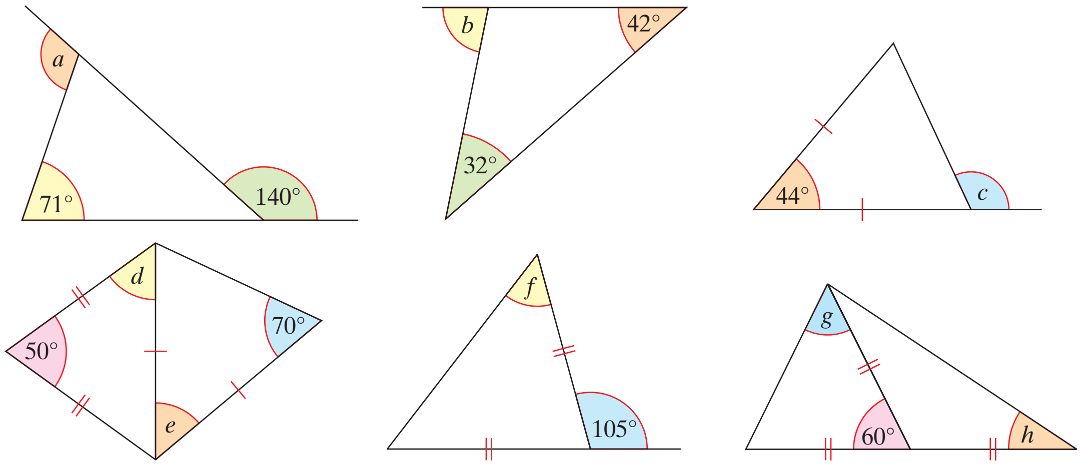
1. Scríobh síos méid na n-uillinneacha marcáilte le litreacha i ngach ceann de na léaráidí seo a leanas. Léiríonn saigheada línte comhthreomhara.



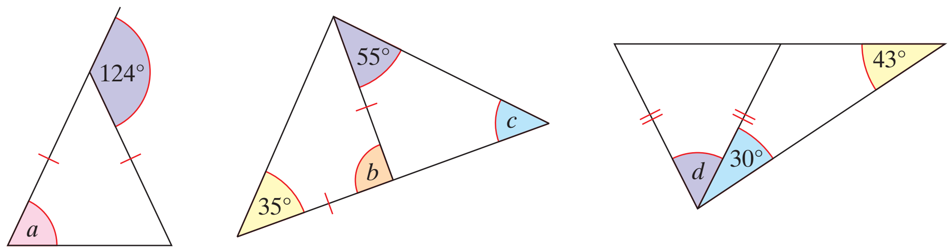




2. Faigh méid na huillinne marcáilte le litir i ngach ceann de na triantáin seo a leanas, ar a bhfuil na sleasa cothroma marcáilte:

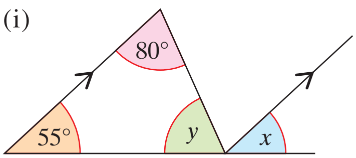


3. Faigh luachanna a, b, c agus d sna triantáin seo a leanas, ar a bhfuil na sleasa cothroma marcáilte:

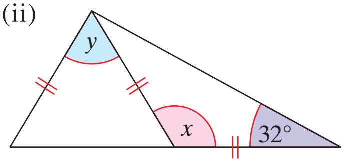


4. Faigh luach x agus luach y sna triantáin seo a leanas, áit a léiríonn saigheada línte comhthreomhara:

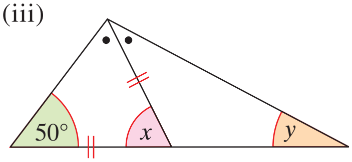
(i)



(ii)

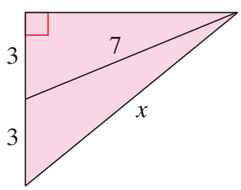


(iii)

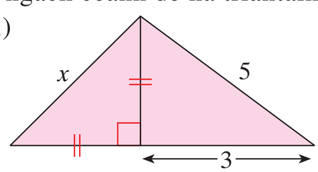


5. Faigh fad an tsleasa marcáilte le x i ngach ceann de na triantáin dhronuilleacha seo a leanas:

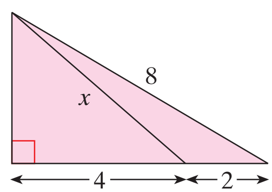
(i)



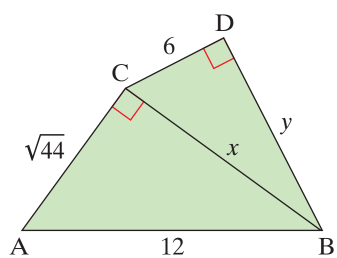
(ii)



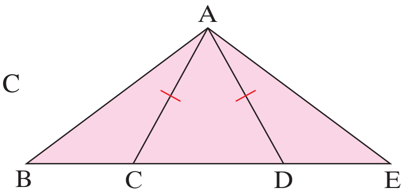
(iii)



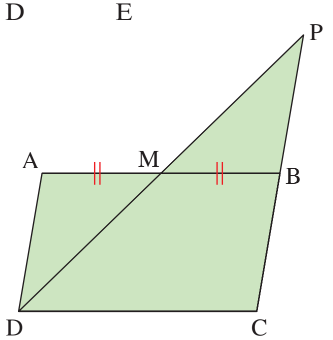
6. Sa léaráid thugtha, $|\angle ACB| = |\angle CDB| = 90°$.
Faigh faid na sleasa marcáilte le x agus y.



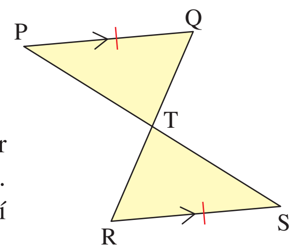
7. Sa léaráid thugtha, $|AC| = |AD|$ agus $|BD| = |CE|$.
Cruthaigh go bhfuil na triantáin ABC agus ADE iomchuí dá chéile.



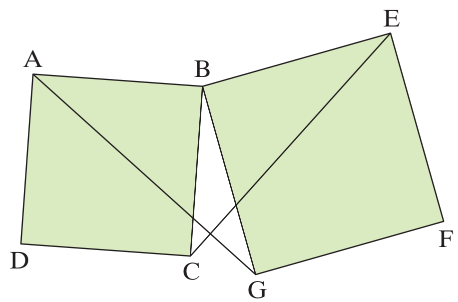
8. Is comhthreomharán é ABCD. Is é M lárphointe [AB].
Tá C, B agus P comhlíneach.
(i) Mínigh an fáth a bhfuil $|\angle DAM| = |\angle MBP|$.
(ii) Anois, taispeáin go bhfuil na triantáin AMD agus MBP iomchuí dá chéile.
(iii) Uaidh sin, taispeáin gurb é B lárphointe [CP].



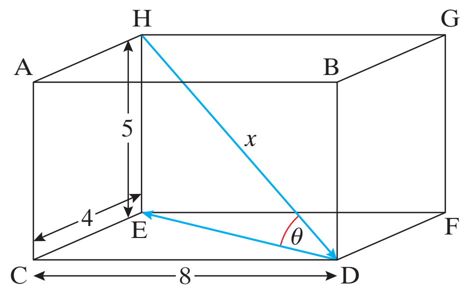
9. (i) Tá uillinneacha 90°, 50° agus 40° sa triantán ABC.
Tá uillinneacha 90°, 50° agus 40° sa triantán XYZ freisin. Níl na triantáin seo iomchuí dá chéile.
Mínigh an fáth.
(ii) Sa léaráid ar dheis, tá PQ cothrom le, agus comhthreomhar le, RS. Trasnaíonn na línte PS agus QR a chéile ag T.
Cruthaigh go bhfuil na triantáin PTQ agus STR iomchuí dá chéile.



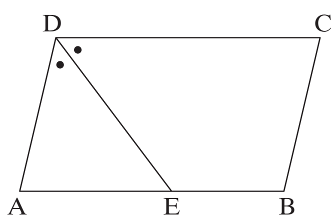
10. Is cearnóga iad ABCD agus BEFG.
(i) Mínigh an fáth a bhfuil $|\angle ABG| = |\angle CBE|$.
(ii) Taispeáin go bhfuil $|AG| = |CE|$ trína chruthú go bhfuil na triantáin ABG agus CBE iomchuí dá chéile.



11. Taispeántar imlíne solaid dhronuilleogaigh ar dheis.
$|CD| = 8$, $|CE| = 4$ agus $|HE| = 5$.
Faigh fad an trasnáin níos faide [HD], marcáilte le x.
Fág do fhreagra i bhfoirm $\sqrt{\ }$.



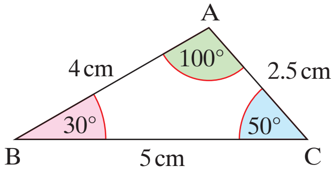
12. Déan cóip den léaráid ar dheis ina ndéroinneann DE $\angle ADC$.
Marcáil isteach uillinn eile atá cothrom le $|\angle ADE|$.
Anois cruthaigh go bhfuil $|AE| = |BC|$.



MÍR 3.2: Teoirimí a bhaineann le triantáin agus le comhthreomharáin

Uillinneacha agus sleasa

Tá an triantán ABC ar dheis tarraingthe de réir scála.



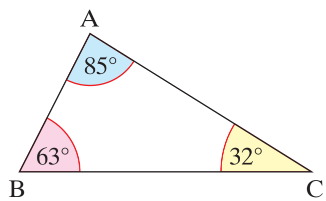
Tabhair faoi deara: urchomhaireach leis an slios is ...
(i) faide a bhíonn an uillinn is mó; (ii) ísle a bhíonn an uillinn is lú

Baineann na hairíonna seo le gach triantán agus luaitear iad sa teoirim thíos.

> **Teoirim 7**
> Cuir i gcás dhá shlios, nach bhfuil ar comhfhad, ar thriantán. An uillinn urchomhaireach leis an slios is mó, bíonn sí níos mó ná an uillinn urchomhaireach leis an slios is lú.

Tugtar cruthú na teoirime seo i Mír 3.5

I gcás an triantáin ar dheis, tugtar toisí na dtrí uillinn dúinn.

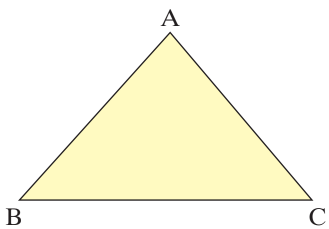


Luann coinbhéarta na teoirime seo gurb é [BC] an slios is faide mar go bhfuil sé urchomhaireach leis an uillinn is mó agus gurb é [AB] an slios is giorra mar go bhfuil sé urchomhaireach leis an uillinn is lú.

> **An coinbhéarta ar Theoirim 7**
> Cuir i gcás dhá uillinn, nach bhfuil ar cóimhéid, i dtriantán. An slios urchomhaireach leis an uillinn is mó, bíonn sé níos faide ná an slios urchomhaireach leis an uillinn is lú.

Éagothromóid triantáin

Is líne a nascann dhá phointe é an t-achar is gaire idir dhá phointe.



Mar sin $|BA| + |AC| > |BC|$

Agus ar an gcuma chéanna

$|AB| + |BC| > |AC|$

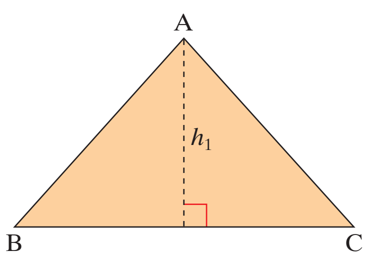
agus $|BC| + |CA| > |AB|$.

> **Teoirim 8**
> Bíonn suim fad dhá shlios ar bith ar thriantán níos mó ná fad an tríú slios.

(Cruthú i Mír 3.5)

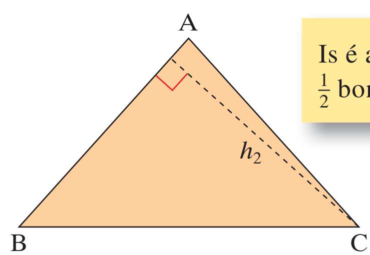
Achair triantán agus comhthreomharán

Taispeánann na léaráidí thíos dhá thriantán atá comhionann.



Achar $= \frac{1}{2}|BC| \times h_1$

I gcás an triantáin seo, is é [BC] an bonn agus is é h_1 an airde ingearach.



Achar $= \frac{1}{2}|AB| \times h_2$

I gcás an triantáin seo, is é [AB] an bonn agus is é h_2 an airde ingearach.

> Is é achar triantáin ná $\frac{1}{2}$ bonn $\times$ airde $\perp$

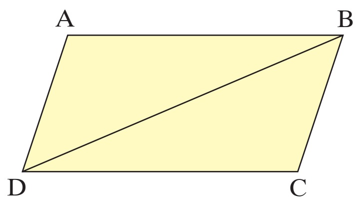
Ós rud é go bhfuil an dá thriantán comhionann, tá a n-achair cothrom lena chéile.

Fuaireamar na hachair trí bhoinn éagsúla agus trí airdí ingearacha éagsúla a úsáid.

Léiríonn sé seo teoirim thábhachtach faoi achar triantáin, mar a thaispeántar ar dheis.

Teoirim 16
I gcás triantáin, ní bhraitheann bonn iolraithe faoi airde ar rogha an bhoinn.

Achar comhthreomharáin



Taispeánann an léaráid ar dheis an comhthreomharán ABCD.

I gcomhthreomharán, bíonn na sleasa urchomhaireacha comhthreomhar agus bíonn an fad céanna acu.

Roinneann an trasnán [DB] an comhthreomharán ina dhá thriantán, ABD agus BCD.

Tá na triantáin seo iomchuí dá chéile mar go bhfuil fad na dtrí shleas ar $\triangle$ABD cothrom le fad na dtrí shleas ar $\triangle$BCD.

Ós rud é go bhfuil na triantáin iomchuí dá chéile, tá a n-achair cothrom le chéile.

Teoirim 17
Déroinneann trasnán comhthreomharáin an t-achar.

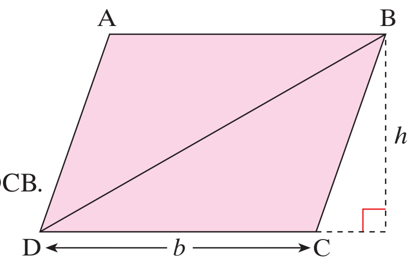
Taispeánann sé seo go ndéroinneann an trasnán DB achar an chomhthreomharáin ABCD.

I gcás an chomhthreomharáin ar dheis,

Achar $\triangle$DCB $= \frac{1}{2} \times$ bonn $\times$ airde
$= \frac{1}{2} \times |DC| \times h$
$= \frac{1}{2} b \times h$

Achar ABCD = dhá oiread achar $\triangle$DCB.

$\therefore$ Achar ABCD $= 2\left[\frac{1}{2} b \times h\right]$
$= b \times h$

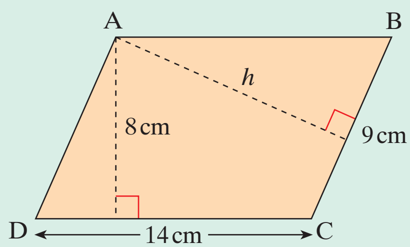


Teoirim 18
Is é achar comhthreomharáin an bonn iolraithe faoin airde ingearach.

Sampla 1

(i) Faigh achar an chomhthreomharáin ar dheis, ABCD.

(ii) Má tá $|BC| = 9$ cm, faigh an airde ingearach, h, ó A go [BC].



(i) Achar ABCD = bonn $\times$ airde ingearach
$= 14 \times 8$
$= 112\ \text{cm}^2$

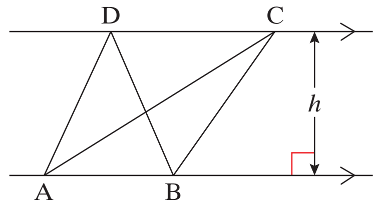
(ii) Is é $|BC| \times h$ achar ABCD freisin
$= 9\ \text{cm} \times h$
$= 9h\ \text{cm}^2$

Ach achar ABCD $= 112\ \text{cm}^2$ … ó (i) thuas

$\therefore \quad 9h = 112$

$h = \frac{112}{9} = 12\frac{4}{9}$ cm

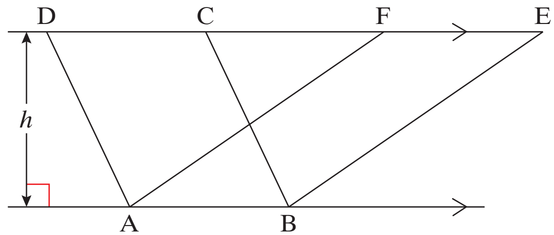
Fadhbanna lena mbaineann achar



Tá achair na dtriantán ABC agus ABD, ar dheis, cothrom le chéile mar go bhfuil an bonn céanna [AB] orthu agus go bhfuil siad idir na línte comhthreomhara céanna.

Tá achar gach triantáin cothrom le $\frac{1}{2}|AB| \times h$.

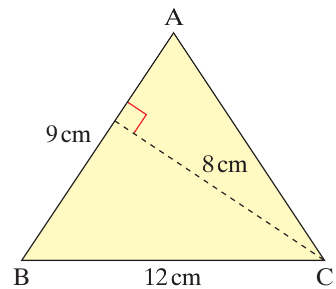
Ar an gcuma chéanna, tá achair na gcomhthreomharán ABCD agus ABEF cothrom le chéile mar go bhfuil an bonn céanna [AB] orthu agus go bhfuil siad idir na línte comhthreomhara céanna.



> Cothrom le chéile a bhíonn achair comh--threomharán (nó triantán) ar an mbonn céanna agus idir na línte comhthreomhara céanna.

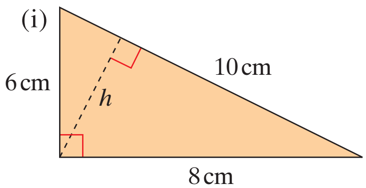
Triailcheisteanna 3.2

1. I gcás an triantáin ar dheis, tá $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm agus agus is é 8 cm an airde ingearach ó C go [AB].
Faigh (i) achar an triantáin ABC
(ii) an airde ingearach ó A go BC.

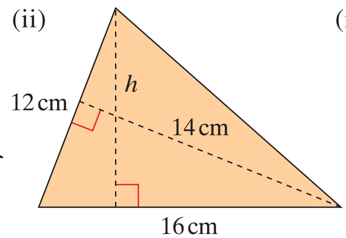


2. Faigh luach h i ngach ceann de na triantáin seo:

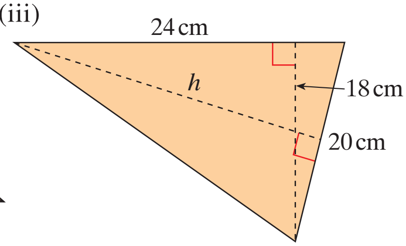
(i)



(ii)

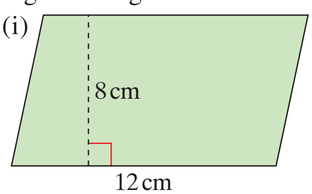


(iii)

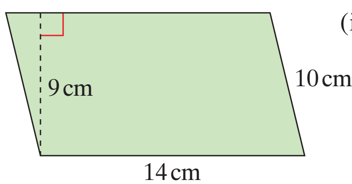


3. Faigh achar gach ceann de na comhthreomharáin seo:

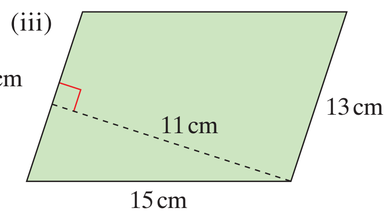
(i)



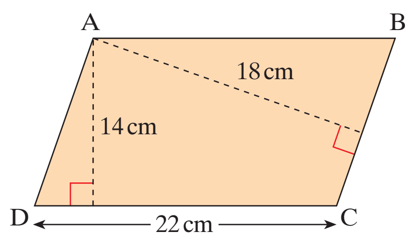
(ii)



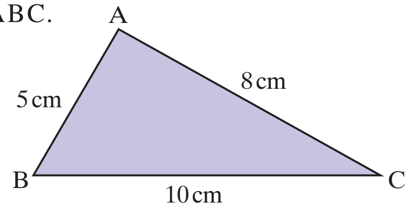
(iii)



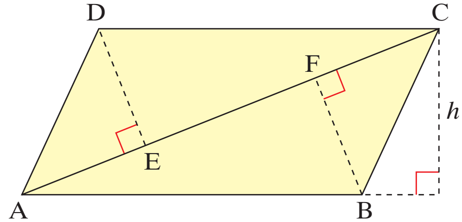
4. Faigh achar an chomhthreomharáin ar dheis, ABCD. Anois, faigh fad an tsleasa [BC].



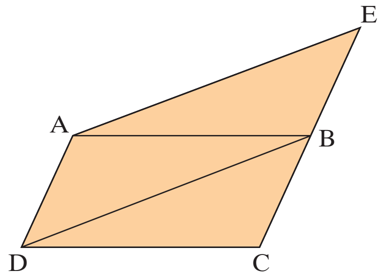
5. (i) Ainmnigh an uillinn is mó agus an uillinn is lú in $\triangle ABC$. Cuir fáthanna le do fhreagra.
   (ii) Má tá [AB] agus [BC] socraithe ag 5 cm agus 10 cm, faoi seach, cad é raon na bhfad féideartha do [AC]?



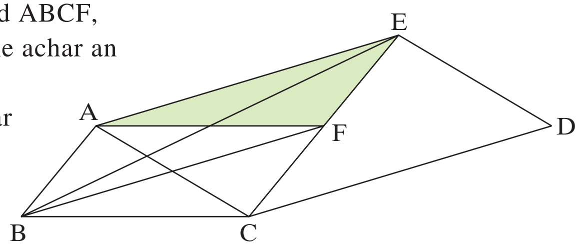
6. Sa chomhthreomharán tugtha, tá $DE \perp AC$ agus $BF \perp AC$. Is é 80 cm^2 achar ABCD.
   (i) Má tá $|AC| = 16$ cm, faigh $|DE|$.
   (ii) Mínigh an fáth a bhfuil $|DE| = |BF|$.
   (iii) Má tá $|AB| = 10$ cm, faigh fad na hairde ingearaí, h.



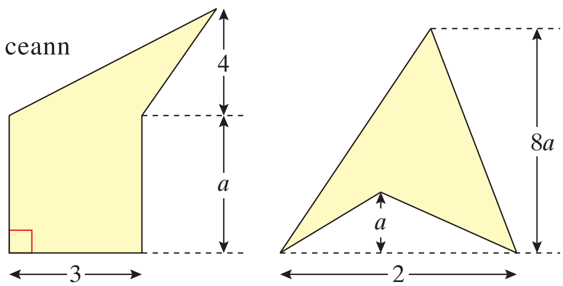
7. Is comhthreomharáin iad ABCD agus ADBE araon. Más é 15 cm^2 achar an triantáin DCB, faigh
   (i) achar an chomhthreomharáin ABCD
   (ii) achar an chomhthreomharáin ADBE
   (iii) char na fíorach ADCE
   (iv) an airde ingearach ó A go [DC], má tá $|DC| = 7.5$ cm.



8. Sa léaráid ar dheis, is comhthreomharáin iad ABCF, ABFE agus ACDE. Is é 30 aonad cearnaithe achar an triantáin AFE.
   (i) Mínigh go soiléir an fáth a bhfuil achar an triantáin AFB cothrom le 30 aonad cearnaithe freisin.
   (ii) Faigh achar na fíorach ABCDE.

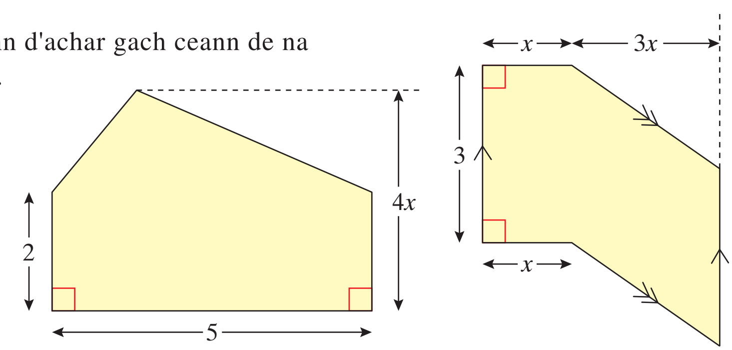


9. (i) Faigh agus simpligh slonn d'achar gach ceann de na cruthanna scáthaithe seo.
   (ii) Faigh an luach ar a a thugann an t-achar céanna don dá chruth.

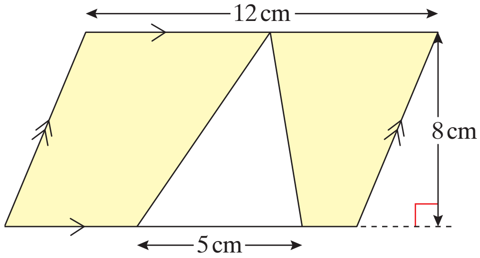


10. (i) Faigh agus simpligh slonn d'achar gach ceann de na cruthanna scáthaithe seo.
   (ii) Faigh an luach ar x a thugann an t-achar céanna don dá chruth.

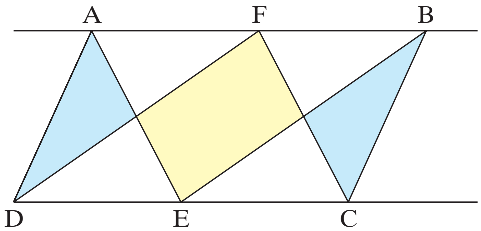
(Léiríonn saigheada línte comhthreomhara.)



11. Ríomh achar na fíorach scáthaithe thíos. Léiríonn saigheada go bhfuil na línte comhthreomhar.



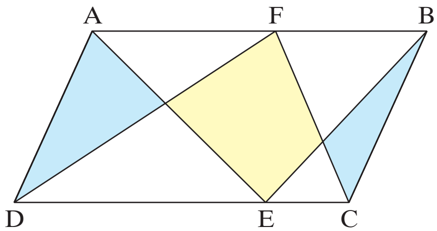
12. (i) Is comhthreomharán é ABCD.



Is é E lárphointe [DC] agus is é F lárphointe [AB].

Cruthaigh go bhfuil an t-achar atá scáthaithe i ngorm cothrom leis an achar atá scáthaithe i mbuí.

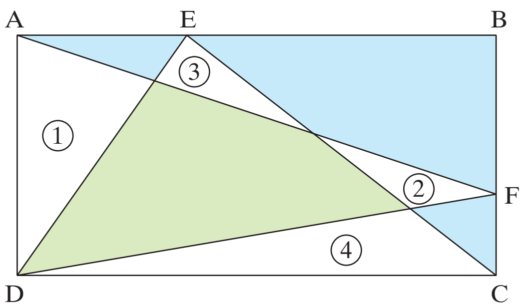
(ii) Sa chomhthreomharán seo, is pointí **ar bith** iad E agus F ar na sleasa [DC] agus [AB] faoi seach.



Ceangail EF.

Sa chás seo, cruthaigh go bhfuil an t-achar atá scáthaithe i ngorm cothrom freisin leis an achar atá scáthaithe i mbuí.

13. Is dronuilleog í ABCD. Is pointí **ar bith** iad E agus F ar na sleasa AB agus BC faoi seach.



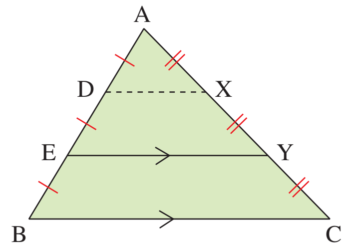
(i) Cruthaigh go bhfuil achar thriantán 1 + 2 = achar thriantán 3 + 4 .

(ii) Taispeáin go bhfuil an chuid atá scáthaithe i nglas cothrom leis an gcuid atá scáthaithe i ngorm, trí na triantáin eile a uimhriú, nó ar bhealach eile.

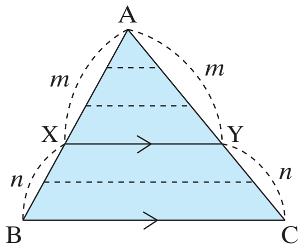
MÍR 3.3: Teoirimí cóimheasa

1. Líne atá comhthreomhar le slios triantáin

Taispeánann an léaráid ar dheis an slios [AB] den triantán agus é gearrtha ina thrí chuid chothroma.



Má tharraingítear línte trí D agus E comhthreomhar le BC, ansin gearr--faidh na pointí X agus Y an slios [AC] ina thrí chuid chothroma freisin.



Sa triantán tugtha, gearrann X an slios [AB] sa chóimheas $m : n$.

Má tá [XY] comhthreomhar le [BC], ansin gearrfaidh Y [AC] sa chóimheas $m : n$, freisin, mar a léirítear.

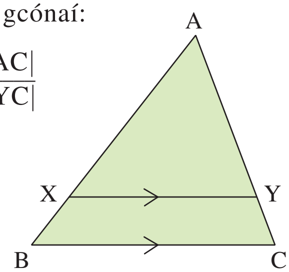
Léiríonn an léaráid thuas toradh céimseatúil atá an-tábhachtach a deir:

Teoirim 12
Líne atá comhthreomhar le slios amháin ar thriantán, gearrann sí an dá shlios eile sa chóimheas céanna.

Tugtar cruthú foirmiúil na teoirime seo i Mír 3.5. Féadtar iarraidh ort an cruthú seo a thabhairt.

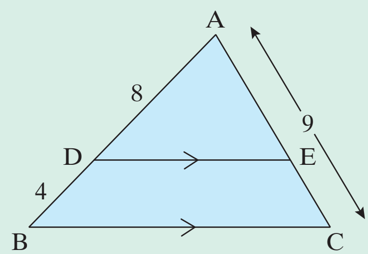
I dtriantán ina bhfuil XY || BC, bíonn na cóimheasa seo fíor i gcónaí:

(i) $\dfrac{|AX|}{|XB|} = \dfrac{|AY|}{|YC|}$ (ii) $\dfrac{|AB|}{|AX|} = \dfrac{|AC|}{|AY|}$ (iii) $\dfrac{|AB|}{|XB|} = \dfrac{|AC|}{|YC|}$



Sampla 1

Sa triantán tugtha, DE||BC.
$|AD| = 8$, $|DB| = 4$ and $|AC| = 9$.
Faigh $|AE|$



Bíodh $|AE| = x \Rightarrow |EC| = 9 - x$

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{x}{9-x} \Rightarrow 4x = 8(9-x)$$

$$\Rightarrow 4x = 72 - 8x$$

$$\Rightarrow 12x = 72$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow |AE| = 6$$

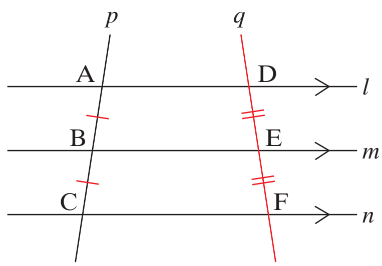
2. Trasnaithe

Sa léaráid thugtha, is línte comhthreomhara iad l, m agus n.

Trasnaithe a thugaimid ar na línte p agus q.

Don trasnaí p, $|AB| = |BC|$.

Sa chás seo, deirimid go ngearrann na línte comhthreomhara **mírlínte cothroma** ar an trasnaí.



Is trasnaí í an líne q freisin.
Is féidir a thaispeáint go bhfuil faid na mírlínte [DE] agus [EF] cothrom le chéile freisin.

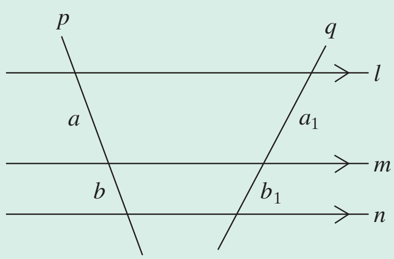
Baineann an t-airí céanna leis na trasnaithe uile eile.

Teoirim 11
Má ghearrann trí líne chomhthreomhara mírlínte cothroma ar thraslíne éigin, ansin gearrfaidh siad mírlínte cothroma ar aon traslíne eile.

Tugtar cruthú foirmiúil na teoirime seo i Mír 3.5.
Féadtar iarraidh ort an cruthú seo a thabhairt.

Sampla 2

Sa léaráid thugtha, tá na línte l, m agus n comhthreomhar.



Gearrann na trí líne seo an trasnaí p sa chóimheas $a : b$.

Gearrann na trí líne an trasnaí q sa chóimheas $a_1 : b_1$.

Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}$.

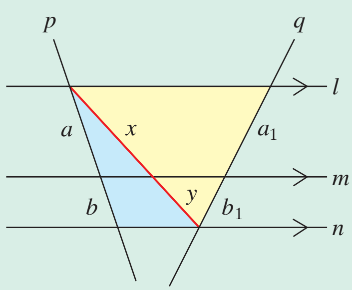
Tarraing trasnaí eile (i ndúch dearg).

Bíodh an trasnaí seo gearrtha sa chóimheas $x : y$.

Sa triantán gorm, tá an líne m comhthreomhar leis an mbonn n.

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Sa triantán buí, tá an líne m comhthreomhar leis an mbonn l.



$$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{y}$$

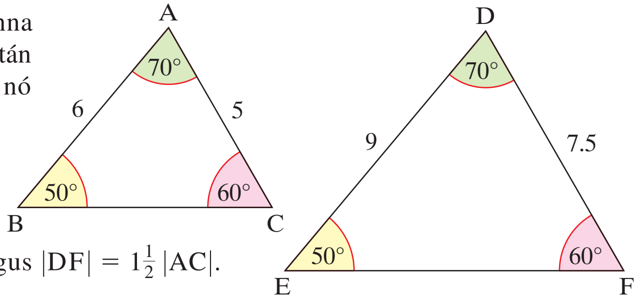
$$\Rightarrow \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \ldots$$

Má tá $\dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{8}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8}$

3. Triantáin chomhchosúla

Tá uilleannacha cothroma ag na triantáin ABC agus DEF a léirítear thíos.



Tabhair faoi deara go bhfuil na cruthanna céanna ar na triantáin ach go bhfuil méideanna na dtriantán difriúil. Deirimid gur triantáin **chomhchosúla** nó triantáin **chomhuilleacha** iad na triantáin seo.

Deirimid gurb iad na sleasa [AB] agus [DE] na **sleasa comhfhreagracha**, mar go bhfuil an dá shlios sin urchomhaireach leis an uillinn 60°.

Tabhair faoi deara go bhfuil $|DE| = 1\frac{1}{2}|AB|$ agus $|DF| = 1\frac{1}{2}|AC|$.

Ar an gcuma chéanna, tá $|EF| = 1\frac{1}{2}|BC|$.

Léiríonn sé seo go bhfuil $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

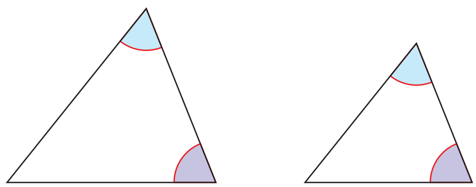
Tugtar an toradh tábhachtach seo do thriantáin chomhchosúla sa teoirim thíos.

Teoirim 13
Má tá dhá thriantán ABC agus DEF comhchosúil, ansin tá a gcuid sleasa i gcomhréir, in ord

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$$

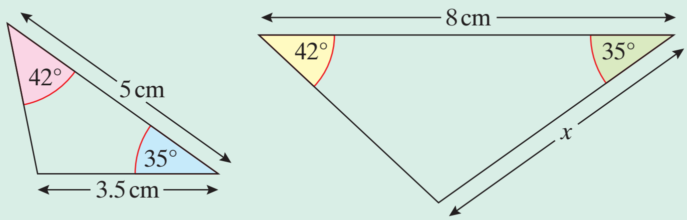
Tugtar cruthú foirmiúil na teoirime seo i Mír 3.5.
Féadtar iarraidh ort an cruthú seo a thabhairt.

Nóta Bíonn dhá thriantán comhchosúil má bhíonn dhá uillinn i dtriantán amháin cothrom le dhá uillinn sa dara triantán. Caithfidh na huillinneacha eile a bheith cothrom.



Sampla 3

Faigh fad an tsleasa marcáilte le x sa triantán thíos.



Bíonn sleasa comhfhreagracha urchomhaireach le huillinneacha cothroma.
Na huillinneacha gan mharc, tá siad cothrom lena chéile.
Is sleasa comhfhreagracha iad na sleasa a bhfuil fad x agus fad 3.5 cm iontu.

$$\frac{x}{3.5} = \frac{8}{5}$$

$\Rightarrow \quad 5x = 8\,(3.5)$

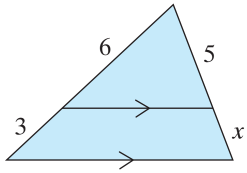
$\Rightarrow \quad 5x = 28$

$\Rightarrow \quad x = 5.6\,\text{cm}$

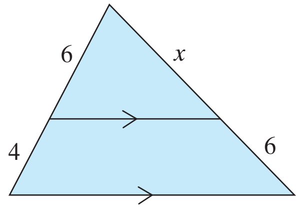
Triailcheisteanna 3.3

1. I ngach ceann de na triantáin seo a leanas, léiríonn na saigheada go bhfuil na línte comhthreomhar. Faigh fad na mírlíne marcáilte le x i ngach triantán:

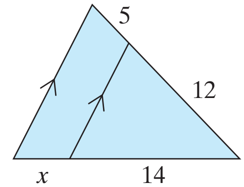
(i)



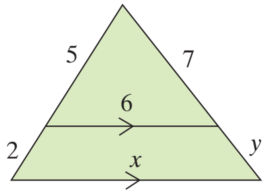
(ii)

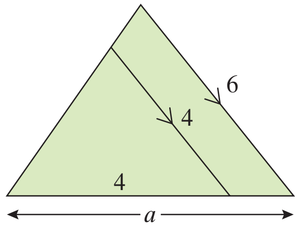


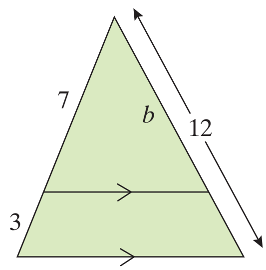
(iii)



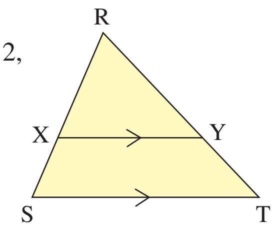
2. Sna triantáin seo a leanas, léiríonn na saigheada go bhfuil na línte comhthreomhar. Faigh fad na mírlíne marcáilte le litir i ngach triantán:



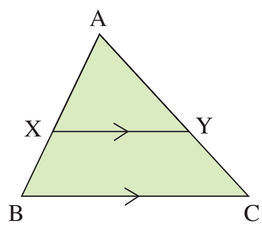




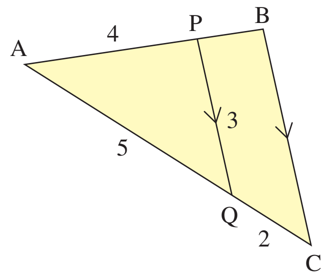
3. Sa triantán tugtha, XY||ST.
Má tá |XS| = 5, |YT| = 6 agus |RS| = 12, faigh |RT|.



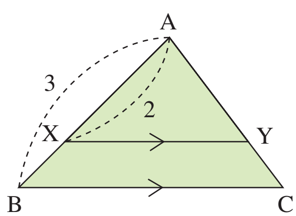
4. Sa triantán tugtha, XY||BC.
Má tá |AB| = 5, |BX| = 2 agus |AC| = 8, faigh |AY|.



5. Sa triantán tugtha, PQ||BC.
Faigh |BC| agus |BP|.

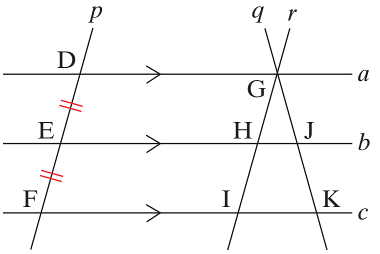


6. Sa triantán tugtha, XY||BC.
|AB| : |AX| = 3 : 2.
(i) Má tá |YC| = 10 cm, faigh |AY|.
(ii) Cad é an cóimheas |XY| : |BC|?
(iii) Má tá |BC| = 30 cm, faigh |XY|.

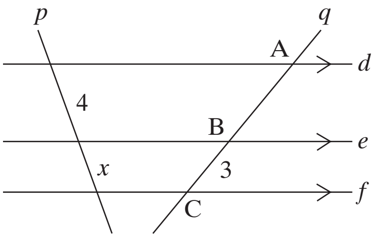


7. Is línte comhthreomhara iad a, b agus c.
Is trí thrasnaí iad p, q agus r. Trasnaíonn siad a, b agus c.
$|DE| = |EF|$, $|GH| = 8$ cm and $|JK| = 7$ cm.

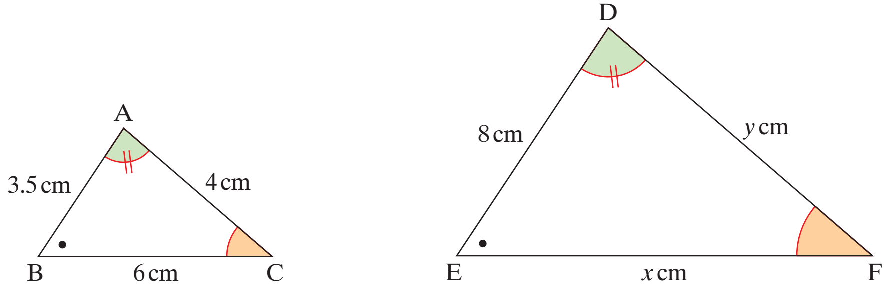
Faigh (i) $|HI|$ (ii) $|GJ|$.



8. Is línte comhthreomhara iad d, e agus f.
Is dhá thrasnaí iad p agus q.
Tá an trasnaí p roinnte sa chóimheas $4 : x$.
Faigh, i dtéarmaí x, fad na mírlíne [AB].

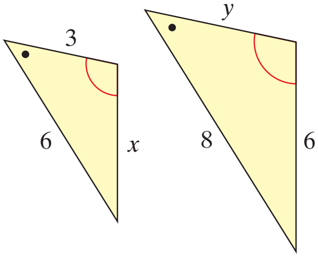


9.

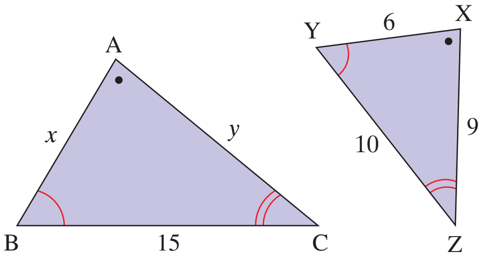


(i) Mínigh an fáth a bhfuil na triantáin ABC agus DEF comhchosúil.
(ii) Cé acu sleas den triantán DEF a chomhfhreagraíonn don sleas [AC]?
(iii) Faigh luach x agus luach y.

10. Faigh luach x agus luach y sna triantáin chomhchosúla ar dheis..



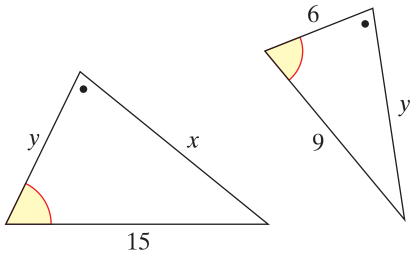
11. Tá na triantáin ABC agus XYZ comhchosúil.



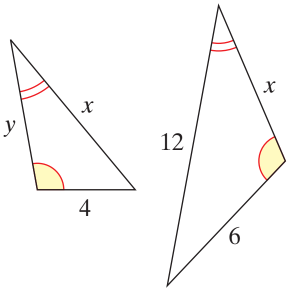
(i) Cé acu sleas den triantán XYZ a chomhfhreagraíonn don sleas [AB]?
Mínigh do fhreagra.
(ii) Faigh luach x agus luach y.

12. Tugtar dhá phéire triantán comhchosúil thíos.
Tá na huillinneacha cothroma marcáilte.
Faigh luach x agus luach y i gcás gach péire díobh.

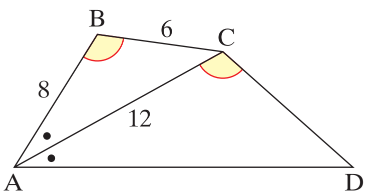
(i)



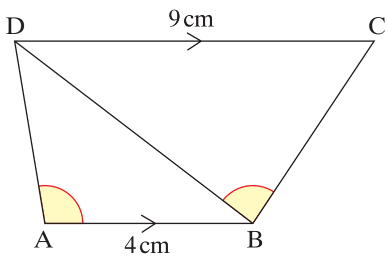
(ii)



13. Sa léaráid thugtha, déroinneann an trasnán [AC] an uillinn BAD.
$|\angle ABC| = |\angle ACD|$.
Faigh (i) $|CD|$
(ii) $|AD|$.

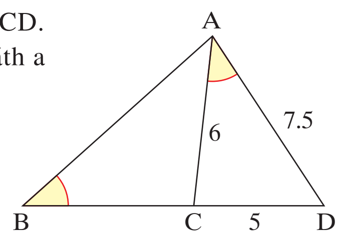


14. Is ceathairshleasán é ABCD ina bhfuil AB||DC agus $|\angle DAB| = |\angle DBC|$.

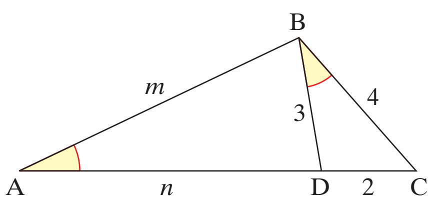


(i) Cruthaigh go bhfuil na triantáin DAB agus DBC comhchosúil.
(ii) Má tá $|AB| = 4$ cm agus $|DC| = 9$ cm, ríomh $|BD|$.

15. Tarraing léaráidí ar leith de na triantáin ABD agus ACD.
Marcáil na huillinneacha cothroma agus mínigh an fáth a bhfuil an dá thriantán comhchosúil.
Uaidh sin, faigh $|BD|$ agus $|AB|$.

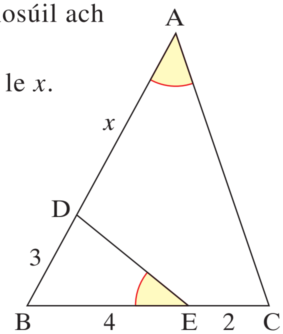


16. Sa léaráid thugtha, $|\angle BAD| = |\angle CBD|$.

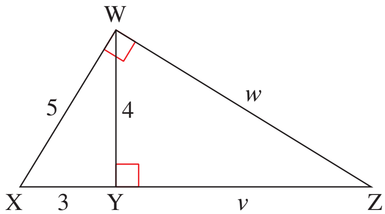


(i) Ainmnigh dhá thriantán chomhchosúla. (ii) Uaidh sin, faigh luach m agus luach n.

17. Tá na triantáin ABC agus BED comhchosúil ach níl DE comhthreomhar le AC.
Oibrigh amach fad an tsleasa marcáilte le x.

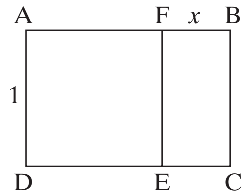


18. Sa léaráid thugtha, $|\angle WYZ| = |\angle XWZ| = 90°$.



(i) Cé acu triantán atá comhchosúil leis an triantán WXY?
(ii) Uaidh sin, faigh luach v agus luach w.

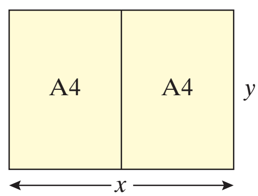
19. Gearrtar cearnóg ón dronuilleog ABCD. Fágtar dronuilleog BCEF. Tá an dronuilleog BCEF comhchosúil le ABCD. Faigh x. Uaidh sin, scríobh síos an cóimheas idir shleasa na dronuilleoige ABCD. Bíodh x ceart go dtí trí ionad dheachúlacha.



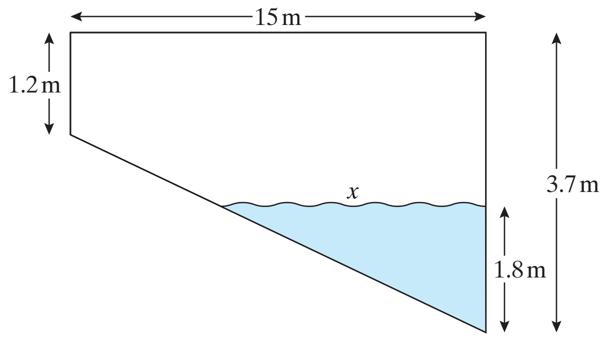
Tugtar an Dronuilleog Órga ar ABCD. Is cruth tábhachtach é i gcúrsaí ailtireachta.

20. Is féidir bileog pháipéir A3 a ghearradh chun dhá bhileog A4 a dhéanamh. Tá na bileoga A3 agus A4 comhchosúil ó thaobh na matamaitice de.

Faigh an cóimheas: $\left(\dfrac{\text{slios fada na bileoige A3}}{\text{slios fada na bileoige A4}}\right)$ $\left[\text{is é sin, } \dfrac{x}{y}\right]$

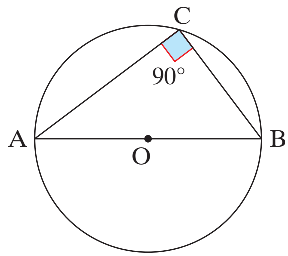


21. Taispeánann an léaráid taobh-amharc de linn snámha á líonadh le huisce.
Ríomh fad x.



MÍR 3.4: Teoirimí i dtaobh an chiorcail

Sa mhír seo, féachfaimid ar chéimseata an chiorcail agus féachfaimid ar roinnt de na torthaí matamaitice ar a dtugtar **teoirimí i dtaobh an chiorcail**.

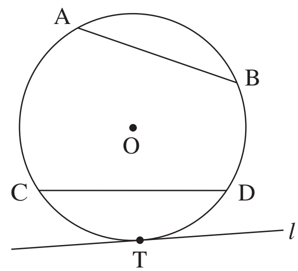


D'fhoghlaim tú cheana féin gur dronuillinn í an uillinn i leathchiorcal.

Sa chiorcal tugtha, $|\angle ACB| = 90°$.

Tadhlaithe agus cordaí

Is tadhlaí le ciorcal í líne dhíreach nach mbuaileann leis an gciorcal ach ag aon phointe amháin.



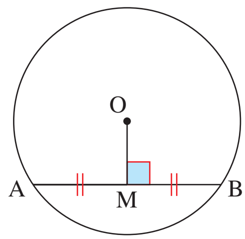
Sa léaráid thugtha, is tadhlaí í ℓ leis an gciorcal.

Tugtar an **pointe tadhaill** ar T.

Is **cordaí** iad [AB] agus [CD].

Sa léaráid thugtha, tá [OM[ingearach leis an gcorda [AB].

$|AM| = |MB|$.



Teoirim 21
An t-ingear ó lárphointe ciorcail go dtí an corda, déroinneann sé an corda.

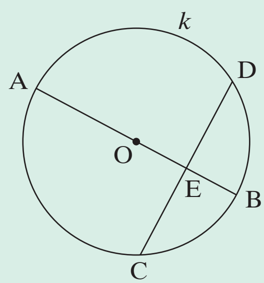
Tugtar cruthú foirmiúil na teoirime seo i Mír 3.5.

Sampla 1

Tá trastomhas 20 cm sa chiorcal k.

$AB \perp CD$ agus $|CD| = 16$ cm.

Faigh $|EB|$.

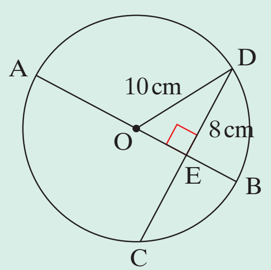


Tá an trastomhas [AB] ingearach leis an gcorda [CD].

$$\Rightarrow \quad |CE| = |ED| = 8\text{ cm}$$
$$|OD| = 10\text{ cm} = ga$$

Tá $\triangle ODE$ dronuilleach.

$$\Rightarrow \quad 10^2 = 8^2 + |OE|^2$$
$$\Rightarrow \quad 100 = 64 + |OE|^2$$
$$\Rightarrow \quad |OE|^2 = 36$$
$$\Rightarrow \quad |OE| = 6\text{ cm}$$
$$\Rightarrow \quad |EB| = (10 - 6)\text{ cm}$$
$$\Rightarrow \quad |EB| = 4\text{ cm}$$

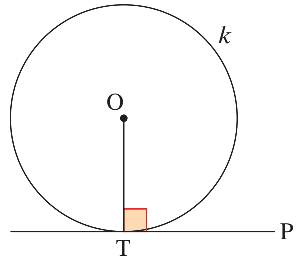


Taispeánann an léaráid thíos tadhlaí PT leis an gciorcal k.

Tá lárphointe O ag an gciorcal k. Is é T an pointe tadhaill. Is ga é [OT].

$OT \perp TP$

Taispeánann an léaráid seo go bhfuil 90° san uillinn idir tadhlaí agus ga. Tugtar an toradh seo sa teoirim thíos:

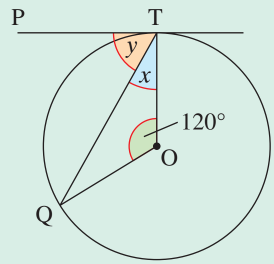


Teoirim 20

1. Bíonn gach tadhlaí ingearach leis an nga a théann go dtí an pointe tadhaill.
2. Má bhíonn pointe T ar an gciorcal k agus má bhíonn an líne TP ingearach leis an nga go dtí T, is tadhlaí le k í TP.

Sampla 2

Sa léaráid thugtha, is tadhlaí leis an gciorcal í PT.
Is ga í [OT].
Má tá $|\angle TOQ| = 120°$, faigh tomhais na n-uillinneacha marcáilte le x agus y.



Is triantán comhchosach é OTQ mar go bhfuil $|OT| = |OQ| =$ ga

$\therefore \quad |\angle OTQ| = |\angle OQT| = x$

$\therefore \quad 2x = 180° - 120°$

$= 60$

$x = 30°$

Ó tá $OT \perp PT \Rightarrow |\angle OTP| = 90°$

$\therefore \quad x + y = 90°$

$30 + y = 90° \quad \ldots x = 30°$

$y = 90° - 30°$

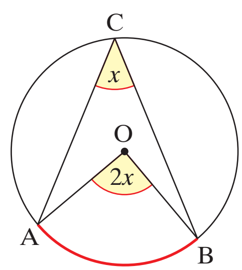
$y = 60°$

Uillinneacha i gciorcail

Taispeánann an léaráid ar dheis an $\angle$AOB ag lár an chiorcail agus an $\angle$ ag imlíne an chiorcail. Seasann an dá uillinn ar an stua AB.

De réir teoirim thábhachtach i dtaobh an chiorcail

Is ionann tomhas na huillinne i lár ciorcail agus dhá oiread thomhas na huillinne ag an imlíne.

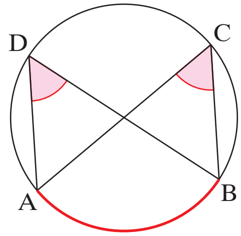


$|\angle AOB| = 2|\angle ACB|$

Tá dhá atoradh thábhachtacha ar an teoirim sin thuas:

Atoradh 1

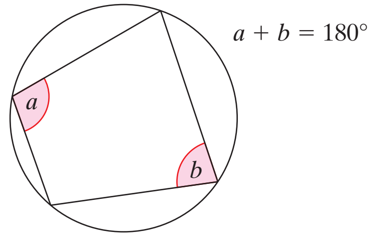
Ar cóimhéid a bhíonn uillinneacha ag an imlíne ach iad a bheith ina seasamh ar an stua céanna.



$|\angle ACB| = |\angle ADB|$

Atoradh 2

Is é 180º suim na n-uillinneacha urchomhair-
-eacha i gceatharshleasán comhchiorclach.

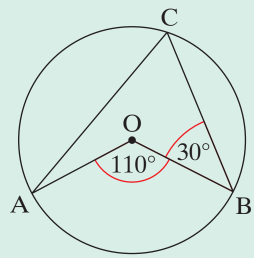


Is éard is **atoradh** ann ná ráiteas a bhaineann le teoirim a cruthaíodh, agus a leanann go follasach uaidh.

Sampla 3

Sa léaráid thugtha, is é O lárphointe an chiorcail,
$|\angle AOB| = 110°$ agus $|\angle OBC| = 30°$.

Faigh (i) $|\angle ACB|$ (ii) $|\angle OAC|$.



(i) $|\angle AOB| = 2|\angle ACB|$... Is ionann tomhas na huillinne ag lár ciorcail agus dhá oiread thomhas na huillinne ag an imlíne.

$\Rightarrow \quad 110° = 2|\angle ACB|$

$\Rightarrow \quad |\angle ACB| = \frac{1}{2}(110°) = 55°$

(ii) Chun $|\angle OAC|$ a fháil, ceangail CO, mar a léirítear.

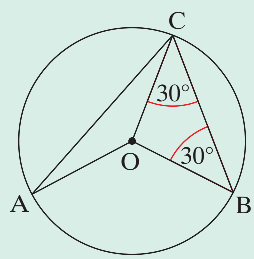
$|\angle OBC| = |\angle OCB| = 30°$... $|OB| = |OC| = ga$

$|\angle ACB| = 55°$ ... ó (i) thuas

$\Rightarrow \quad |\angle OCA| = 55° - 30°$, i.e., $25°$

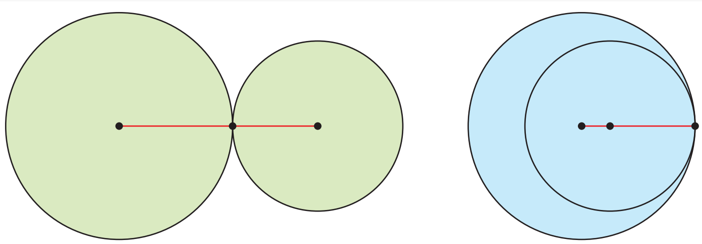
Ach $|\angle OAC| = |\angle OCA|$, ó tá $|OA| = |OC| = ga$.

$\Rightarrow \quad |\angle OAC| = 25°$.



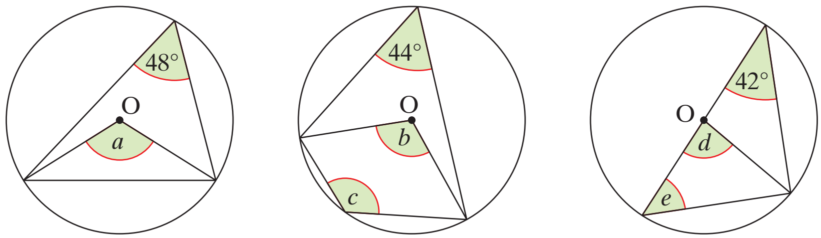
Atoradh 6

Mura dtadhlaíonn dhá chiorcal ach ag aon phointe amháin, ansin bíonn an dá lárphointe agus an pointe tadhaill comhlíneach.

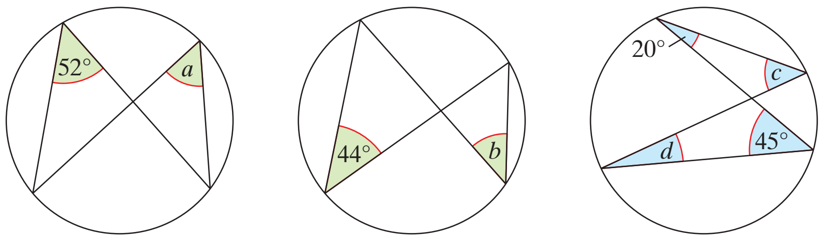


Triailcheisteanna 3.4

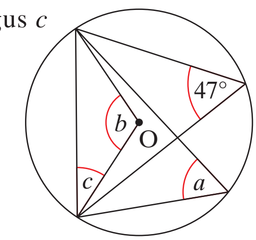
1. Faigh méid na huillinne atá marcáilte le litir i ngach ceann de na ciorcail seo a leanas. Is é O an lárphointe.



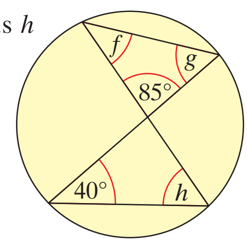
2. Faigh méid na huillinne atá marcáilte le litir i ngach ceann de na ciorcail seo:



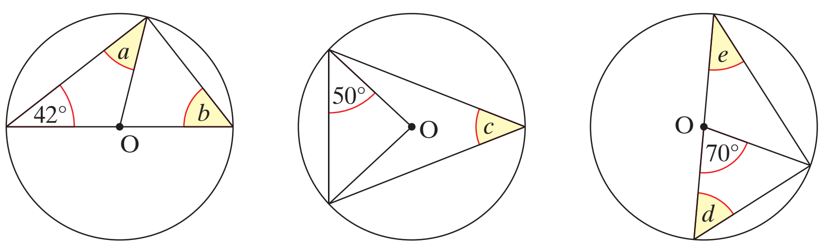
3. Faigh méideanna na n-uillinneacha atá marcáilte le a, b agus c sa léaráid thugtha. Is é O lárphointe an chiorcail. Mínigh do fhreagra i ngach cás.



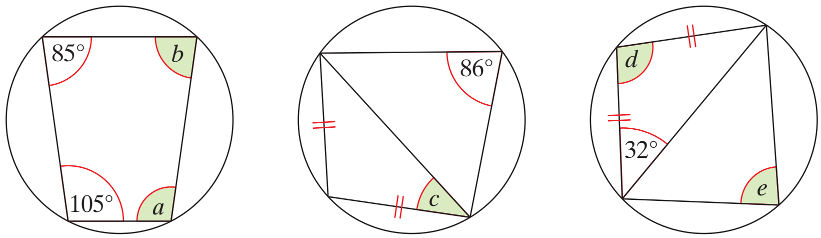
4. Faigh méideanna na n-uillinneacha atá marcáilte le f, g agus h sa léaráid thugtha.



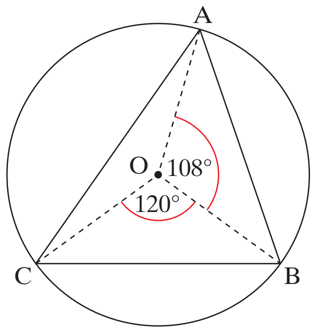
5. Faigh méideanna na n-uillinneacha atá marcáilte le litir sna ciorcail seo a leanas. Is é O an lárphointe.



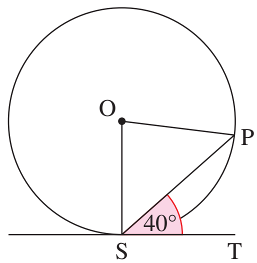
6. Faigh méideanna na n-uillinneacha atá marcáilte le litir sna ciorcail seo a leanas. Mírlínte atá ar cóimhéid, tá siad marcáilte.



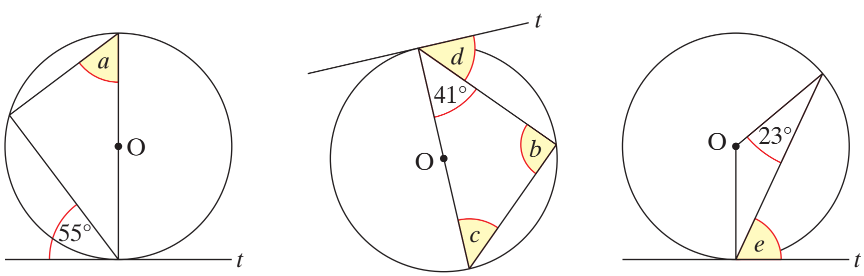
7. Sa léaráid thugtha, is é O lár an chiorcail. Faigh méideanna na dtrí uillinn inmheánacha sa triantán ABC. Mínigh do chuid freagraí.



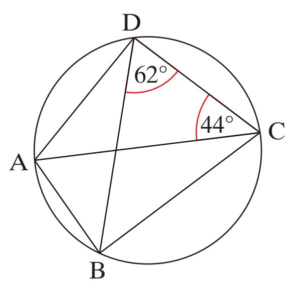
8. Is tadhlaí í ST leis an gciorcal tugtha.
Is é O an lárphointe.
Má tá $|\angle PST| = 40°$, faigh
(i) $|\angle OST|$
(ii) $|\angle OSP|$
(iii) $|\angle OPS|$
(iv) $|\angle SOP|$



9. Is é O lárphointe na gciorcal tugtha. Is tadhlaí í *t* i ngach cás.
Oibrigh amach méideanna na n-uillinneacha atá marcáilte le litir.

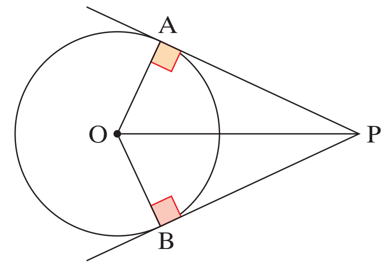


10. Sa léaráid thugtha, $|\angle BDC| = 62°$ agus $|\angle DCA| = 44°$.
Faigh (i) $|\angle BAC|$
(ii) $|\angle ABD|$.

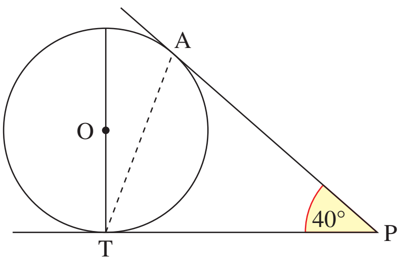


11. Sa léaráid thugtha, is é O lárphointe an chiorcail.
Is tadhlaithe iad PA agus PB leis an gciorcal.
(i) Cruthaigh go bhfuil na triantáin AOP agus BOP iomchuí dá chéile.
(ii) Uaidh sin, taispeáin go bhfuil $|PA| = |PB|$.
(iii) Cruthaigh go bhfuil $|\angle APB| + |\angle AOB| = 180°$.

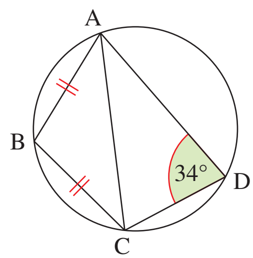
Ar cóimhéid a bhíonn faid dhá thrasnaí ó phointe go ciorcal.



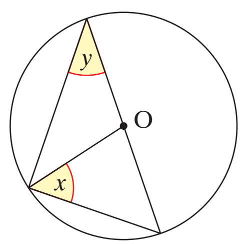
12. Sa léaráid thugtha, is tadhlaithe iad PA agus PT leis an gciorcal ar lárphointe dó O.
Má tá $|\angle APT| = 40°$, faigh $|\angle ATO|$.



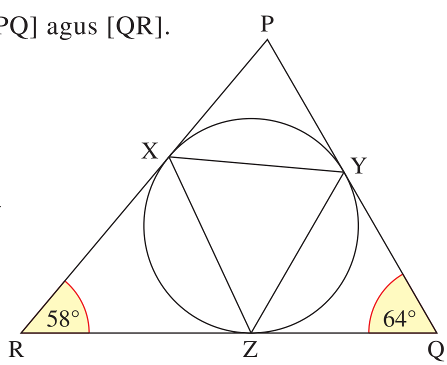
13. Sa chiorcal tugtha, tá $|AB| = |BC|$ agus $|\angle ADC| = 34°$.
Faigh (i) $|\angle ABC|$
(ii) $|\angle BAC|$.



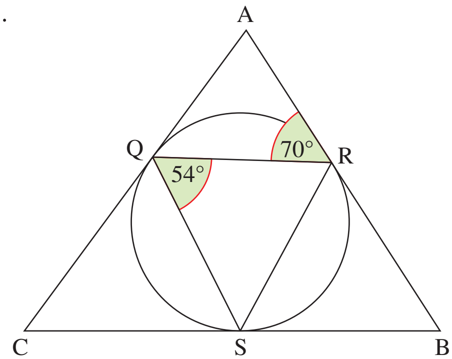
14. Sa léaráid thugtha, is é O lárphointe an chiorcail.
Cruthaigh go bhfuil $x + y = 90°$.



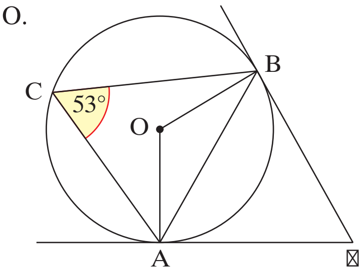
15. Is tadhlaithe leis an gciorcal tugtha iad [RP], [PQ] agus [QR].
Is iad X, Y agus Z na pointí tadhaill.
$|\angle PRQ| = 58°$ agus $|\angle PQR| = 64°$.
(i) Ainmnigh trí thriantán chomhchosacha.
(ii) Faigh $|\angle PXY|$.
(iii) Anois, faigh méideanna na n-uillinneacha inmheánacha sa triantán XYZ.



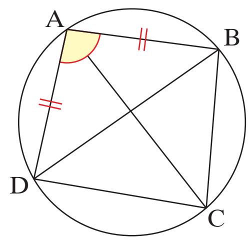
16. Tá an ciorcal tugtha inscríofa sa triantán ABC.
Is iad Q, R agus S na pointí tadhaill.
$|\angle ARQ| = 70°$ agus $|\angle RQS| = 54°$.
Faigh $|\angle ACB|$.



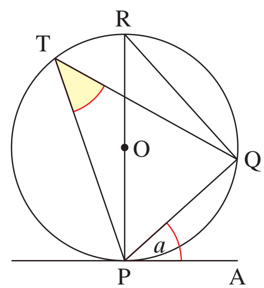
17. Is triantán é ABC atá inscríofa i gciorcal ar lárphointe dó O.
Is tadhlaithe leis an gciorcal iad TA agus TB.
Má tá $|\angle ACB| = 53°$, faigh
(i) $|\angle AOB|$
(ii) $|\angle BTA|$
(iii) $|\angle ABT|$.



18. San fhíor ar dheis, tá $|AB| = |AD|$ agus $|\angle DAB| = 84°$.
(i) Faigh $|\angle DBA|$
(ii) Faigh $|\angle BCA|$.



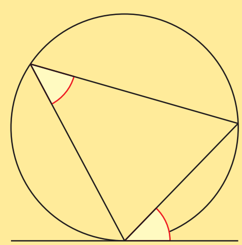
19. Sa chiorcal tugtha ar lárphointe dó O, is tadhlaí í [PA] agus is trastomhas den chiorcal í [PR].
$|\angle APQ| = a°$. Chun a chruthú go bhfuil $|\angle APQ| = |\angle PTQ|$,
cóipeáil agus líon isteach na línte seo a leanas:



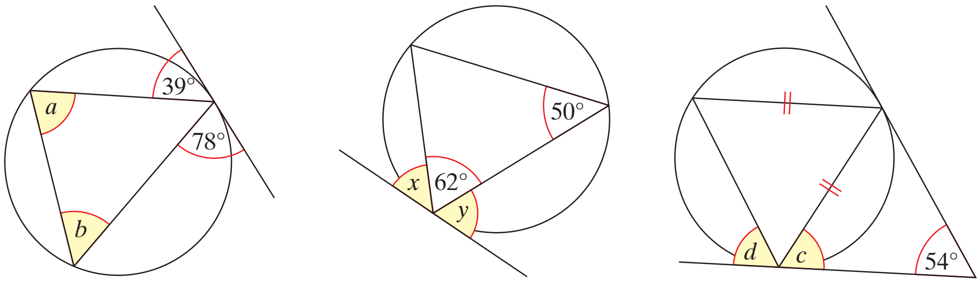
$|\angle PQR| = 90°$, mar …
$\Rightarrow$ $|\angle PRQ| + |\angle RPQ| = 90°$, mar …
$|\angle QPA| + |\angle RPQ| = 90°$, mar …
$\Rightarrow$ $|\angle PRQ| + |\angle RPQ| = |\angle QPA| + |\angle RPQ|$
$\Rightarrow$ $|\angle PRQ| = |\angle QPA|$,
Ach $|\angle PRQ| = |\angle PTQ|$, mar …
$\Rightarrow$ $|\angle QPA| = |\angle PTQ|$, mar a iarradh.

An toradh a fuaireamar i gCeist **19** thuas, cruthaíonn sé teoirim an-tábhachtach i dtaobh an chiorcail, teoirim a thugtar thíos:

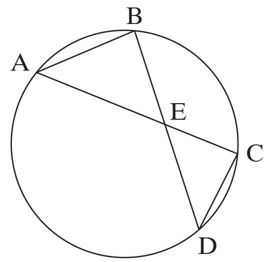
An uillinn idir tadhlaí agus corda tríd an bpointe tadhaill, bíonn sí ar cóimhéid leis an uillinn a iompraíonn an corda sin sa teascán ailtéarnach.



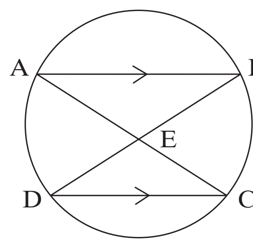
20. Faigh méid na huillinne atá marcáilte le litir i ngach ceann de na ciorcail seo a leanas:



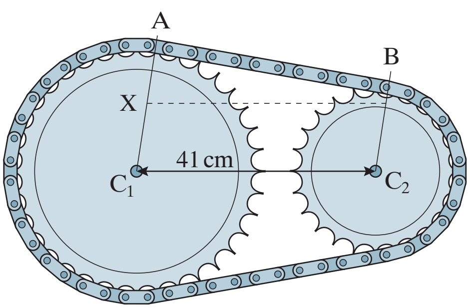
21. Sa chiorcal tugtha, trasnaíonn na cordaí [AC] agus [BD] a chéile ag an bpointe E.
Cruthaigh go bhfuil na triantáin ABE agus ECD comhchosúil le chéile.



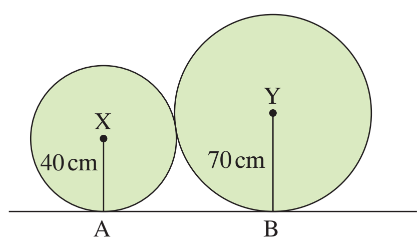
22. (i) Sa léaráid thugtha, AB||DC.
Cruthaigh gur triantán comhchosach é AEB.
(ii) Dá dtarraingeofaí an léaráid arís sa chaoi is gurbh é E lárphointe an chiorcail agus go mbeadh AB fós comhthreomhar le DC, cé acu ceann de na ráitis seo a leanas nach mbeadh fíor i gcónaí?
(a) $|AB| = |DC|$
(b) Is triantán comhshleasach é ABE
(c) Tá na triantáin AEB agus EDC comhchosúil lena chéile.



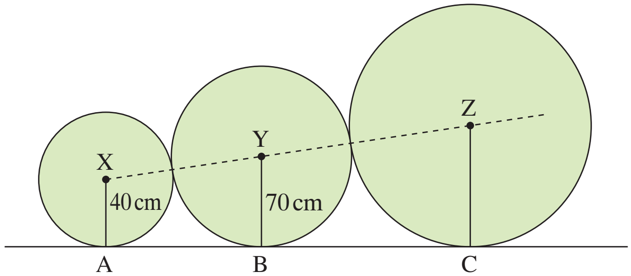
23. Luíonn slabhra go teann thar dhá roth fhiaclacha, a bhfuil ga 19 cm agus 12 cm acu, mar a léirítear sa léaráid. Má tá láir na gciorcal 41 cm ó chéile, faigh fad na coda dírí den slabhra, [AB]. (Seans go mbeadh an líne bhriste, comhthreomhar le $[C_1C_2]$, úsáideach.



24. (i) Luíonn dhá sféar ar dhromchla comhréidh. Teagmhaíonn siad, mar a léirítear. Is é 40 cm ga an sféir is lú. Is é 70 cm ga an sféir is mó. Faigh an fad $|AB|$, fad na líne idir phointí teagmhála na sféar leis an dromchla comhréidh.



(ii) Cuirtear an tríú sféar in aice leis an dá sféar a bhí againn i gcuid (i).



Le cinntiú go bhfuil na trí lár comhlíneach, faigh $|ZC|$, fad gha an tríú sféar, ceart go dtí an cm is gaire.

MÍR 3.5: Teoirimí a chruthú go foirmiúil

Aicsiom a thugtar ar ráiteas a nglactar leis gan chruthúnas. Sampla d'aicsiom: 180° suim na n-uillinneacha i líne dhíreach.

Teoirim a thugtar ar ráiteas a gcruthaítear go bhfuil sé fíor trí aicsiomaí agus argóint loighciúil a úsáid.

Cruthaítear torthaí céimseatan nó **teoirimí** ar mhodh foirmiúil nó struchtúrtha; úsáidtear torthaí agus aicsiomaí seanbhunaithe chun na céimeanna a thógtar a mhíniú. Ba é Eoiclídéas, matamaiticeoir Gréagach a bhí beo thart ar 300 R.C., a d'úsáid an modh seo den chéad uair chun torthaí céimseatan a chruthú.

Is iomaí teoirim a bhfuil cruthúnas (= cruthú) uirthi sa leabhar *Stoicheia* (focal Gréigise a chiallaíonn 'uraiceacht' nó 'bunleabhar'), leabhar mórchlú le hEoiclídéas. Sa lá atá inniu ann, breis agus 2000 bliain níos déanaí, úsáidimid cur chuige Eoiclídéas fós chun fadhbanna céimseatan a réiteach.

Sa mhír seo, tugtar cruthúnais fhoirmiúla ar na teoirimí atá ar do chúrsa.

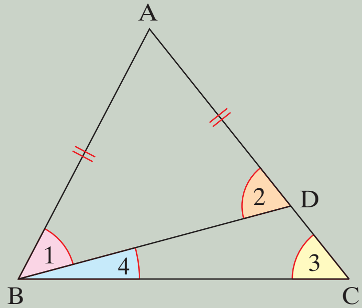
Tá na huimhreacha céanna ar na teoirimí anseo agus atá orthu sa siollabas oifigiúil.

Tharlódh go n-iarrfaí ort cruthúnais theoirimí **11**, **12** agus **13** (agus iad seo amháin) a thabhairt.

Tá réiltín (*) in aice leis na teoirimí seo.

Aithneoidh tú torthaí na dteoirimí seo ó na míreanna eile sa chaibidil seo. Na fadhbanna éagsúla céimseatan a réitigh tú cheana, úsáideadh na torthaí a bhunaítear sna teoirimí seo chun iad a réiteach.

Teoirim 7 Bíonn an uillinn urchomhaireach leis an slios is mó de dhá shlios, níos mó ná an uillinn urchomhaireach leis an slios is lú.



Tugtha: An triantán ABC ar a bhfuil $|AC| > |AB|$

Le Cruthú: $|\angle ABC| > |\angle ACB|$.

Tógáil: Roghnaigh an pointe D ar [AC] sa chaoi is go bhfuil $|AD| = |AB|$. Ceangail BD. Ainmnigh na huillinneacha 1, 2, 3 agus 4, mar a léirítear.

An Cruthú:

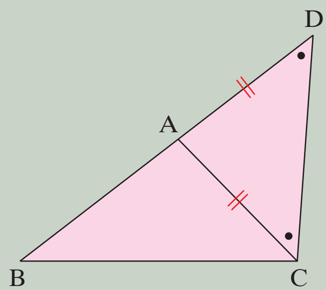
$|\angle 1| = |\angle 2|$ …triantán comhchosach
$|\angle 2| > |\angle 3|$ …uillinn sheachtrach > uillinn inmheánach
$\Rightarrow \quad |\angle 1| > |\angle 3|$
$\Rightarrow \quad |\angle 1| + |\angle 4| > |\angle 3|$
$\Rightarrow \quad |\angle ABC| > |\angle ACB|$

Teoirim 8 Suim na bhfad in dhá shlios ar bith ar thriantán, is mó í ná fad an tríú slios.

Tugtha: An triantán ABC

Le Cruthú: $|BA| + |AC| > |BC|$

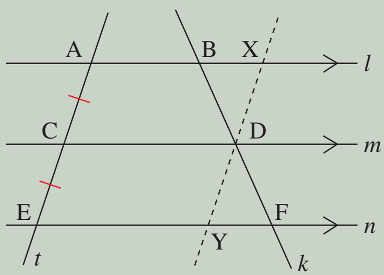
Tógáil: Lean BA go D sa chaoi is go mbeidh $|AD| = |AC|$. Ceangail DC.



An Cruthú:

$|\angle ACD| = |\angle ADC|$ …($|AD| = |AC|$)
Ach $|\angle BCD| > |\angle ACD|$
$\Rightarrow \quad |\angle BCD| > |\angle ADC|$
I gcás an triantáin BCD, $|BD| > |BC|$ …an slios urchomhaireach leis an uillinn is mó
But $|BD| = |BA| + |AC|$
$\Rightarrow \quad |BA| + |AC| > |BC|$.

***Teoirim 11** Má ghearrann trí líne chomhthreomhara mírlínte ar comhfhad ar thrasnaí, gearrfaidh siad mírlínte ar comhfhad ar thrasnaí ar bith eile.



Tugtha: Trí líne chomhthreomhara, l, m agus n a ghearrann an trasnaí t ag na pointí A, C agus E sa chaoi is go bhfuil $|AC| = |CE|$. Gearrann trasnaí eile, k , na línte ag B, D agus F.

Le Cruthú: $|BD| = |DF|$.

Tógáil: Tarraing líne trí D atá comhthreomhar le t agus a ghearrann l ag X agus n ag Y.

An Cruthú: Is comhthreomharáin iad ACDX agus CEYD.

$\Rightarrow \quad |AC| = |XD|$ agus $|CE| = |DY|$ …sleasa urchomhaireacha

Ach $\quad |AC| = |CE|$.

$\Rightarrow \quad |XD| = |DY|$

I gcás na dtriantán BDX agus YDF,

$|XD| = |DY|$

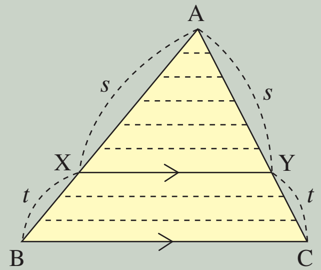
$|\angle BDX| = |\angle YDF|$ …rinnuillinneacha urchomhaireacha

$|\angle DBX| = |\angle DFY|$ …uillinneacha ailtéarnacha

$\Rightarrow$ tá na triantáin BDX agus YDF iomchuí dá chéile

$\Rightarrow \quad |BD| = |DF|$ …sleasa comhfhreagracha

***Teoirim 12** Bíodh ABC ina thriantán. Más líne í XY atá comhthreomhar le BC agus a ghearrann AB sa chomhréir $s:t$, ansin gearrann sí [AC] sa chóimheas céanna.



Tugtha: An triantán ABC; tá XY comhthreomhar le BC.

Le Cruthú: $\dfrac{|AX|}{|XB|} = \dfrac{|AY|}{|YC|}$

Tógáil: Roinn [AX] ina s cuid chothrom agus [XB] ina t cuid chothrom. Tarraing líne comhthreomhar le BC trí gach pointe den roinnt sin.

An Cruthú: Gearrann na línte comhthreomhara idirlínte ar comhfhad ar feadh na líne [AC].

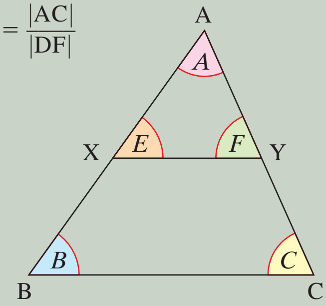
$\therefore$ roinntear [AY] ina $s$idirlíne chothrom agus roinntear YC ina t idirlíne chothrom

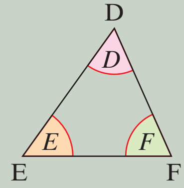
$\therefore \quad \dfrac{|AY|}{|YC|} = \dfrac{s}{t}$

Ach $\dfrac{|AX|}{|XB|} = \dfrac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|AX|}{|XB|} = \dfrac{|AY|}{|YC|}$

***Teoirim 13** Má tá dhá thriantán ABC agus DEF comhchosúil lena chéile, tá a sleasa i gcomhréir le chéile in ord:

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$$





Tugtha: Na triantáin ABC agus DEF, ina bhfuil

$|\angle A| = |\angle D|, |\angle B| = |\angle E|$ agus $|\angle C| = |\angle F|$.

Le Cruthú: $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$.

Tógáil: Marcáil an pointe X ar [AB] sa chaoi is go mbeidh $|AX| = |DE|$.
Marcáil an pointe Y ar [AC] sa chaoi is go mbeidh $|AY| = |DF|$.
Ceangail XY.

An Cruthú: Tá na triantáin AXY agus DEF iomchuí dá chéile …(SUS)

$\therefore \quad |\angle AXY| = |\angle DEF|$ …uillinneacha comhfhreagracha

$\therefore \quad |\angle AXY| = |\angle ABC|$

$\therefore \quad XY \| BC$

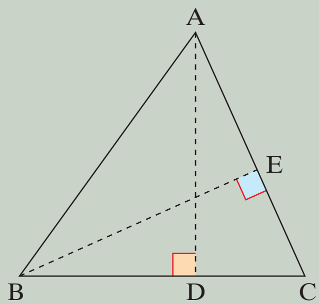
$\therefore \quad \dfrac{|AB|}{|AX|} = \dfrac{|AC|}{|AY|}$ …líne a bhíonn comhthreomhar le slios, roinneann sí an slios eile sa chóimheas céanna

$\therefore \quad \dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$

Ar an gcaoi chéanna, is féidir a chruthú go bhfuil $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|}$

$\therefore \quad \dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$.

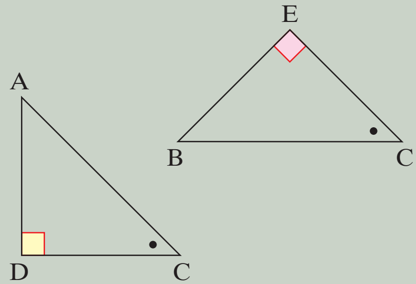
Teoirim 16 I gcás triantáin, ní bhraitheann bonn iolraithe faoin airde ingearach ar rogha an bhoinn.



Tugtha: An triantán ABC ar a bhfuil $AD \perp BC$ agus $BE \perp AC$.

Le Cruthú: $|BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BE|$.

An Cruthú: I gcás na dtriantán ADC agus BEC, $|\angle ADC| = |\angle BEC| = 90°$
Tá $\angle ACD$ i bpáirt ag an dá thriantán



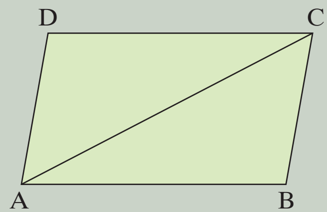
$\Rightarrow \quad |\angle CAD| = |\angle EBC|$
$\Rightarrow$ tá na triantáin ADC agus BEC comhchosúil le chéile
Ó tá na sleasa comhfhreagracha sa chóimheas céanna,

$$\Rightarrow \quad \frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\Rightarrow \quad |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BE|.$$

Teoirim 17 Dé-roinneann trasnán achar an chomhthreomharáin.

Tugtha: An comhthreomharán ABCD agus an trasnán [AC]

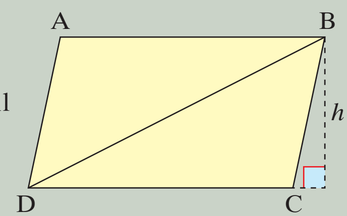


Le Cruthú: Dé-roinneann an trasnán [AC] achar ABCD.

An Cruthú: I gcás na dtriantán ABC agus ADC,
$|AB| = |DC|$ …sleasa urchomhaireacha
$|BC| = |AD|$ …sleasa urchomhaireacha
$|AC| = |AC|$
$\therefore$ tá na triantáin ABC agus ADC iomchuí dá chéile …(SSS)
$\therefore$ achar $\triangle ABC$ = achar $\triangle ADC$
$\therefore$ dé-roinneann an trasnán [AC] achar ABCD.

Teoirim 18 Is é achar comhthreomharáin an bonn iolraithe faoin airde.

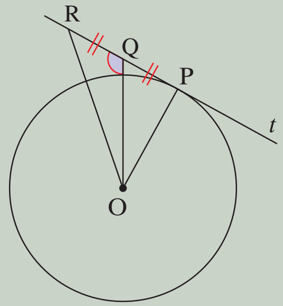
Tugtha: An comhthreomharán ABCD a bhfuil airde ingearach h.



Le Cruthú: Achar ABCD $= |DC| \times h$.

An Cruthú: Achar $\triangle BCD = \frac{1}{2}$ base $\times$ perpendicular height
$= \frac{1}{2}|DC| \times h$
Achar $\triangle ABD$ = area of $\triangle BCD$ …dé-roinneann trasnán achar comhthreomharáin
$\Rightarrow$ Achar ABCD $= 2\left[\frac{1}{2}|DC| \times h\right]$
Achar ABCD $= |DC| \times h$

Teoirim 20 Bíonn gach tadhlaí ingearach leis an nga a théann go dtí an pointe tadhaill.



Tugtha: Tadhlaí t leis an gciorcal ar lárphointe dó O. Is é P pointe tadhaill an tadhlaí leis an gciorcal. Is é [OP] an ga go dtí an pointe tadhaill.

Le Cruthú: $OP \perp t$

Tógáil: Tadhlaíodh an t-ingear leis an tadhlaí, ón lárphointe O, leis an tadhlaí ag Q. Roghnaigh pointe eile, R, ar t sa chaoi is go bhfuil $|PQ| = |QR|$. Ceangail OQ agus OR.

An Cruthú: I gcás na dtriantán OPQ agus OQR

$|OQ| = |OQ|$ …slios i bpáirt acu

$|PQ| = |QR|$ …tugtha

$|\angle OQP| = |\angle OQR|$ …90° an dá cheann

$\therefore$ tá na triantáin OPQ agus OQR iomchuí dá chéile

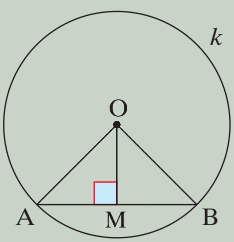
$\therefore$ $|OR| = |OP|$ …is taobhagáin iad an dá cheann

Mar sin is pointe eile é R ag a dtadhlaíonn t leis an gciorcal.
Bréagnaíonn sé seo an fhíric thugtha gur tadhlaí í t.
Mar sin, caithfidh t bheith ingearach le [OP], i.e. $OP \perp t$.

Nóta: Is sampla é an cruthú thuas de chruthú trí bhréagnú.

Teoirim 21 An t-ingear ó lárphointe ciorcail go dtí corda, dé-roinneann sé an corda.

Tugtha: Ciorcal k le lárphointe O agus corda [AB].
$OM \perp AB$.



Le Cruthú: $|AM| = |MB|$

Tógáil: Ceangail OA agus OB.

An Cruthú: I gcás na dtriantán AOM agus BOM,

$|OA| = |OB| =$ ga

$|OM| = |OM|$ …slios i bpáirt acu

$|\angle OMA| = |\angle OMB|$ …90° an dá cheann

$\therefore$ tá na triantáin AOM agus BOM iomchuí …(DTS)

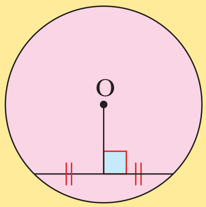
$\therefore$ $|AM| = |MB|$.

Súil siar – ceisteanna

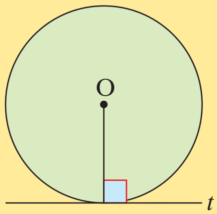
Na ceisteanna uile ar an gcéimseata shintéiseach, tugtar le chéile iad ag críoch Chaibidil 6, Céimseata 2: Méaduithe agus Tógálacha.

Achoimre ar Phríomhphointí

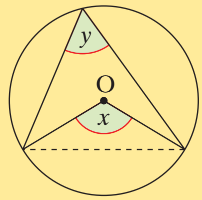
1. Airíonna an chiorcail



An t-ingear ó lárphointe ciorcail go dtí corda, dé-roinneann sé an corda.

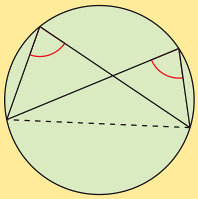


Bíonn gach tadhlaí ingearach leis an nga a théann go dtí an pointe tadhaill.

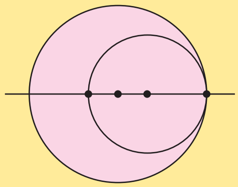


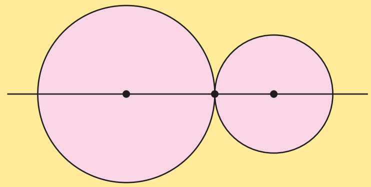
$x = 2y$

Is ionann tomhas na huillinne i lár ciorcail agus dhá oiread thomhas na huillinne ag an imlíne.



Ar cóimhéid a bhíonn uillinneacha sa teascán céanna de chiorcal.

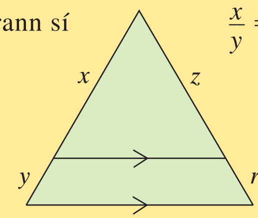




Mura dtadhlaíonn dhá chiorcal ach ag aon phointe amháin, ansin bíonn an dá lárphointe agus an pointe tadhaill comhlíneach.

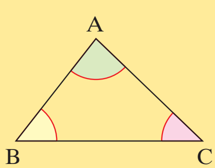
2. Triantáin agus comhthreomharáin

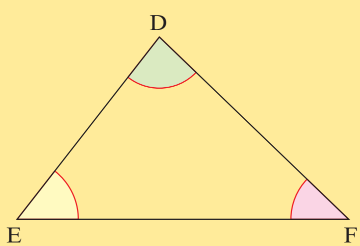
1. Suim na bhfad in dhá shlios ar bith ar thriantán, is mó í ná fad an tríú slios.
2. Bíonn an uillinn urchomhaireach leis an slios is mó de dhá shlios níos mó ná an uillinn urchomhaireach leis an slios is lú den dá shlios.
3. I gcás triantáin, ní bhraitheann bonn iolraithe faoi airde ar rogha an bhoinn.
4. Dé-roinneann trasnán achar an chomhthreomharáin.
5. Is é achar comhthreomharáin an bonn iolraithe faoin airde ingearach.
6. Má ghearrann trí líne chomhthreomhara mírlínte cothroma ar thraslíne éigin, ansin gearrfaidh siad mírlínte cothroma ar aon traslíne eile.
7. Líne atá comhthreomhar le slios amháin ar thriantán, gearrann sí an dá shlios eile sa chóimheas céanna.



$$\frac{x}{y} = \frac{z}{r}$$

8.





Má tá dhá thriantán ABC agus DEF comhchosúil, ansin tá a gcuid sleasa i gcomhréir, in ord

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

An Chéimseata Chomhordanáideach: An Ciorcal

caibidil 4

Focail Thábhachtacha

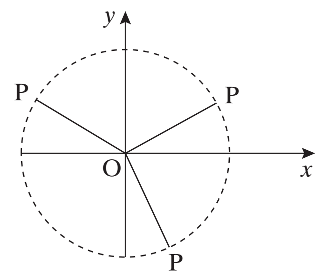
lárphointe ga tadhlaí corda ingearach comhthreomhar pointe trasnaithe comhchorda pointe tadhaill inmheánach seachtrach comhthadhlaí

MÍR 4.1: Cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (0, 0)

Sainmhíniú

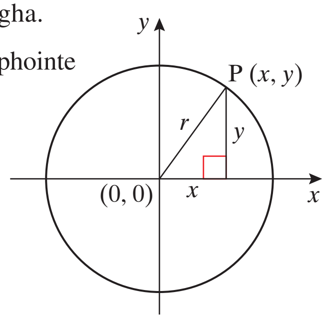
Is ciorcal é tacar pointí ar comhfhad ó phointe tugtha.

Tugtar an t-ainm an **lárphointe** ar an bpointe tugtha seo.



Bíonn fad [OP] i gcónaí cothrom le fad an gha.

Ar dheis feicfidh tú léaráid de chiorcal ar lárphointe dó (0, 0) agus ar ga dó r.



Bíodh $P(x, y)$ ina phointe ar an gciorcal.

Sa triantán dronuilleach tugtha, tá

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Is í seo **cothromóid** an chorcail ar lárphointe dó (0, 0) agus ar ga dó r.

Is í cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (0, 0) agus ar ga dó r ná

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}.$$

Chun cothromóid ciorcail a fháil, is gá go mbeadh
(i) lárphointe an chiorcail agus (ii) fad an gha ar eolas againn.

Sampla 1

Tá lárphointe ciorcail ag (0, 0) agus gabhann sé tríd an bpointe (3, −1).
(i) Faigh fad gha an chiorcail.
(ii) Faigh cothromóid an chiorcail.

(i) Is é fad an gha an fad ó (0, 0) go dtí (3, −1).

Seo é an fad: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

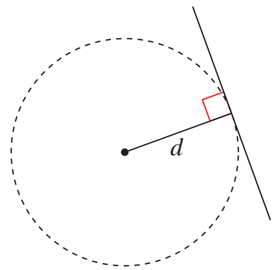
$$= \sqrt{(3 - 0)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

(ii) Cothromóid an chiorcail: $x^2 + y^2 = r^2$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 10$$; is í seo an chothromóid a theastaíonn.

Má thugtar lárphointe ciorcail agus cothromóid tadhlaí leis an gciorcal dúinn, gheobhaimid an ga tríd an bhfad ingearach a fháil ó lárphointe an chiorcail go dtí an tadhlaí.



d = fad an gha

Sampla 2

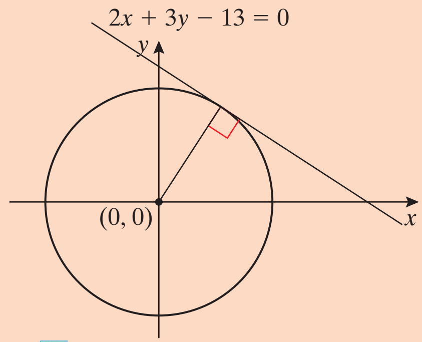
An líne $2x + 3y - 13 = 0$, is tadhlaí í leis an gciorcal ar lárphointe dó $(0, 0)$.
Faigh cothromóid an chiorcail seo.

Is ionann ga an chiorcail agus an fad ingearach ó $(0, 0)$ to $2x + 3y - 13 = 0$.

De réir na foirmle $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$$\text{an ga} = \frac{|2(0) + 3(0) - 13|}{\sqrt{4 + 9}}$$

$$= \frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{13\sqrt{13}}{13} = \sqrt{13}$$



Is í $x^2 + y^2 = r^2$ cothromóid an chorcail $\quad r = \sqrt{13}$

i.e. $x^2 + y^2 = 13$

Ga ciorcail a fháil ó chothromóid an chiorcail

Is é $(0, 0)$ lárphointe an chiorcail $x^2 + y^2 = r^2$ agus is é r an ga.

$\Rightarrow$ Is é $(0, 0)$ lárphointe an chiorcail $x^2 + y^2 = 8$ agus is é $\sqrt{8}$ an ga.

Más é $4x^2 + 4y^2 = 9$, cothromóid an chiorcail, roinn gach téarma ar a 4 go gcuirfidh tú an chothromóid san fhoirm $x^2 + y^2 = r^2$.

$$4x^2 + 4y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \tfrac{9}{4}$$
$$\Rightarrow \quad r^2 = \tfrac{9}{4}$$
$$\Rightarrow \quad r = \tfrac{3}{2}$$

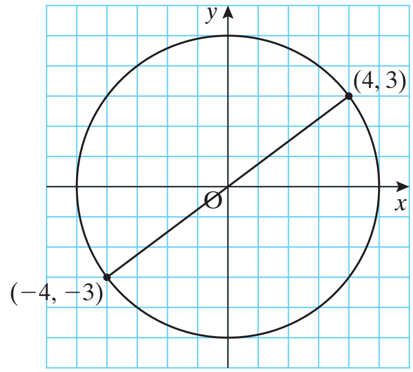
Triailcheisteanna 4.1

1. Scríobh síos cothromóid gach ciorcail díobh seo ar lárphointe dóibh uile $(0, 0)$ agus arb iad faid a ngathanna
   (i) 2 (ii) 5 (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $3\sqrt{2}$ (v) $\frac{3}{4}$ (vi) $2\frac{1}{2}$

2. Tá an pointe $(3, 4)$ ar chiorcal ar lárphointe dó $(0, 0)$.
   Faigh cothromóid an chiorcail.

3. Faigh cothromóid an chiorcail ar lárphointe do $(0, 0)$ a ghabhann tríd an bpointe $(-4, 1)$.

4. Is iad (4, 3) agus $(-4, -3)$ foircinn an trastomhais ar chiorcal áirithe.
Faigh (i) comhordanáidí lárphointe an chiorcail
(ii) fad an gha
(iii) cothromóid an chiorcail.



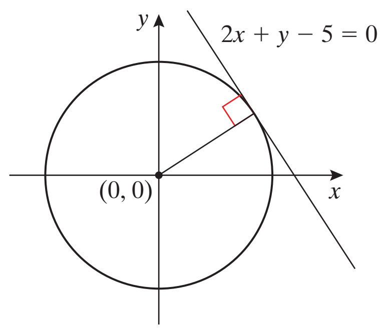
5. Is trastomhas ciorcail í an mhírlíne a ghabhann trí $(4, -1)$ agus $(-4, 1)$.
Faigh cothromóid an chiorcail seo.

6. Scríobh síos ga gach ceann de na ciorcail seo a leanas:

(i) $x^2 + y^2 = 9$	(ii) $x^2 + y^2 = 1$	(iii) $x^2 + y^2 = 27$
(iv) $4x^2 + 4y^2 = 25$	(v) $9x^2 + 9y^2 = 4$	(vi) $16x^2 + 16y^2 = 49$.

7. An líne $2x + y - 5 = 0$ is tadhlaí í leis an gciorcal ar lárphointe dó (0, 0).

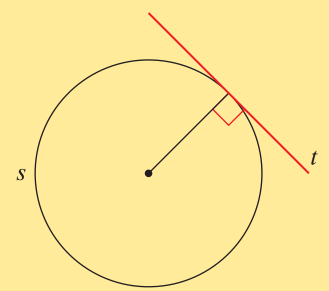
(i) Faigh fad gha an chiorcail.
(ii) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.



8. Faigh cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (0, 0), más tadhlaí í an líne $4x - 3y - 25 = 0$ leis an gciorcal.

9. An líne $3x - y + 10 = 0$, is tadhlaí í leis an gciorcal ar lárphointe dó (0, 0).
Faigh cothromóid an chiorcail.

10. Faigh cothromóid an chiorcail s ar lárphointe dó (0, 0) agus ar ga dó $2\sqrt{5}$.
Is ionann t agus an líne $x - 2y + 10 = 0$.
Faigh an fad ó lárphointe s go dtí an líne t, féachaint an tadhlaí le s í t.



Is tadhlaí leis an gciorcal í líne más ionann ga an chiorcail agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí an líne.

MÍR 4.2: Cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (h, k) agus ar ga dó r

Ar dheis feicfidh tú léaráid de chiorcal ar lárphointe dó $C(h, k)$ agus ar ga dó r.

Bíodh $P(x, y)$ ina phointe ar an gciorcal.

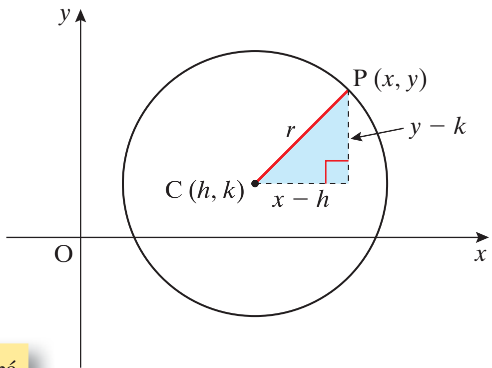
Is ionann an ga agus an fad ó C go P.

Ón léaráid, tá

$$|CP|^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

Ach tá $|CP| = r$

$$\Rightarrow \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



Is í cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (h, k) agus ar ga dó r ná

$$\mathbf{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Sampla 1

Faigh cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó $(3, -1)$ agus ar ga dó 4.

Is í seo an chothromóid: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 16$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0;$$ seo í an chothromóid

Sampla 2

Faigh lárphointe agus ga an chiorcail

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$$

Lárphointe $= (3, -4)$ ga $= \sqrt{36} = 6$

Cothromóid ghinearálta ciorcail

Smaoinigh ar an gcothromóid $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$ i Sampla 2 thuas

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 36$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

Is é $(3, -4)$ an lárphointe

is ionann 3 agus $-\left(\frac{1}{2}\text{ chomhéifeacht } x\right)$,

is ionann -4 agus $-\left(\frac{1}{2}\text{ chomhéifeacht } y\right)$

An ga: $\sqrt{(3)^2 + (-4)^2 - (-11)}$

$= \sqrt{9 + 16 + 11} = \sqrt{36} = 6$

Má tá cothromóid an chiorcail san fhoirm

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(i) lárphointe $= (-g, -f)$

(ii) ga $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$, i gcás $g^2 + f^2 - c > 0$

Sampla 3

Faigh lárphointe agus cothromóid an chiorcail $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$.

Lárphointe $= \left(-\frac{1}{2} \text{ chomhéifeacht } x, -\frac{1}{2} \text{ chomhéifeacht } y\right)$

$= (1, -2)$

$$\text{Ga} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$
$$= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 - (-8)}$$
$$= \sqrt{1 + 4 + 8} = \sqrt{13}$$

$\therefore$ is é $(1, -2)$ an lárphointe agus $\sqrt{13}$ an ga.

Nóta: **1.** Is féidir cothromóid ciorcail a scríobh ar dhá bhealach

(i) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ … lárphointe $= (h, k)$ agus ga $= r$

(ii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ … lárphointe $= (-g, -f)$ agus ga $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

2. Agus tú ag fáil an lárphointe agus an gha i gciorcal a bhfuil a chothromóid san fhoirm $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, cinntigh gurb ionann agus a haon (1) comhéifeacht x^2 agus comhéifeacht y^2.

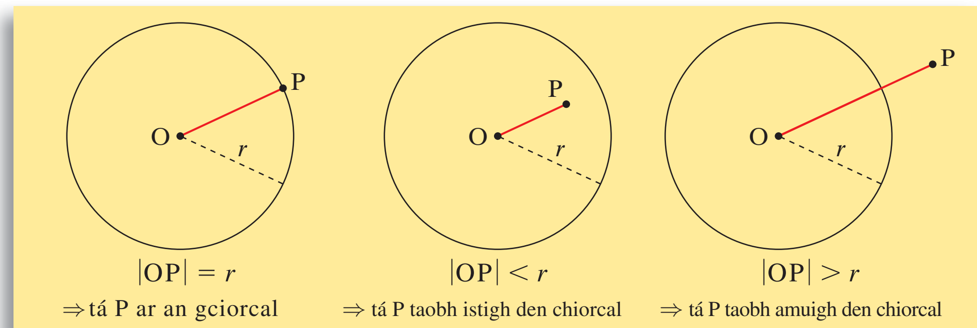
3. Bíonn an méid seo le tabhairt faoi deara ar chothromóid ciorcail:

(i) Cothromóid den dara céim in x agus in y.

(ii) Bíonn comhéifeacht x^2 agus y^2 cothrom le chéile.

(iii) Ní bhíonn téarma ar bith in xy ann.

Pointí agus Ciorcail



Nóta: Má shásaíonn comhordanáidí pointe cothromóid ciorcail, is pointe ar an gciorcal é an pointe sin.

Sampla 4

Faigh amach an bhfuil an pointe P(4, 1) taobh istigh den chiorcal $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$.

Lárphointe an chiorcail $= (3, -2)$

Ga an chiorcail $= \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 - 4} = \sqrt{9 + 4 - 4} = \sqrt{9} = 3$

Is ionann an fad ó $(3, -2)$ go dtí P(4, 1) agus

$$\sqrt{(4 - 3)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

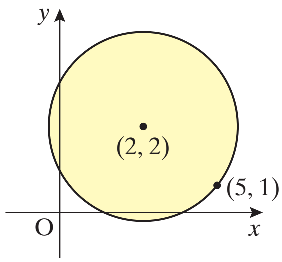
Tá an fad seo, i.e. $\sqrt{10}$, níos mó ná an ga 3,

$\Rightarrow$ tá an pointe P(4, 1) taobh amuigh den chiorcal.

Triailcheisteanna 4.2

1. Faigh cothromóid gach ciorcail díobh seo a leanas san fhoirm $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.
(i) Lárphointe $(3, 1)$; ga $= 2$
(ii) Lárphointe $(1, -4)$; ga $= \sqrt{8}$
(iii) Lárphointe $(4, 0)$; ga $= 2\sqrt{3}$
(iv) Lárphointe $(0, -5)$; ga $= 3\sqrt{2}$

2. Is é $(2, 2)$ lárphointe an chiorcail ar dheis. Má ghabhann an ciorcal tríd an bpointe $(5, 1)$, faigh cothromóid an chiorcail.

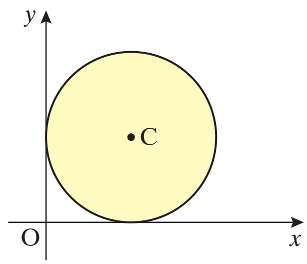


3. Trastomhas ciorcail is ea an mhírlíne a ghabhann trí $(3, 5)$ agus $(-1, 1)$.
(i) Faigh comhordanáidí lárphointe an chiorcail.
(ii) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

4. Scríobh síos lárphointe agus ga gach ceann de na ciorcail seo:
(i) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$
(ii) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 8$
(iii) $(x - 3)^2 + y^2 = 5$
(iv) $x^2 + (y + 2)^2 = 10$

5. Faigh cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó $(-2, 5)$ agus a bhfuil an ga ann ar comhfhad le trastomhas an chiorcail $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 18$.

6. Tadhlaíonn an ciorcal tugtha leis an dá ais, an x-ais agus y-ais. Más é 3 ga an chiorcail, scríobh síos comhordanáidí C, lárphointe an chiorcail.
Uaidh sin, scríobh síos cothromóid an chiorcail.



7. Faigh lárphointe agus ga gach ceann de na ciorcail seo:
(i) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$
(ii) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$
(iii) $x^2 + y^2 - 8x - 8 = 0$
(iv) $x^2 + y^2 + 5x - 6y = 5$
(v) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$
(vi) $4x^2 + 4y^2 - 28y + 33 = 0$

8. Taispeáin go bhfuil an pointe $(5, -5)$ ar an gciorcal $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

9. Taispeáin go bhfuil an pointe $(3, 6)$ taobh amuigh den chiorcal $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.

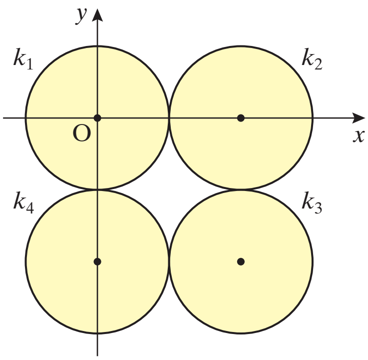
10. Faigh amach an bhfuil an pointe $(3, 1)$ taobh amuigh nó taobh istigh den chiorcal $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$.

11. An bhfuil an pointe $(1, 1)$ taobh amuigh den chiorcal, taobh istigh den chiorcal nó ar an gciorcal $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$?

12. Is é 7 fad an gha atá sa chiorcal $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$.
Faigh luach k.

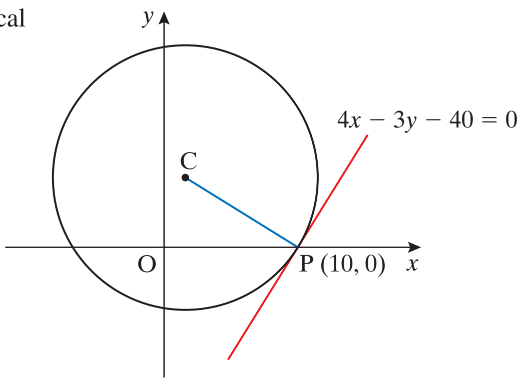
13. Is é $(-4, 3)$ lárphointe an chiorcail k. Is tadhlaí í an y-ais le k.
(i) Tarraing sceitse den chiorcal k.
(ii) Scríobh síos ga an chiorcail.
(iii) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

14. Taispeánann an léaráid ceithre chiorcal a bhfuil a ngathanna ar comhfhad. Tadhlaíonn na ciorcail le chéile mar a fheictear.
Is í $x^2 + y^2 = 4$ cothromóid k_1
(i) Scríobh síos ga k_1.
(ii) Scríobh síos comhordanáidí lárphointe k_3.
(iii) Scríobh síos cothrómóid k_3.
(iv) An í $x^2 + (y + 4)^2 = 4$ cothromóid k_2 nó k_4? Mínigh do fhreagra..

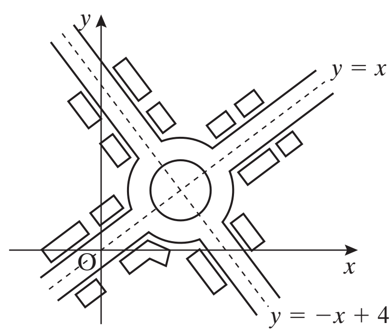


15. Tá lárphointe an chiorcail k sa dara ceathrú. Is é 4 fad a gha.
Is tadhlaithe le k iad an x-ais agus y-ais.
Tarraing sceitse den chiorcal seo agus uaidh sin, scríobh síos cothromóid an chiorcail.

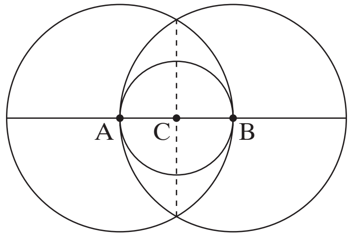
16. Tadhlaíonn an líne $4x - 3y - 40 = 0$ leis an gciorcal $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 100$ ag $P(10, 0)$.
(i) Scríobh síos comhordanáidí C, lárphointe an chiorcail.
(ii) Taispeáin go bhfuil CP ingearach leis an líne thugtha.



17. Ar phlean sráide, léirítear dhá bhóthar mar línte díreacha ag a bhfuil na cothromóidí $y = -x + 4$ agus $y = x$.
Marcálann trasnú na línte seo lárphointe compail, ar trastomhas dó 2 aonad ar an bplean.
Faigh cothromóid an chiorcail a sheasann don chompal.



18. Is í $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ cothromóid an chiorcail bhig ar lárphointe dó C.
Tadhlaíonn na ciorcail mhóra, ar lárphointí dóibh A agus B faoi seach, leis an gciorcal beag. Tá AB comhthreomhar leis an x-ais.
Faigh (i) lárphointe agus ga gach ceann de na trí chiorcal.
(ii) cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó A.



MÍR 4.3: Cothromóid ciorcail a fháil

Chun cothromóid ciorcail a fháil, úsáidimid go hiondúil an t-eolas seo:
(i) lárphointe an chiorcai (ii) ga an chiorcail.

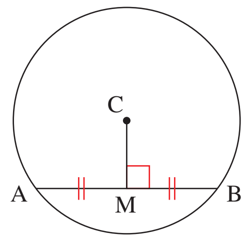
Ní gnách an dá phíosa eolais sin a thabhairt go díreach sna ceisteanna is deacra. Dá bhrí sin, bímid ag brath ar ár gcuid eolais ar chéimseata an chiorcail chun an lárphointe agus an ga a fháil.

Tá tábhacht ar leith le trí airí chéimseatúla an chiorcail.

1. Déroinneann an t-ingear, ó lárphointe ciorcail go dtí corda, an corda
Sa léaráid thugtha, tá $CM \perp AB$

$$|AM| = |MB|$$

Is í airí 2 thíos atoradh na teoirime seo (féach thíos).

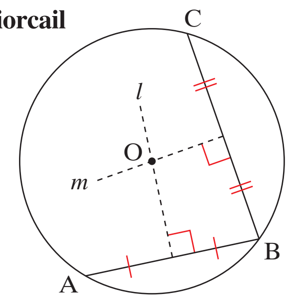


2. Gabhann déroinnteoir ingearach an chorda trí lárphointe an chiorcail
Sa léaráid thugtha, is é l déroinnteoir ingearach an chorda [AB] agus is é m déroinnteoir ingearach an chorda [BC].

Tá an lárphointe, O, ar an dá dhéroinnteoir seo.

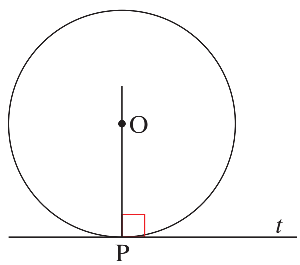
Is é lárphointe an chiorcail pointe trasnaithe an dá dhéroinnteoir ingearacha seo.

Nóta: Bíonn an t-airí seo an-úsáideach má theastaíonn uainn cothromóid ciorcail a fháil sa chás go dtugtar dúinn trí phointe sa chiorcal.



3. Gabhann an t-ingear le tadhlaí, ag an bpointe tadhaill, trí lárphointe an chiorcail.
Sa léaráid thugtha, tadhlaíonn an tadhlaí, t, leis an gciorcal ag an bpointe P.

Tá an lárphointe O ar an ingear le t a ghabhann trí P.



1. Cothromóid ciorcail ar a bhfuil trí phointe thugtha

Sampla 1

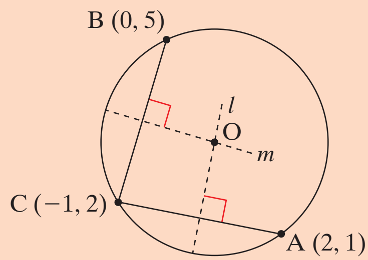
Faigh cothromóid an chiorcail ar a bhfuil na pointí A(2, 1), B(0, 5) agus C(−1, 2).

Taispeánann an léaráid ar dheis an ciorcal ar a bhfuil na trí phointe thugtha.

Is é l déroinnteoir ingearach [CA]

Is é m déroinnteoir ingearach [BC].

Anois faigh cothromóidí l agus m.



Cothromóid l:

$$\text{Fána AC} = \frac{1-2}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \text{fána } l = 3$$

$$\text{Lárphointe [AC]} = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Cothromóid } l\text{: pointe} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{fána} = 3$$

$$y - \frac{3}{2} = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{3}{2} = 3x - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2y - 3 = 6x - 3$$

$$\Rightarrow \quad 6x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x - y = 0 \ldots ①$$

Cothromóid m:

$$\text{Fána BC} = \frac{5-2}{0+1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\Rightarrow \quad \text{fána } m = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Lárphointe [BC]} = \left(\frac{0-1}{2}, \frac{5+2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{Cothromóid } m\text{: point} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{fána} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{7}{2} = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{7}{2} = -\frac{x}{3} - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad 6y - 21 = -2x - 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x + 6y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x + 3y - 10 = 0 \ldots ②$$

Réitimis cothromóidí l agus m:

$$①\text{:} \quad 3x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - y = 0$$

$$②\text{:} \quad x + 3y = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{3x + 9y = 30}$$

$$-10y = -30 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$\therefore$ is é O(1, 3) lárphointe an chiorcail.

Is é |OA| ga an chiorcail.

$$= \sqrt{(1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Is í $(x-1)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{5})^2$ cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (1, 3) agus ar ga dó $\sqrt{5}$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$ an chothromóid a theastaíonn.

Modh eile

Is féidir leas a bhaint as cothromóid ghinearálta an chiorcail $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ chun cothro--móid ciorcail, a bhfuil trí phointe air, a fháil. Má chuirimid isteach na trí phéire luachanna do x agus y, gheobhaimid 3 chothromóid chomhuaineacha.
Léirítear é seo sa chéad sampla eile.

Sampla 2

Faigh cothromóid an chiorcail a ghabhann trí na pointí (0, 0), (3, 1) agus (3, 9).

Bíodh $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ mar chothromóid an chiorcail.

$(0, 0) \in$ den chiorcal $\Rightarrow \quad 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \ldots ①$
$(3, 1) \in$ den chiorcal $\Rightarrow \quad 9 + 1 + 6g + 2f + c = 0$
$\Rightarrow \quad 6g + 2f = -10 \ldots ② \ldots (c = 0)$
$(3, 9) \in$ den chiorcal $\Rightarrow \quad 9 + 81 + 6g + 18f + c = 0$
$\Rightarrow \quad 6g + 18f = -90 \ldots ③ \ldots (c = 0)$

Réitimis cothromóidí ② agus ③.

②: $6g + 2f = -10$
③: $\underline{6g + 18f = -90}$
$-16f = 80$
$\Rightarrow \quad 16f = -80 \quad \Rightarrow \quad f = -5$

②: $6g + 2(-5) = -10$
$6g = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0$

$\therefore \quad g = 0, f = -5$ and $c = 0$

Anois, cuirimid na luachanna seo isteach sa chothromóid
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 10y = 0$ an chothromóid a theastaíonn.

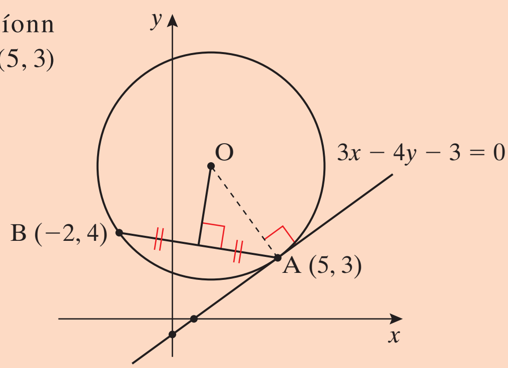
Nóta: Má tá (0, 0) ar cheann de thrí phointe ar imlíne ciorcail, b'fhéidir gurbh fhusa an chothromóid a fháil ar an modh a mhínítear i Sampla 2, ná ar an modh a mhínítear i Sampla 1.

2. Cothromóid an chiorcail a fháil nuair atá cothromóid an tadhlaí, an pointe tadhaill agus pointe amháin eile agat

Sampla 3

Faigh cothromóid an chiorcail a thadhlaíonn leis an líne $3x - 4y - 3 = 0$ ag an bpointe A(5, 3) agus a ghabhann tríd an bpointe B$(-2, 4)$.

Feicfidh tú ar dheis léaráid gharbh den chiorcal.



Tá an lárphointe O ar dhéroinnteoir ingearach [AB].

Agus tá an lárphointe ar an líne a ghabhann trí A(5, 3), líne atá ingearach leis an tadhlaí $3x - 4y - 3 = 0$.

Is ionann an lárphointe O agus pointe trasnaithe an dá líne.

(i) Cothromóid dhéroinnteoir ingearach [AB]:

$$\text{Fána AB} = \frac{3-4}{5+2} = -\frac{1}{7}$$

$\Rightarrow$ fána dhéroinnteoir ingearach AB $= 7$

$$\text{Lárphointe [AB]} = \left(\frac{-2+5}{2}, \frac{4+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Cothromóid dhéroinnteoir ingearach [AB]:

$$\text{pointe} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right); \quad \text{fána} = 7$$

$$y - \frac{7}{2} = 7\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{7}{2} = 7x - \frac{21}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2y - 7 = 14x - 21 \quad \Rightarrow \quad 14x - 2y - 14 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 7x - y - 7 = 0 \ldots ①$$

(ii) Cothromóid na líne trí A atá ingearach le $3x - 4y - 3 = 0$:

Is ionann fána $3x - 4y - 3 = 0$ agus $\frac{3}{4} \Rightarrow$ fána an ingir $= -\frac{4}{3}$.

Cothromóid na líne: $y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 5)$

$$\Rightarrow \quad 3y - 9 = -4x + 20$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 3y - 29 = 0 \ldots ②$$

Má réitimíd cothromóidí ① agus ② faighimid:

$$\begin{array}{ll} ① \times 3: & 21x - 3y = 21 \\ ② \quad : & \underline{\ 4x + 3y = 29} \\ & 25x \qquad = 50 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ and } y = 7$$

$\Rightarrow$ is é (2, 7) lárphointe an chiorcail.

Is ionann ga an chiorcail agus an fad ó (2, 7) go dtí (−2, 4).

$$\therefore \quad \text{an ga} = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-7)^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

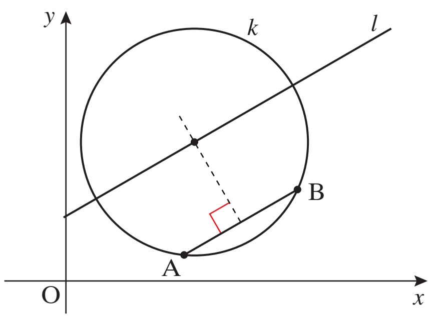
Is í cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (2, 7) agus ar ga dó 5 ná

$$(x-2)^2 + (y-7)^2 = 25$$

3. Cothromóid an chiorcail a ghabhann trí dhá phointe thugtha agus a bhfuil a lárphointe ar líne thugtha

Sa léaráid ar dheis, feicfidh tú ciorcal k a bhfuil dhá phointe A agus B air agus an líne l a ghabhann trí lárphointe k.

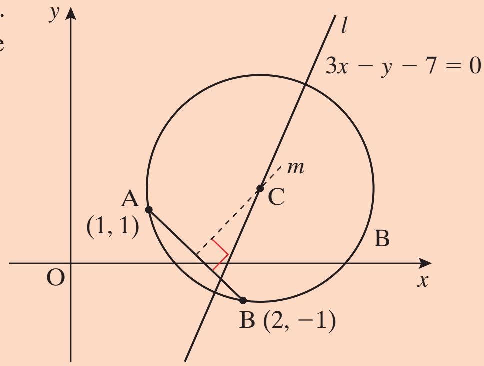
Chun lárphointe an chiorcail a fháil, faigh an pointe ag a dtrasnaíonn an líne l agus déroinnteoir ingearach [AB] a chéile.



Sampla 4

Faigh cothromóid an chiorcail a bhfuil a lárphointe ar an líne l: $3x - y - 7 = 0$, ciorcal a ghabhann trí na pointí A(1, 1) agus B(2, −1).

Is ionann m agus déroinnteoir ingearach [AB].
Is ionann lárphointe an chiorcail agus an pointe ag a dtrasnaíonn m agus an líne $3x - y - 7 = 0$ a chéile.



$$\text{Lárphointe [AB]} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$\text{Fána AB} = \frac{-1-1}{2-1} = -2$$

$$\text{Fána } m = \frac{1}{2}$$

Cothromóid m: pointe $= \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ agus fána $= \frac{1}{2}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4y = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad 2x - 4y - 3 = 0 \ldots \text{ cothromóid } m$$

Anois faighimis an pointe ag a dtrasnaíonn ℓ agus m a chéile.

l: $3x - y = 7$ $(\times 2)$: $6x - 2y = 14$

m: $2x - 4y = 3$ $(\times 3)$: $\underline{6x - 12y = 9}$

$10y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$

l: $3x - \frac{1}{2} = 7$

$$\Rightarrow \quad 3x = 7\tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x = \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ is é $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ lárphointe an chiorcail, C.

Is ionann an ga agus an fad ó $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ go dtí (1, 1).

$$\Rightarrow \quad \text{ga} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}}$$

Is ionann an ga agus an fad ó $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

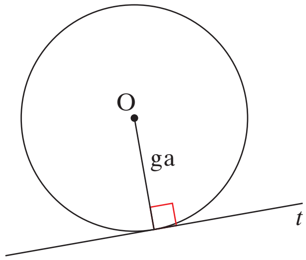
$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

Nóta **1.** Is féidir cothromóid ghinearálta an chiorcail, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, a úsáid freisin chun an cheist i Sampla 4 a dhéanamh. Má chuirimid na pointí $(1,1)$ agus $(2, -1)$ isteach i gcothromóid an chiorcail, faighimid dhá chothromóid in g, f agus c. Ós rud é go bhfuil an lárphointe $(-g, -f)$, ar an líne $3x - y - 7 = 0$, faighimid an chothromóid $-3g + f - 7 = 0$.

Réitímid na trí chothromóid ansin go bhfaighimid luach g, luach f agus luach c.

2. Is tadhlaí le ciorcal í líne nach mbuaileann leis an gciorcal ach ag aon phointe amháin.

Is ionann ga an chiorcail agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí tadhlaí.



3. Taispeáint gur tadhlaí le ciorcal í líne

Is tadhlaí le ciorcal í líne más ionann an ga agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí an líne.

Sampla 5

Taispeáin gur tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 8 = 0$ í an líne $x + 6y - 9 = 0$.

Lárphointe an chiorcail $= (2, -5)$ Ga an chiorcail $= \sqrt{(2)^2 + (-5)^2 + 8} = \sqrt{37}$.

Is é an fad ingearach ó $(2, -5)$ go dtí an líne $x + 6y - 9 = 0$ ná

$$\frac{|2(1) + 6(-5) - 9|}{\sqrt{1^2 + 6^2}} = \frac{|2 - 30 - 9|}{\sqrt{37}} = \frac{|-37|}{\sqrt{37}} = \frac{37\sqrt{37}}{37} = \sqrt{37}$$

Is ionann an fad ingearach seo agus ga an chiorcail,

$\Rightarrow$ is tadhlaí leis an gciorcal í an líne

Triailcheisteanna 4.3

1. Faigh lárphointe agus ga an chiorcail $x^2 + y^2 = 10$.
Faigh an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí an líne l: $3x + y + 10 = 0$, agus, uaidh sin, taispeáin gur tadhlaí leis an gciorcal í l.

2. Scríobh síos lárphointe agus ga an chiorcail $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 50$.
Taispeáin ansin gur tadhlaí leis an gciorcal í an líne $x - y + 3 = 0$.

3. Cothromóid ciorcail í $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$.
Faigh amach an tadhlaí leis an gciorcal í an líne $3x - 4y - 12 = 0$.

4. Is tadhlaí í an líne $2x - 3y - 5 = 0$ leis an gciorcal k. Más é $(-1, 2)$ lárphointe k, faigh cothromóid k.

5. Faigh cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó $(2, 1)$, ciorcal a thadhlaíonn leis an líne $x - y + 5 = 0$.

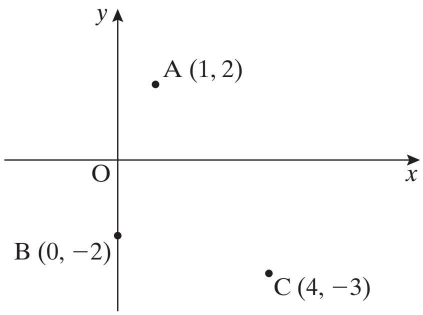
6. Cothromóid ciorcail í $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.
(i) Scríobh síos comhordanáidí lárphointe an chiorcail.
(ii) Faigh ga an chiorcail.
(iii) Tarraing sceitse den chiorcal.
(iv) Mínigh an fáth a dtadhlaíonn an ciorcal leis an dá ais.

7. Scríobh síos cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (2, 2) agus a thadhlaíonn leis an dá ais.

8. Faigh cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó (2, 3) agus a thadhlaíonn leis an y-ais.

9. Cothromóid an chiorcail s í $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.
(i) Faigh comhordanáidí an lárphointe agus fad gha s.
(ii) Faigh luachanna k más tadhlaí le s í an líne $3x + 4y - k = 0$.

10. Léirítear na pointí A(1, 2), B(0, -2) agus C(4, -3) ar an léaráid thugtha.



(i) Faigh cothromóid dhéroinnteoir ingearach [AB].
(ii) Faigh cothromóid dhéroinnteoir ingearach [BC].
(iii) Faigh pointe trasnaithe an dá dhéroinnteoir seo.
(iv) Faigh fad gha an chiorcail a ghabhann trí na trí phointe.
(v) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

11. Úsáid cothromóid ghinearálta an chiorcail, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, chun cothromóid an chiorcail a ghabhann trí na pointí (0, 0), (2, 0) agus (3, -1).

12. Faigh cothromóid an chiorcail a ghabhann trí na pointí (0, 0), (-2, 4) agus (-1, 7).

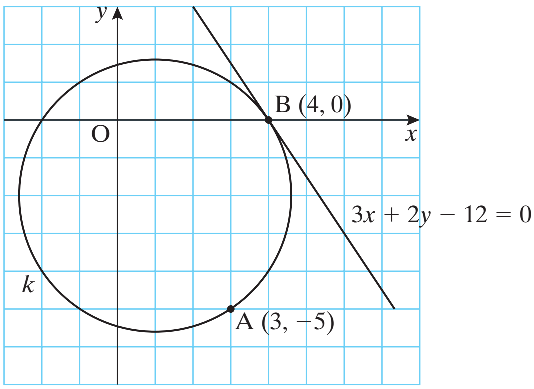
13. Gabhann ciorcal trí na pointí (3, 5) agus (-1, 3).
Tá lárphointe an chiorcail ar an líne $x + 2y - 6 = 0$.
Úsáid cothromóid ghinearálta an chiorcail, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, chun an ciorcal a léiriú, agus ansin scríobh síos trí chothromóid in g, f agus c a léiríonn an t-eolas tugtha.
Ansin, scríobh síos cothromóid an chiorcail.

14. Is é $(-g, -f)$ lárphointe an chiorcail $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
Má tá lárphointe an chiorcail ar an x-ais, faigh luach f.
Anois, faigh cothromóid an chiorcail a bhfuil a lárphointe ar an x agus a ghabhann trí na pointí (4, 5) agus (-2, 3).

15. Tadhlaíonn an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 6y + k = 0$ leis an x-ais ag an bpointe T.
(i) Scríobh síos fad gha an chiorcail.
(ii) Uaidh sin, faigh luach k agus comhordanáidí T.

16. Tá lárphointe an chiorcail k sa chéad cheathrú. Tadhlaíonn sé leis an x-ais agus leis an y-ais.
(i) Más é $(-g, -f)$, lárphointe an chiorcail, cad is féidir a rá faoi luachanna g agus f?
(ii) Más é $3\sqrt{2}$ an fad ó lárphointe an chiorcail go dtí an bunphointe, faigh cothromóid an chiorcail k.

17. Is tadhlaí í an líne $3x + 2y - 12 = 0$ leis an gciorcal k ag B(4, 0).
Gabhann an ciorcal tríd an bpointe A(3, -5) freisin.

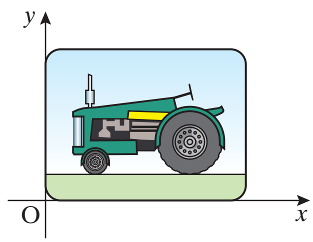


(i) Mínigh an fáth a ngabhann an t-ingear leis an líne $3x + 2y - 12 = 0$ ag an bpointe B trí lárphointe an chiorcail.
(ii) Faigh cothromóid an ingir seo.
(iii) Faigh cothromóid dhéroinnteoir ingearach [AB].
(iv) Uaidh sin, faigh lárphointe agus fad ga an chiorcail.
(v) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

18. Gabhann ciorcal trí na pointí (7, 2) agus (7, 10). Is tadhlaí leis an gciorcal í an líne $x = -1$. Faigh cothromóid an chiorcail.

19. Tá an pointe $(-1, 3)$ ar chiorcal ar ga dó $\sqrt{20}$.
Tá lárphointe an chiorcail ar an líne $x + y = 0$.
Faigh cothromóidí an dá chiorcal fhéideartha.

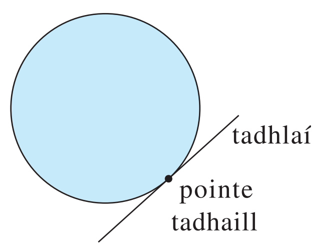
20. Tarraingítear pictiúr de tharracóir i gcluiche ríomhaire.
Is í $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$ cothromóid fhonsa an rotha tosaigh.



(i) Is líne cothrom leis an x-ais í an talamh.
Scríobh síos cothromóid na líne seo.
(ii) Tá ga fhonsa an rotha cúil trí oiread níos mó ná ga fhonsa an rotha tosaigh. Má tá pointí tadhaill na rothaí leis an talamh 10 n-aonad ó chéile, faigh cothromóid fhonsa an rotha cúil.
(iii) Gluaiseann an tarracóir 2 aonad ar chlé. Faigh cothromóid nua fhonsa an rotha cúil.

MÍR 4.4: Tadhlaithe leis an gciorcal

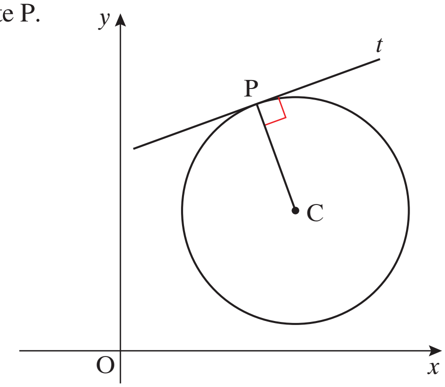
Is tadhlaí le ciorcal í líne mura mbuaileann sí leis an gciorcal ach ag aon phointe amháin.



1. Cothromóid tadhlaí le ciorcal ag an bpointe P ar an gciorcal a fháil

Sa léaráid thugtha, is tadhlaí í an líne, t leis an gciorcal ag an bpointe P.
Is é C lárphointe an chiorcail.
Tá CP ingearach le t.

Chun cothromóid t:
- (i) Faigh fána CP.
- (ii) Scríobh síos fána t.
- (iii) Faigh cothromóid t ag úsáid $y - y_1 = m(x - x_1)$.



Sampla 1

Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ ag an bpointe $(5, -5)$ ar an gciorcal.

Is é $C(2, -1)$ lárphointe an chiorcail.

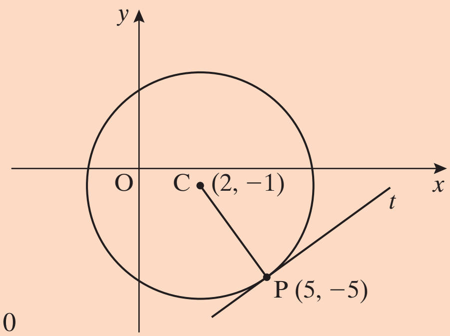
$$\text{Fána CP} = \frac{-1+5}{2-5} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$ slope of $t = \frac{3}{4}$

Cothromóid t: $y + 5 = \frac{3}{4}(x - 5)$

$\Rightarrow$ $4y + 20 = 3x - 15$

$\Rightarrow$ cothromóid an tadhlaí: $3x - 4y - 35 = 0$



2. Tadhlaithe leis an gciorcal, tadhlaithe atá comhthreomhar nó ingearach le líne thugtha

Línte comhthreomhara agus ingearacha.

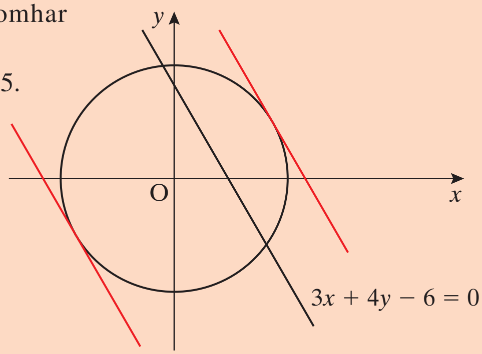
1. Tá an chothromóid $ax + by + k = 0$ ag aon líne atá comhthreomhar le $ax + by + c = 0$
2. Tá an chothromóid $bx - ay + k = 0$ ag aon líne atá ingearach le $ax + by + c = 0$

Sampla 2

Faigh cothromóidí an dá líne atá comhthreomhar leis an líne $3x + 4y - 6 = 0$ agus ar tadhlaithe iad leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 25$.

Tugtar sceitse den líne agus den chiorcal ar dheis.

Léirítear an dá thadhlaí atá comhthreomhar le $3x + 4y - 6 = 0$ i gcló dearg.



Tá an chothromóid $3x + 4y - 6 = 0$ ag aon líne atá comhthreomhar le $3x + 4y + k = 0$.

Ga an chiorcail $= \sqrt{25} = 5$.

Is ionann 5 agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail (0, 0) go dtí $3x + 4y + k = 0$.

$$\Rightarrow \quad \frac{|3(0) + 4(0) + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|k|}{5} = 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{5} = 5 \quad \text{nó} \quad \frac{k}{5} = -5$$

$$\Rightarrow \quad k = 25 \quad \text{nó} \quad k = -25$$

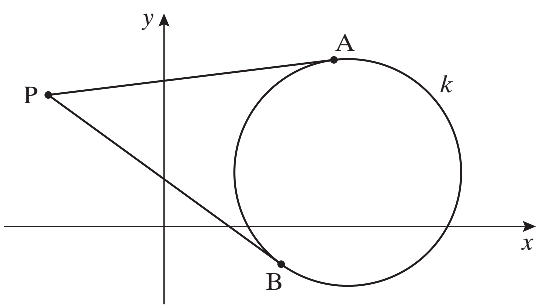
Má tá $|x| = 5$
$\Rightarrow \quad x = 5 \quad$ nó $\quad x = -5$

Is iad seo cothromóidí an dá thadhlaí:

$3x + 4y + 25 = 0$ agus $3x + 4y - 25 = 0$.

3. Tadhlaithe le ciorcal ó phointe P nach bhfuil ar an gciorcal

Léiriú atá ar dheis gur féidir dhá thadhlaí a tharraingt go dtí ciorcal ó phointe taobh amuigh den chiorcal, i.e. gur tadhlaithe iad PA agus PB leis an gciorcal k.



Má iarrtar orainn cothromóidí dhá thadhlaí le ciorcal áirithe a fháil ón bpointe (2, 3), mar shampla, caithimid ar dtús cothromóid líne ar bith trí (2, 3) a fháil, i dtéarmaí na fána m.

Is í an chothromóid seo ná $y - 3 = m(x - 2)$

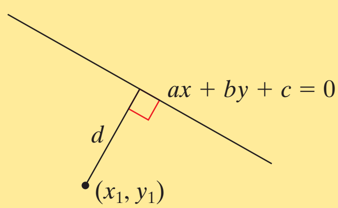
i.e. $\quad mx - y + 3 - 2m = 0$.

Ansin, faighimid an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí an líne seo agus déanaimid é a chothromú an nga chun an dá luach ar m a fháil.

Cuimhnigh

Is ionann an fad ingearach ón bpointe (x_1, y_1) go dtí an líne $ax + by + c = 0$ agus

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Sampla 3

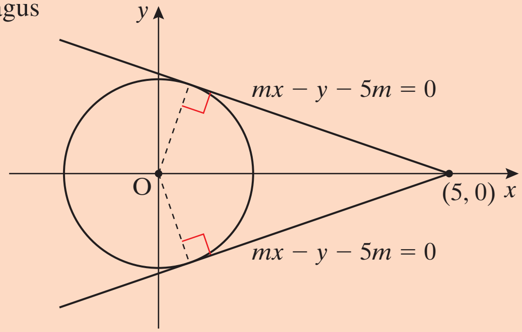
Faigh cothromóidí na dtadhlaithe leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 5$ ón bpointe $(5, 0)$.

Is ionann cothromóid líne ar bith trí $(5, 0)$ agus

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\Rightarrow \quad y - 0 = m(x - 5)$$
$$\Rightarrow \quad y = m(x - 5)$$
$$\Rightarrow \quad mx - y - 5m = 0$$

Lárphointe an chiorcail $= (0, 0)$

Ga an chiorcail $= \sqrt{5}$



Más tadhlaí leis an gciorcal í an líne $mx - y - 5m = 0$ is ionann fad an gha agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail, i.e. $(0, 0)$, go dtí an líne.

$$\Rightarrow \quad \frac{|0.m + 0(-1) - 5m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$
$$= \frac{|-5m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{25m^2}{m^2 + 1} = 5$$
$$\Rightarrow \quad 25m^2 = 5(m^2 + 1)$$
$$\Rightarrow \quad 20m^2 = 5$$
$$\Rightarrow \quad m^2 = \tfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad m = \pm\tfrac{1}{2}$$

Is iad seo cothromóidí na dtadhlaithe:

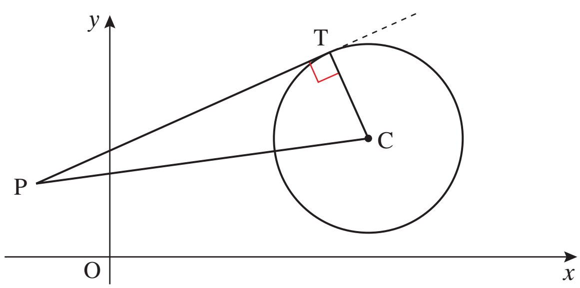
$m = \tfrac{1}{2}$: $\quad y - 0 = \tfrac{1}{2}(x - 5)$
$$\Rightarrow \quad 2y = x - 5$$
$$\Rightarrow \quad x - 2y - 5 = 0$$

$m = -\tfrac{1}{2}$: $\quad y - 0 = -\tfrac{1}{2}(x - 5)$
$$2y = -x + 5$$
$$\Rightarrow \quad x + 2y - 5 = 0$$

Is iad $x - 2y - 5 = 0$ agus $x + 2y - 5 = 0$ cothromóidí an dá thadhlaí.

4. Fad tadhlaí le ciorcal ó phointe ar leith

Nuair a bhímid ag réiteach fadhbanna a bhaineann le tadhlaithe, tá sé tábhachtach cuimhneamh go mbíonn an líne ó lárphointe an chiorcail go dtí an pointe tadhaill ingearach leis an tadhlaí.



Úsáidfimid an t-eolas seo chun fad tadhlaí le ciorcal ó phointe ar leith a fháil.

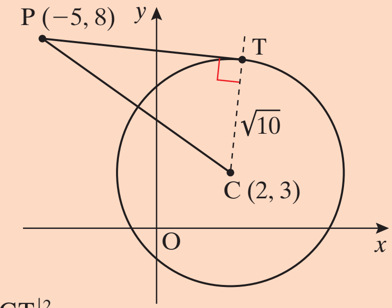
Tá léiriú air seo sa sampla seo a leanas.

Chun fad an tadhlaí [PT] a fháil,

$$|CP|^2 = |PT|^2 + |CT|^2$$
$$\Rightarrow \quad |PT|^2 = |CP|^2 - |CT|^2$$

Sampla 4

Faigh fad an tadhlaí ón bpointe $(-5, 8)$ go dtí an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.



Is é $(2, 3)$ lárphointe an chiorcail.

$$\text{An ga} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$
$$= \sqrt{4 + 9 - 3} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \quad |CT| = \sqrt{10}$$
$$|CP| = \sqrt{(2 + 5)^2 + (3 - 8)^2}$$
$$= \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$$

Ós dronuilleach atá $\triangle CTP \Rightarrow |PT|^2 = |CP|^2 - |CT|^2$

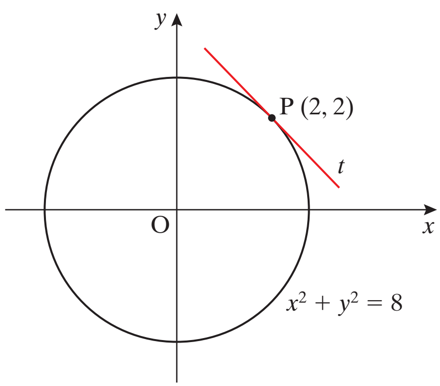
$$= 74 - 10 = 64$$

$$\Rightarrow \quad |PT| = \sqrt{64} = 8$$

$\therefore$ is ionann fad an tadhlaí agus 8

Triailcheisteanna 4.4

1. Faigh cothromóid an tadhlaí, t, leis an gciorcal tugtha $x^2 + y^2 = 8$ ag an bpointe P(2, 2).

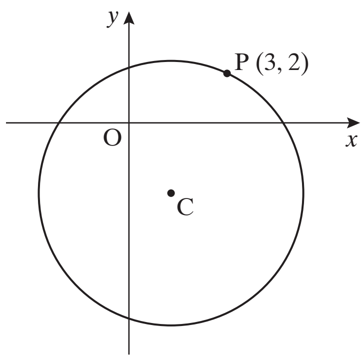


2. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 10$ ag an bpointe $(-3, 1)$.

3. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 17$ ag an bpointe $(4, -1)$.

4. Is í $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$ cothromóid ciorcail.

(i) Fíoraigh go bhfuil an pointe P(3, 2) ar an gciorcal.
(ii) Scríobh síos comhordanáidí C, lárphointe an chiorcail.
(iii) Uaidh sin, faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal ag an bpointe P.



5. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 17$ ag an bpointe $(0, 2)$.

6. Faigh lárphointe agus fad gha an chiorcail $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 8 = 0$.
Uaidh sin, faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal ag an bpointe $(3, 1)$.

7. Faigh an fad ingearach ó $(0, 0)$ go dtí an líne $3x - 4y - 25 = 0$.
Uaidh sin, taispeáin gur tadhlaí í an líne $x - 4y - 25 = 0$ leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 25$.

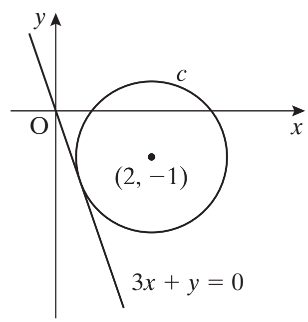
8. Faigh lárphointe agus fad gha an chiorcail $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$.
Uaidh sin, taispeáin gur tadhlaí í $x + 2y - 12 = 0$ leis an gciorcal.
Mínigh do fhreagra.

9. Scríobh síos lárphointe agus fad gha an chiorcail $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.
Más tadhlaí leis an gciorcal seo í an líne $3x + 4y + c = 0$, faigh an dá luach ar c.

10. Cé na luachanna atá ar k más tadhlaí í an líne $2x - ky - 3 = 0$ leis an gciorcal $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 5 = 0$?

11. Maidir leis an tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 13$ ag an bpointe $(-2, 3)$, taispeáin gur tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 26 = 0$ é freisin.

12. Faigh cothromóid an chiorcail, c, ar lárphointe dó $(2, -1)$ agus a thadhlaíonn leis an líne $3x + y = 0$.



13. Scríobh síos cothromóid na líne ar a bhfuil an bunphointe agus a bhfuil fána m aici.
Uaidh sin, scríobh síos cothromóidí na dtadhlaithe ón mbunphointe go dtí an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

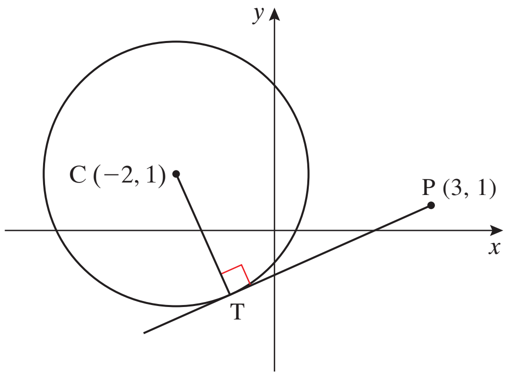
14. Faigh cothromóid na líne a théann tríd an bpointe $(3, 5)$ agus a bhfuil fána m aici.
Uaidh sin, scríobh síos cothromóidí an dá thadhlaí ón bpointe $(3, 5)$ go dtí an ciorcal $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

15. Scríobh síos cothromóid aon líne atá comhthreomhar le $x + 4y - 6 = 0$.
Uaidh sin, scríobh síos cothromóidí na dtadhlaithe leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ atá comhthreomhar leis an líne $x + 4y - 6 = 0$.

16. Tá lárphointe $(3, 5)$ ag ciorcal. Tadhlaíonn an ciorcal leis an líne $y = 2x + 4$.
(i) Faigh fad gha an chiorcail.
(ii) Faigh cothromóid an chiorcail.
(iii) Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal ag an bpointe $(1, 4)$.

17. Is ionann 7 agus fad an gha sa chiorcal $x^2 + y^2 - 10kx + 6y + 60 = 0$, nuair atá $k > 0$.
(i) Faigh lárphointe an chiorcail i dtéarmaí k.
(ii) Faigh luach k.
(iii) Is tadhlaí leis an gciorcal í an líne $3x + 4y + d = 0$, $d \in Z$.
Léirigh go bhfuil 17 ar cheann de luachanna d.
Faigh an luach eile ar d.

18. Taispeánann an léaráid an ciorcal $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$.



(i) Scríobh síos fad gha an chiorcail.
(ii) Más tadhlaí leis an gciorcal é PT, mínigh an fáth go bhfuil PT ingearach leis an nga [CT].
(iii) Uaidh sin, faigh fad an tadhlaí [PT] leis an gciorcal.

19. Faigh lárphointe agus fad gha an chiorcail $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 34 = 0$.
Uaidh sin, faigh fad an tadhlaí ón bpointe (2, 5) go dtí an ciorcal.

20. Faigh fad an tadhlaí ón mbunphointe go dtí an ciorcal $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$.

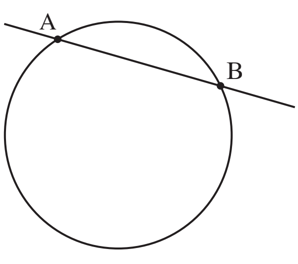
21. Faigh fad an tadhlaí ón bpointe (7, 8) go dtí an ciorcal $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

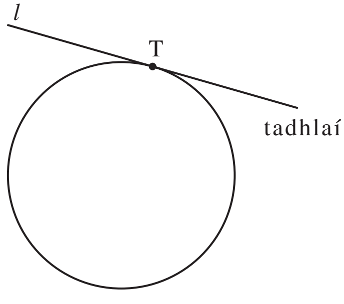
22. Más é 2 aonad fad an tadhlaí ón bpointe (1, 1) go dtí an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$, faigh luach c.

MÍR 4.5: Línte agus Ciorcail: An Comhchorda

1. Na pointí ina dtrasnaíonn líne agus ciorcal a chéile

Úsáidimid cothromóidí comhuaineacha chun an pointe / na pointí ina dtrasnaíonn líne agus ciorcal a chéile a fháil. Má bhíonn dhá réiteach ann, trasnaíonn an líne an ciorcal ag dhá phointe.
Mura mbíonn ach pointe trasnaithe amháin ann, is tadhlaí í an líne leis an gciorcal, mar a léirítear thíos.





Sampla 1

Faigh na pointí ina dtrasnaíonn an líne $x + 2y - 1 = 0$ agus an ciorcal $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$ a chéile.

Tosaímid le cothromóid na líne; scríobhaimid x i dtéarmaí y nó y i dtéarmaí x. (Seachain codáin, más féidir).

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2y + 1$$

Cuirimid isteach $(-2y + 1)$ in áit x i gcothromóid an chiorcail:

$$(-2y + 1)^2 + y^2 + 2(-2y + 1) + 8y - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 4y + 2 + 8y - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 5y^2 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (y - 1)(y + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad y = 1 \quad \text{nó} \quad y = -1$$

I gcás gach luacha de y, faighimid an x-luach comhfhreagrach.

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1; \qquad y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Is iad $(-1, 1)$ agus $(3, -1)$ na pointí trasnaithe.

Sampla 2

Faigh an pointe / na pointí ina dtrasnaíonn an líne $2x - y + 8 = 0$ agus an ciorcal $x^2 + y^2 + 4x + 2y =$a chéile. Uaidh sin, taispeáin gur tadhlaí leis an gciorcal í an líne.

Líne: $2x - y + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 8$

Ciorcal: $x^2 + (2x + 8)^2 + 4x + 2(2x + 8) = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 4x^2 + 32x + 64 + 4x + 4x + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 5x^2 + 40x + 80 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 8x + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x + 4)(x + 4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = -4 \ldots$$ níl ann ach luach amháin

Faighimid luach y a fhreagraíonn do luach x: $2(-4) - y + 8 = 0 \quad \Rightarrow y = 0$

Is é $(-4, 0)$ an pointe trasnaithe.

Ós rud é nach bhfuil ach pointe trasnaithe amháin ann, is tadhlaí leis an gciorcal í an líne.

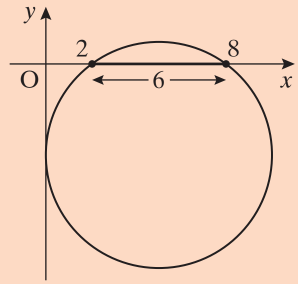
2. Áit a dtrasnaíonn ciorcal na haiseanna

Trasnaíonn ciorcal an x-ais ag na pointí a mbíonn $y = 0$.

Trasnaíonn ciorcal an y-ais ag na pointí a mbíonn $x = 0$.

Sampla 3

Faigh fad na hidirlíne ar an x-ais a ghearrann an ciorcal $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 16 = 0$.



Trasnaíonn ciorcal an x-ais ag na pointí a mbíonn $y = 0$.

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 8)(x - 2) = 0$$
$$\Rightarrow x = 8 \quad \text{nó} \quad x = 2$$

Trasnaíonn an ciorcal an x-ais ag na pointí $(2, 0)$ agus $(8, 0)$.

$\therefore$ an idirlíne ar an x-ais $= 6$.

3. Comhchorda nó comhthadhlaí dhá chiorcal

Glac na ciorcail s_1: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

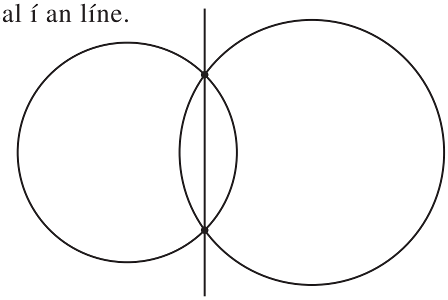
agus s_2: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

$s_1 - s_2$: $2x - 6y - 1 = 0$

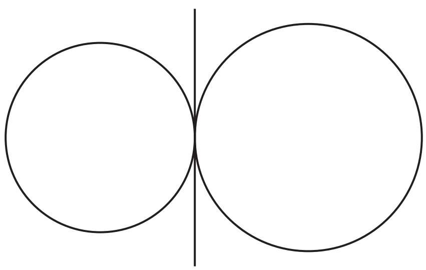
Seo í cothromóid na líne a ghabhann trí phointí trasnaithe an dá chiorcal.

(i) Má thrasnaíonn an dá chiorcal a chéile, is ionann an líne agus **comhchorda** an dá chiorcal.

(ii) Má thadhlaíonn na ciorcail le chéile go hinmheánach nó go seachtrach, is **comhthadhlaí** leis an dá chiorcal í an líne.



Comhchorda



Comhthadhlaí

Is mar seo a gheobhaidh tú pointí trasnaithe dhá chiorcal:
(i) faigh cothromóid an chomhchorda
(ii) faigh na pointí ina dtrasnaíonn an corda agus ceachtar den dá chiorcal a chéile.

Sampla 4

Faigh cothromóid chomhchorda an dá chiorcal
$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$ agus $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$.

Is ionann cothromóid an chomhchorda agus an méid seo:

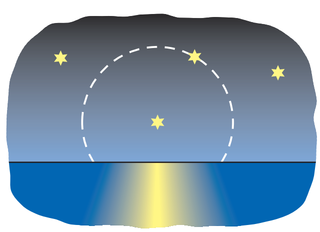
$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 - x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$$
$$\Rightarrow \quad -8x + 6y + 10 = 0$$
$$\Rightarrow 4x - 3y - 5 = 0 \text{ an chothromóid a theastaíonn}$$

Dhá chiorcal, $s_1 = 0$ agus $s_2 = 0$, is é $s_1 - s_2 = 0$ comh--chorda an dá chiorcal.

Nóta: Chun pointí trasnaithe an dá chiorcal i Sampla 4 a fháil, réitímid na cothromóidí $4x - 3y - 5 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$.

Triailcheisteanna 4.5

1. Faigh na pointí ina dtrasnaíonn an líne $x - y + 5 = 0$ agus an ciorcal $x^2 + y^2 = 5$.
2. Taispeáin gur tadhlaí í an líne $x - 3y - 10 = 0$ leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 10$, agus faigh comhordanáidí an phointe tadhaill.
3. Faigh an pointe ina dtrasnaíonn an líne $2x - y - 5 = 0$ agus an ciorcal $x^2 + y^2 = 5$.
4. Faigh na pointí ina dtrasnaíonn an líne thugtha agus an ciorcal a chéile i ngach cás díobh seo a leanas:
   (i) $x + y = 6$ agus $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$
   (ii) $2x + y - 2 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 11 = 0$
   (iii) $3x - y - 5 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.
5. Taispeáin go dtadhlaíonn an líne $x - 2y + 12 = 0$ leis an gciorcal $x^2 + y^2 - x - 31 = 0$ trí chomhordanáidí an phointe tadhaill a fháil.
6. Trasnaíonn an líne $x - 2y - 1 = 0$ an ciorcal $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ ag na pointí L agus M.
   (i) Faigh comhordanáidí L agus M.
   (ii) Faigh lárphointe [LM].
   (iii) Faigh cothromóid an chiorcail ar trastomhas dó [LM].
7. Faigh comhordanáidí na bpointí ina dtrasnaíonn an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ an x-ais.
   Uaidh sin, scríobh síos fad na hidirlíne a ghearrann an ciorcal ar an x-ais.
8. Faigh comhordanáidí phointí tadhaill an chiorcail $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$ agus na y-aise.
   Uaidh sin, scríobh síos fad an chorda a ghearrann an ciorcal ar an y-ais.
9. Tadhlaíonn an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x + 11y - 12 = 0$ leis an x-ais dheimhneach agus leis an y-ais dheimhneach ag A$(a, 0)$ agus B$(0, b)$ faoi seach.
   Faigh luachanna a agus b.
10. Is ionann k agus an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$.
    Faigh fad na hidirlíne a ghearrann an ciorcal den x-ais.
11. Faigh cothromóid chomhchorda na gciorcal $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$ agus $x^2 + y^2 - x + 4y - 7 = 0$.
    Uaidh sin, faigh comhordanáidí phointí trasnaithe an dá chiorcal.
12. Faigh cothromóid chomhthadhlaí na gciorcal $x^2 + y^2 + 14x - 10y - 26 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 28 = 0$.
    Úsáid an tadhlaí seo chun pointe trasnaithe an dá chiorcal a fháil.
13. Faigh pointí trasnaithe na gciorcal $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ agus $x^2 + y^2 + 14x - 12y + 65 = 0$.
14. Imrothlaíonn réaltaí thart ar an Réalta Thuaidh uair amháin gach oíche. Rianaíonn réalta ar leith an ciorcal $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 4 = 0$, i dtacar roghnaithe d'aiseanna comhordanáideacha.
    Tá an chothromóid $y = 1$ ag fíor na spéire.
    (i) Scríobh síos cothromóidí na Réalta Thuaidh.
    (ii) Ríomh comhordanáidí phointí éirí agus dul faoi na réalta gluaistí.

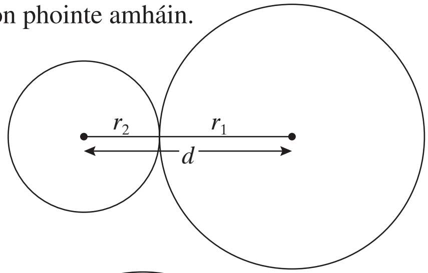


MÍR 4.6: Ciorcail a thadhlaíonn — Cordaí agus ciorcail

1. Ciorcail a thadhlaíonn le chéile go seachtrach nó go hinmheánach

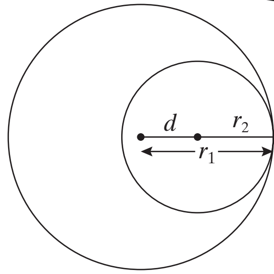
Tadhlaíonn ciorcail le chéile mura mbuaileann siad le chéile ach in aon phointe amháin.

Má thadhlaíonn siad le chéile **go seachtrach**, is ionann suim a gcuid gathanna agus an fad idir a gcuid lárphointí. Is ionann d sa léaráid ar dheis agus an fad idir an dá lárphointe.
Ós rud é go dtadhlaíonn an dá chiorcal go seachtrach,



$$d = r_1 + r_2$$

Má thadhlaíonn siad le chéile **go hinmheánach**, is ionann difríocht an dá gha iontu agus an fad idir an dá lárphointe.
Sa léaráid ar dheis,



$$d = r_1 - r_2$$

Sampla 1

Taispeáin go dtadhlaíonn an dá chiorcal seo go seachtrach le chéile:
$s_1 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$ agus $s_2 : x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$.

s_1: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0 \Rightarrow$ lárphointe $= (3, 2)$ agus
an ga $= \sqrt{3^2 + 2^2 - 11} = \sqrt{2}$

s_2: $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0 \Rightarrow$ lárphointe $= (-2, -3)$ agus
an ga $= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 19} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

An fad idir na lárphointí $= \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{50}$
$= 5\sqrt{2}$

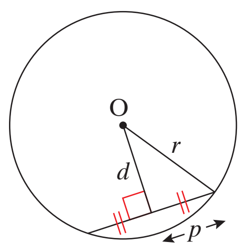
Suim an dá gha $= \sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Ós rud é go bhfuil an fad idir na lárphointí = suim na ngathanna $= 5\sqrt{2}$, tadhlaíonn an dá chiorcal seo go seachtrach le chéile.

2. Cordaí agus ciorcail

Léamar cheana féin an t-eolas an-úsáideach i dtaobh céimseatan ciorcail:

Déroinneann an t-ingear, ó lárphointe ciorcail go dtí corda, an corda.

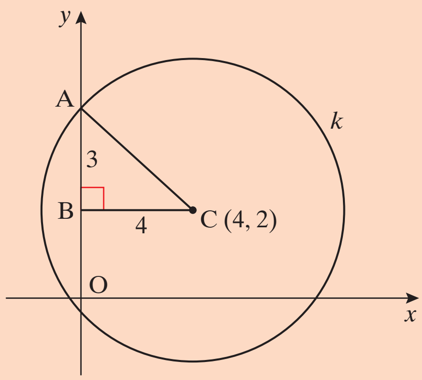


Sa léaráid ar dheis, is ionann d agus fad an ingir ón lárphointe, O, go dtí an corda.
Úsáidimid Teoirim Phíotagaráis chun d, r nó p a fháil, de réir mar a theastaíonn.

Sampla 2

Is é C(4, 2) lárphointe an chiorcail k. Gearrann an ciorcal corda 6 aonad ar fad den y-ais. Faigh cothromóid k.

Más é (4, 2) an lárphointe, is é 4 aonad fad ingear [BC].



$$|AB| = \tfrac{1}{2} \text{ fhad an chorda ar an } y\text{-ais}$$

$$\Rightarrow \quad |AB| = 3$$

$$|AC|^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow \quad |AC|^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad |AC| = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{ga} = 5$$

$\therefore$ Is é (4, 2) lárphointe an chiorcail agus 5 an ga.

Cothromóid an chiorcail: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Triailcheisteanna 4.6

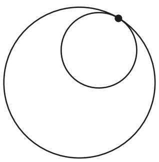
1. Faigh lárphointe agus ga gach ceann de na ciorcail seo:
s_1: $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ and s_2: $x^2 + y^2 - 14x - 16y + 77 = 0$.
Taispeáin ansin go dtadhlaíonn na ciorcail le chéile go seachtrach.

2. Taispeáin go dtadhlaíonn na ciorcail seo le chéile go hinmheánach:
$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 12x + 6y - 76 = 0$.

3. Faigh lárphointe agus ga gach ceann de na ciorcail seo:
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ and $x^2 + y^2 - 16x - 18y + 120 = 0$.
Taispeáin go dtadhlaíonn na ciorcail seo go seachtrach.

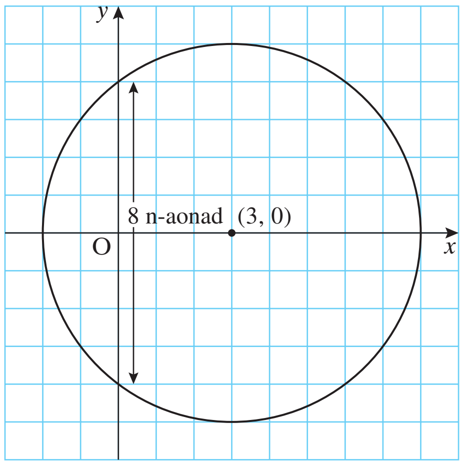
4. Déan amach cé acu go hinmheánach nó go seachtrach a thadhlaíonn na ciorcail seo le chéile:
$x^2 + y^2 - 16y + 32 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 18x + 2y + 32 = 0$.

5. Is dhá chiorcal iad $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 23 = 0$.



(i) Cruthaigh go dtadhlaíonn na ciorcail le chéile go hinmheánach.
(ii) Faigh cothromóid an chomhthadhlaí.
(iii) Uaidh sin, faigh comhordanáidí phointe thadhaill an dá chiorcal.

6. Taispeánann an léaráid ciorcal ar lárphointe dó (3, 0), ciorcal a ghearrann idirlíne 8 n-aonad ar an y-ais.



(i) Úsáid *Teoirim Phíotagaráis* chun fad an gha a fháil.

(ii) Uaidh sin, scríobh síos cothromóid an chiorcail san fhoirm

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

7. Is é (2, 3) lárphointe ciorcail. Is é 4 aonad fad an gha.

(i) Tarraing sceitse den chiorcal seo.

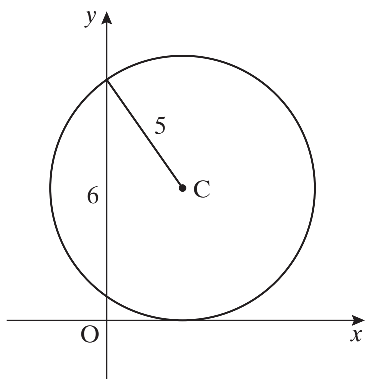
(ii) Taispeáin gurb é $4\sqrt{3}$ an fad idir na pointí ag a dtadhlaíonn an ciorcal leis an y-ais.

(iii) Faigh fad na hidirlíne a ghearrann an ciorcal den x-ais.

8. Is sa chéad cheathrú atá lárphointe ciorcail ar ga dó 5 aonad ar fad.
Tadhlaíonn an ciorcal leis an x-ais agus gearrann sé idirlíne 6 aonad ar fad ar an y-ais, mar a fheictear sa léaráid.

(i) Faigh cothromóid an lárphointe, C.

(ii) Faigh cothromóid an chiorcail.

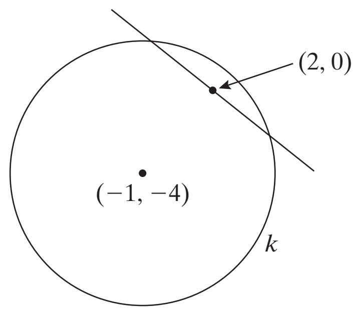


9. Tá lárphointe ciorcail áirithe sa chéad cheathrú. Tadhlaíonn sé leis an y-ais ag an bpointe (0, 2). Má ghearrann sé corda 3 aonad ar fad ar an x-ais, faigh cothromóid an chiorcail.

10. Is é $(-1, -4)$ lárphointe an chiorcail k.
Is é (2, 0) lárphointe corda atá $2\sqrt{5}$ ar fad.

(i) Faigh fad gha k.

(ii) Scríobh síos cothromóid k.



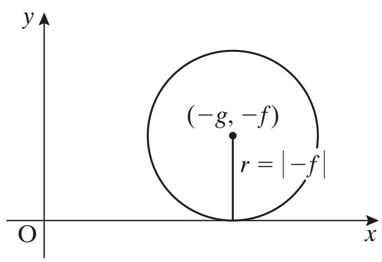
11. Gabhann ciorcal trí na pointí (0, 0) agus (0, 8).
Tá lárphointe an chiorcail sa chéad cheathrú. Is é 5 aonad fad an gha.
(i) Faigh comhordanáidí lárphointe an chiorcail.
(ii) Faigh cothromóid an chiorcail.

12. Is cothromóid ciorcail í $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.
Scríobh síos comhordanáidí lárphointe an chiorcail agus fad a gha.
Is cothromóid ciorcail eile í $x^2 + y^2 + 12x - 20y + k = 0,\ k \in R$.
Má thadhlaíonn an dá chiorcal seo le chéile go seachtrach, faigh luach k.

MÍR 4.7: Ciorcail a thadhlaíonn leis an x-ais nó y-ais

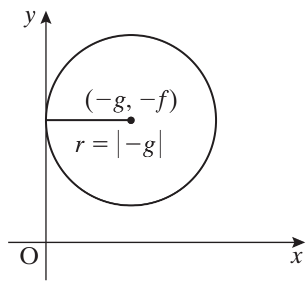
Má thadhlaíonn ciorcal leis an x-ais nó leis an y-ais, is ionann ga an chiorcail agus ceann de chomhordanáidí an lárphointe ann.

1. Ciorcal a thadhlaíonn leis an x-ais



$$\begin{aligned} &\text{Ga} = |-f| \\ \Rightarrow\ &\sqrt{g^2 + f^2 - c} = |-f| \\ \Rightarrow\ &g^2 + f^2 - c = f^2 \\ \Rightarrow\ &g^2 - c = 0 \\ \Rightarrow\ &g^2 = c \end{aligned}$$

2. Ciorcal a thadhlaíonn leis an y-ais

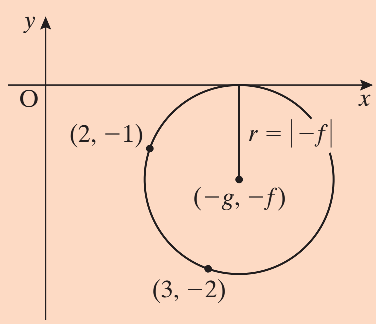


$$\begin{aligned} &\text{Ga} = |-g| \\ \Rightarrow\ &\sqrt{g^2 + f^2 - c} = |-g| \\ \Rightarrow\ &g^2 + f^2 - c = g^2 \\ \Rightarrow\ &f^2 - c = 0 \\ \Rightarrow\ &f^2 = c \end{aligned}$$

Sampla 1

Faigh cothromóidí an dá chiorcal a ghabhann trí na pointí (3, −2) agus (2, −1) agus a thadhlaíonn leis an x-ais.

Bíodh $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ mar chothromóid an chiorcail.



$(2, -1) \in$ den chiorcal

$\Rightarrow\ 4 + 1 + 2g(2) + 2f(-1) + c = 0$

$\Rightarrow\ 4g - 2f + c = -5 \ldots$ ①

$(3, -2) \in$ den chiorcal

$\Rightarrow\ 9 + 4 + 2g(3) + 2f(-2) + c = 0$

$\Rightarrow\ 6g - 4f + c = -13 \ldots$ ②

Má thadhlaíonn an ciorcal leis an x-ais, tá an ga $= |-f|$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{g^2 + f^2 - c} = |-f|$$
$$\Rightarrow \quad g^2 + f^2 - c = f^2$$
$$\Rightarrow \quad g^2 = c \ldots ③$$

Anois úsáidimid cothromóidí ① agus ② chun fáil réidh le f.

①: $4g - 2f + c = -5$ ① × 2: $8g - 4f + 2c = -10$

②: $6g - 4f + c = -13$ ②: $6g - 4f + c = -13$

$2g + c = 3$

$\Rightarrow c = -2g + 3$

Anois, cuirimid $(-2g + 3)$ isteach in áit c i gcothromóid ③

③: $g^2 = c$

$$\Rightarrow \quad g^2 = -2g + 3$$
$$\Rightarrow \quad g^2 + 2g - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (g-1)(g+3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad g = 1 \quad \text{nó} \quad g = -3$$

$g = 1 \quad \Rightarrow \quad c = -2(1) + 3 \quad \Rightarrow \quad c = 1$

$g = -3 \quad \Rightarrow \quad c = -2(-3) + 3 \quad \Rightarrow \quad c = 9$

Má chuirimid na luachanna seo isteach in áit g agus c i gcothromóid ①, faighimid:

$4g - 2f + c = -5 \ldots ①$

$g = 1$ agus $c = 1$: $4(1) - 2f + 1 = -5$

$\Rightarrow \quad -2f = -10 \quad \Rightarrow \quad f = 5$

$g = -3$ agus $c = 9 \quad \Rightarrow \quad 4(-3) - 2f + 9 = -5$

$\Rightarrow \quad -12 - 2f + 9 = -5$

$\Rightarrow \quad -2f = -2 \quad \Rightarrow \quad f = 1$

Is iad an dá luach ar g, f agus c ná

Ciorcal 1: $g = 1, f = 5$ agus $c = 1$ **Ciorcal 2:** $g = -3, f = 1$ agus $c = 9$

Ciorcal 1: $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 1 = 0$

Ciorcal 2: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$

Triailcheisteanna 4.7

1. Is é $(3, -4)$ lárphointe ciorcail. Is tadhlaí í an x-ais leis an gciorcal.
   Faigh cothromóid an chiorcail.

2. Is tadhlaí í an y-ais leis an gciorcal, k.
   Más é $(-3, 2)$ lárphointe k, faigh cothromóid an chiorcail.

3. Is iad $(5, y)$ comhordanáidí lárphointe ciorcail, $y > 0$.
Is tadhlaithe iad an x-ais agus y-ais leis an gciorcal seo.
(i) Scríobh síos luach y.
(ii) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.
(iii) Scríobh síos cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal atá comhthreomhar leis an y-ais.

4. Is tadhlaithe iad an x-ais agus an líne $y = 8$ leis an gciorcal k.
Tá lárphointe an chiorcail ar an líne $2x - 3y = 0$.
(i) Tarraing sceitse garbh den chiorcal.
(ii) Scríobh síos fad an gha.
(iii) Faigh comhordanáidí lárphointe an chiorcail.
(iv) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

5. Is tadhlaithe le ciorcal iad an y-ais agus an líne $x = 8$.
Tá lárphointe an chiorcail ar an líne $2x - y - 3 = 0$.
(i) Scríobh síos fad gha an chiorcail.
(ii) Faigh comhordanáidí lárphointe an chiorcail.
(iii) Faigh cothromóid an chiorcail.

6. Is tadhlaí í an x-ais leis an gciorcal $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
Taispeáin go bhfuil $g^2 = c$.
Is tadhlaí í an x-ais leis an gciorcal k ag an bpointe $(4, 0)$.
Má ghabhann an ciorcal tríd an bpointe $(1, 3)$, faigh cothromóid an chiorcail.

7. Is tadhlaí í an y-ais leis an gciorcal $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
Cruthaigh go bhfuil $f^2 = c$.
Tadhlaíonn ciorcal leis an y-ais ag an bpointe $(0, -3)$ agus gabhann sé tríd an bpointe $(4, 1)$.
Faigh cothromóid an chiorcail seo.

8. Is tadhlaithe iad an x-ais agus an líne $y = 10$ le ciorcal.
Má ghabhann an ciorcal tríd an bpointe $(1, 5)$, faigh cothromóidí an dá chiorcal fhéideartha.

CUIR TRIAIL ORT FÉIN 4

Ceisteanna A

1. Tá lárphointe $(-1, 5)$ ag ciorcal agus gabhann sé tríd an bpointe $(1, 2)$.
(i) Faigh fad gha an chiorcail.
(ii) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

2. Maidir leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$, faigh comhordanáidí an lárphointe agus fad an gha. Uaidh sin, scríobh síos cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó an bunphointe agus a bhfuil a gha ar comhfhad leis an gciorcal tugtha.

3. Faigh cothromóid an chiorcail ar lárphointe dó $(2, 3)$, ciorcal a thadhlaíonn leis an x-ais.

4. Taispeáin gur tadhlaí í an líne $3x - 4y + 25 = 0$ leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 25$.

5. Is iad $A(-1, -3)$ agus $B(3, 1)$ foircinn an trastomhais ar chiorcal áirithe.
Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

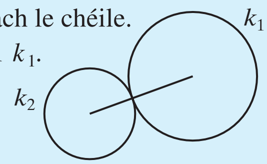
6. Tadhlaíonn an ciorcal $(x - 5)^2 + y^2 = 36$ leis an x-ais ag P agus Q.
Faigh comhordanáidí P agus Q.

7. Scríobh síos lárphointe agus ga an chiorcail

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$$

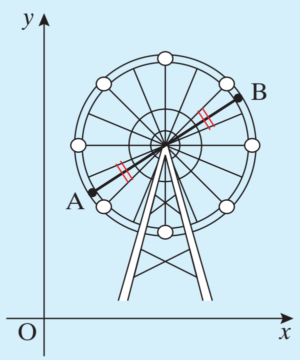
Tarraing sceitse den chiorcal seo.
Más tadhlaí í an líne $x = k$ leis an gciorcal seo, faigh dhá luach k.

8. Tadhlaíonn na ciorcail k_1 agus k_2 go seachtrach le chéile.
Tá lárphointe $(8,5)$ agus ga 6 ag ciorcal k_1.
Tá lárphointe $(2, -3)$ ag ciorcal k_2.
Oibrigh amach ga k_2.



9. Taispeáin go bhfuil $(0,0)$ taobh istigh den chiorcal $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 30$.

10. Thóg Daithí grianghraf den Roth Mór ag an Seó Aonaigh. Ag úsáid na n-aiseanna tugtha, rinne sé meastachán gurbh é $(1,6)$ A agus gurbh é $(11,10)$ B. Faigh cothromóid an chuid chiorclach den Roth Mór trí A agus B.



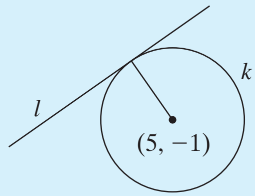
Ceisteanna B

1. Scríobh síos lárphointe agus ga an chiorcail

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0.$$

Uaidh sin, faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal seo ag an bpointe (5, 4).

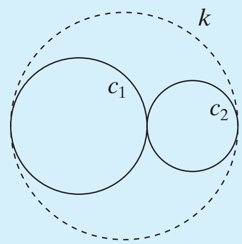
2. Tá an lárphointe $(5, -1)$ ag an gciorcal k.
Is tadhlaí í an líne $l: 3x - 4y + 11 = 0$ le k.
(i) Taispeáin gurb é 6 fad gha k.
(ii) Is tadhlaí í an líne $x + py + 1 = 0$ le k freisin.
Faigh dhá luach fhéideartha ar p.



3. Faigh an dá luach ar k más tadhlaí í $8x + 3y + k = 0$ leis an gciorcal $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 12 = 0$.

4. Tá an pointe A(5,2) ar an gciorcal k: $x^2 + y^2 + px - 2y + 5 = 0$.
(i) Faigh luach p.
(ii) Trasnaíonn an líne $x - y - 1 = 0$ an ciorcal k.
Faigh comhordanáidí na bpointí trasnaithe.

5. Is dhá chiorcal iad $c_1: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ agus $c_2: x^2 + y^2 - 14x - 2y + 41 = 0$.
(i) Cruthaigh go dtadhlaíonn c_1 agus c_2 le chéile go seachtrach.
(ii) Is ciorcal eile é k.
Tadhlaíonn c_1 agus c_2 go hinmheánach le k.
Faigh cothromóid k.



6. Tá an chothromóid $x^2 + y^2 - 10y + 20 = 0$ ag an gciorcal ar lárphointe dó C.
(i) Scríobh síos comhordanáidí C.
(ii) Faigh ga an chiorcail. Fág do fhreagra i bhfoirm shurda.
Tá cothromóid $y = 2x$ ag líne.
(iii) Taispeáin gur tadhlaí í an líne $y = 2x$ leis an gciorcal tugtha agus faigh comhordanáidí an phointe tadhaill.

7. Faigh lárphointe agus ga an dá chiorca $x^2 + y^2 = 4$ agus $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$. Taispeáin go dtadhlaíonn siad le chéile go seachtrach.
Scríobh síos cothromóid an chomhthadhlaí leis na ciorcail seo.

8. Tá na pointí (2, 5) agus $(-2, 1)$ ar an gciorcal $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + 7 = 0$.
(i) Déan dhá chothromóid in g agus f.
(ii) Réitigh an péire cothromóidí chun luachanna g agus f a fháil.
(iii) Uaidh sin, faigh cothromóid an chiorcail agus scríobh síos a lárphointe agus a gha.

9. Tá an chothromóid $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ ag ciorcal ar lárphointe dó C.
Scríobh síos (i) comhordanáidí C
(ii) ga an chiorcail.
Deimhnigh go bhfuil N(0, −2) ar an gciorcal.
Is iad (2,6) comhordanáidí an phointe P.
Faigh fad an tadhlaí a tharraingítear ó P go dtí an ciorcal.

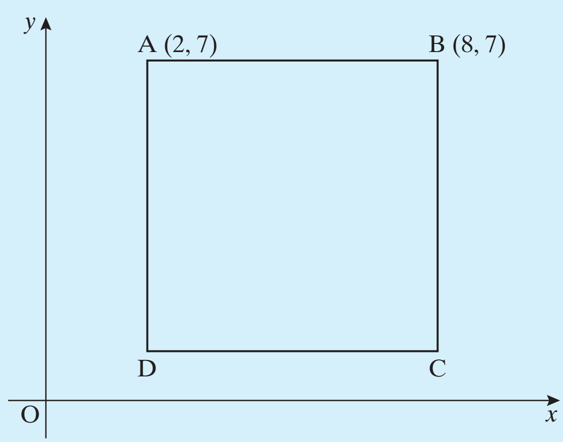
10. Tá lárphointe ciorcail ar an líne $x - 2y - 1 = 0$ leis an gciorcal.
Is tadhlaithe iad an x-ais agus an líne $y = 6$ leis an gciorcal.
Faigh cothromóid an chiorcail seo.

Ceisteanna C

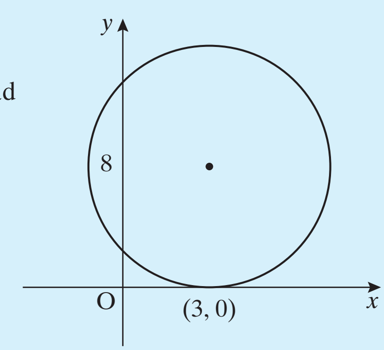
1. Faigh fad na hidirlíne a ghearrann an ciorcal $x^2 + y^2 - 8x - 7y + 12 = 0$ den y-ais.
Faigh, freisin, fad an tadhlaí leis an gciorcal ón bpointe (9, 2).

2. Scríobh síos cothromóid aon líne atá comhthreomhar leis an líne $3x - 4y + 1 = 0$.
Uaidh sin, faigh cothromóidí an dá thadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ atá comhthreomhar leis an líne $3x - 4y + 1 = 0$.

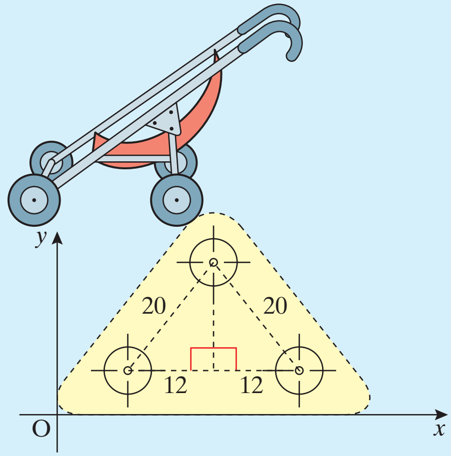
3. Is reanna cearnóige iad A, B, C agus D.
Is iad (2,7) agus (8,7) comhordanáidí A agus B faoi seach.
(i) Scríobh síos comhordanáidí C agus D.
(ii) Scríobh síos comhordanáidí lárphointe an chiorcail a ghabhann trí A, B, C agus D.
(iii) Faigh cothromóid an chiorcail is mó is féidir a tharraing taobh istigh den chearnóg ABCD.



4. Tá lárphointe ciorcail sa chéad cheathrú.
Is tadhlaí í an x-ais leis an gciorcal ag an bpointe (3, 0).
Gearrann an ciorcal an y-ais ag pointí atá 8 n-aonad ar fad óna chéile. Faigh cothromóid an chiorcail.



5. Úsáidtear pláta miotail chun teanntóga naíchóiste a neartú. Tá ga 4 aonad ag na poill. Déanann a lárphointí triantán comhchosach a bhfuil sleasa 20, 20 agus 24 aonad air.
Más é $(x - 20)^2 + (y - 18)^2 = 16$, cothromóid imeall an phoill mhullaigh, faigh cothromóidí imill an dá pholl eile.



6. Gabhann ciorcal tríd an mbunphointe agus tríd an bpointe (4, 2).
Má tá an lárphointe ar an líne $x + y = 1$, faigh cothromóid an chiorcail.

7. Is tadhlaí í an líne $3x - y - 6 = 0$ le ciorcal ag an bpointe (3, 3).
Tá an pointe (4,1) ar an gciorcal freisin.
(i) Tarraing sceitse garbh den chiorcal.
(ii) Faigh cothromóid an chiorcail.

> Gabhann an t-ingear le tadhlaí, ag an bpointe tadhaill, trí lár an chiorcail.

8. Trasnaíonn ciorcal an x-ais ag na pointí (1, 0) agus (7, 0).
Má thadhlaíonn an ciorcal leis an y-ais dheimhneach, faigh cothromóid an chiorcail.

9. Is tadhlaí í an y-ais leis an gciorcal $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
(i) Cruthaigh go bhfuil $f^2 = c$
(ii) Faigh cothromóidí na gciorcal a ghabhann trí na pointí $(-3, 6)$ agus $(-6, 3)$ agus ar tadhlaí leo í an y.

10. Is í $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + b^2 = 0$ cothromóid ciorcail.
(i) Faigh lárphointe agus ga an chiorcail.
(ii) Cruthaigh go dtadhlaíonn an ciorcal leis an y-ais.
(iii) Faigh cothromóidí an dá chiorcal a ghabhann trí na pointí (1, 2) agus (2, 3) agus a thadhlaíonn leis an y-ais.
(iv) Faigh an fad idir lárphointí na gciorcal seo.

Achoimre ar Phríomhphointí

Cothromóid ciorcail

Cothromóid ciorcail ar lárphointe dó $(0, 0)$ agus ar ga dó r:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}.$$

Cothromóid ciorcail ar lárphointe dó (h, k) agus ar ga dó r:

$$\boldsymbol{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

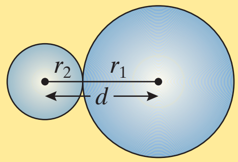
Lárphointe agus ga ciorcail a fháil ó chothromóid an chiorcail

Léiríonn an chothromóid $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ciorcal

(i) ar lárphointe dó $(-g, -f)$ (ii) ar ga dó $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

Ciorcail a thadhlaíonn le chéile

Má thadhlaíonn dhá chiorcal go seachtrach le chéile,

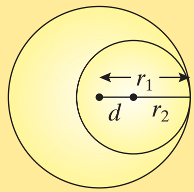


$$\boldsymbol{d = r_1 + r_2}$$

áit arb é d an fad idir an da lárphointe.

Má thadhlaíonn dhá chiorcal go hinmheánach le chéile,

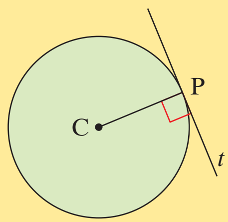
$$\boldsymbol{d = r_1 - r_2}.$$



Tadhlaithe agus ciorcail

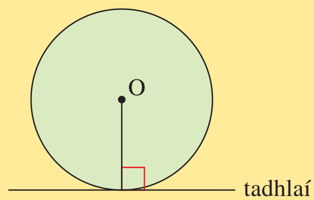
Chun cothromóid an tadhlaí, t, a fháil

(i) faigh fána CP
(ii) faigh fána an tadhlaí, t
(iii) úsáid an pointe P agus fána t.



Tá 90° san uillinn idir tadhlaí agus ga.

Is ionann ga an chiorcail agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí an tadhlaí.



Comhchorda – comhthadhlaí

Maidir leis na ciorcail s_1 agus s_2, scríofa i bhfoirm $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $s_1 - s_2 = 0$ cothromóid an **chomhchorda** nó an **chomhthadhlaí**.

Ciorcail a thadhlaíonn leis an x-ais nó leis an y-ais

Má thadhlaíonn an ciorcal $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(i) leis an x-ais, ansin $\boldsymbol{g^2 = c}$ agus ga $= |-\boldsymbol{f}|$
(ii) leis an y-ais, ansin $\boldsymbol{f^2 = c}$ agus ga $= |-\boldsymbol{g}|$.

caibidil 5 Triantánacht 2

Focail Thábhachtacha

ionannas   ciorcal an aonaid   riail an tsínis   riail an chomhshínis   uillinn chomhshuite
foirm surda   uillinn dhúbailte   foirmlí na leathuillinneacha   foirmlí na dtáirgí $\sin^{-1} x$ (arc sin x)

MÍR 5.1: Ionannais triantánachta

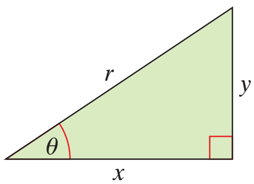
Tá cur amach againn cheana féin ar na trí bhunchóimheas triantánachta: síneas, comhshíneas agus tangant.

Mar seo a shainmhínítear trí chóimheas a bhfuil baint acu leo sin:

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

I gcás an triantáin ar dheis

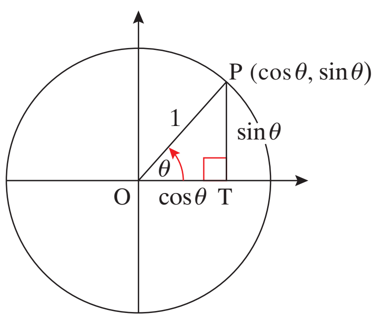
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r} = \frac{y}{r} \times \frac{r}{x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$



$$\Rightarrow \quad \mathbf{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

Ionannas a thugtar ar an ngaol seo idir chóimheasa triantánachta mar gur fíor é i gcás **gach luacha** ar θ.

Thaispeánamar tamall ó shin gur leis na comhordanáidí **($\cos\theta$, $\sin\theta$)** a dhéantar pointe ar bith ar **chiorcal an aonaid** a shainiú.



I gcás na léaráide ar dheis $|OP| = 1$

$$\Rightarrow \quad |OP|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(\cos\theta - 0)^2 + (\sin\theta - 0)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$ … (an dá thaobh a chearnú) *

Roinntear gach téarma den chothromóid $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ar $\cos^2\theta$, agus is é an freagra:

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$$

Cuirtear de ghlanmheabhair na hionannais sa bhosca seo a leanas mar go mbaintear an-leas astu agus ionannais níos casta á gcruthú.

1. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$	**2.** $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	**3.** $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
4. $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	**5.** $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	**6.** $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

Leanann as ionannas **5** go bhfuil $\mathbf{\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta}$ agus $\mathbf{\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta}$.

Mar seo is gnách ionannais a chruthú: tosú leis an taobh clé agus a thaispeáint, le hionannais atá ar eolas againn, gur féidir é sin a shimpliú i bhfoirm an taoibh dheis.

Is léiriú air sin iad na samplaí seo a leanas:

Sampla 1

Cruthaigh na hionannais seo:

(i) $\sec A - \tan A \sin A = \cos A$ (ii) $\tan\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = \sin\theta.$

(i) Gach cóimheas a athrú ina shíneas agus ina chomhshíneas ar dtús.

$$\sec A - \tan A \sin A = \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}\sin A$$
$$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin^2 A}{\cos A}$$
$$= \frac{1-\sin^2 A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A}{\cos A} = \cos A = \text{Taobh na láimhe deise (TLD)}$$

(ii) $$\tan\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\sqrt{\cos^2\theta} \ \dots\ 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\frac{\cos\theta}{1} = \sin\theta = \text{TLD}$$

Sampla 2

Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{\tan\theta + \sin\theta}{\sec\theta + 1} = \sin\theta.$

$$\frac{\tan\theta+\sin\theta}{\sec\theta+1} = \frac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1}}{\dfrac{1}{\cos\theta}+1}$$
$$= \frac{\sin\theta + \sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta} \ \dots$$ (iolraigh faoi $\cos\theta$ gach téarma os cionn na líne agus faoina bun)
$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)} = \sin\theta = \text{TLD}$$

Ionannais a chruthaítear le cabhair *Riail an tSínis* nó *Riail an Chomhshínis*

De réir *Riail an tSínis* tá $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

Is féidir é sin a scríobh mar seo chomh maith: $\sin A = \dfrac{a \sin B}{b}$

De réir *Riail an Chomhshínis* tá $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Is féidir é sin a scríobh mar seo chomh maith: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Ionannais a mbíonn na sleasa a, b nó c ar thriantán i gceist iontu, is gnách iad a chruthú le cabhair *Riail an tSínis* nó *Riail an Chomhshínis*.

Sampla 3

Cruthaigh i dtaobh triantáin ar bith go bhfuil $c \cos B - b \cos C = \dfrac{c^2 - b^2}{a}$

De réir Riail an Chomhshínis tá

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \text{ agus } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\Rightarrow \quad c \cos B - b \cos C = \frac{c(c^2 + a^2 - b^2)}{2ac} - \frac{b(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

$$= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2a}$$

$$= \frac{c^2 + a^2 - b^2 - a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \frac{2c^2 - 2b^2}{2a}$$

$$= \frac{c^2 - b^2}{a} = \text{TLD}$$

Triailcheisteanna 5.1

Cruthaigh na hionannais seo a leanas:

1. $\cos A \tan A = \sin A$
2. $\sin \theta \sec \theta = \tan \theta$
3. $\sin \theta \tan \theta + \cos \theta = \sec \theta$
4. $\dfrac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \tan \theta$
5. $\sec A - \sin A \tan A = \cos A$
6. $1 - \tan^2 \theta \cos^2 \theta = \cos^2 \theta$
7. $\dfrac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$
8. $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
9. $\dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\tan \theta} = \cos \theta$
10. $(1 + \tan^2 \theta) \cos^2 \theta = 1$
11. $(\cos \theta + \sin \theta)^2 + (\cos \theta - \sin \theta)^2 = 2.$
12. $(1 + \tan^2 A)(1 - \sin^2 A) = 1$
13. $(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1$
14. $\dfrac{1 - \cos^2 A}{\sin A \cos A} = \tan A$
15. $\dfrac{1}{1 - \sin A} + \dfrac{1}{1 + \sin A} = 2 \sec^2 A$
16. $(1 - \sin^2 A) \tan^2 A + \cos^2 A = 1$
17. $\operatorname{cosec}^2 \theta(\tan^2 \theta - \sin^2 \theta) = \tan^2 \theta$
18. $(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = \cos A$

Cruthaigh na hionannais seo a leanas le cabhair *Riail an tSínis* nó *Riail an Chomhshínis*:

19. $b \cos C + c \cos B = a$

20. $bc \cos A + ca \cos B = c^2$

21. $c = b \cos A + a \cos B$

22. $a \cos B - b \cos A = \dfrac{a^2 - b^2}{c}$

23. $ab \cos C - ac \cos B = b^2 - c^2$

24. $c \cos B - b \cos C = \dfrac{c^2 - b^2}{a}$

25. Cruthaigh, le cabhair *Riail an tSínis* ,go bhfuil $\dfrac{\sin A - \sin B}{\sin B} = \dfrac{a - b}{b}$.

26. Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$.

MÍR 5.2: Uillinneacha comhshuite

Más dhá uillinn iad A agus B, **uillinneacha comhshuite** a thugtar ar $A + B$) agus $(A - B)$.

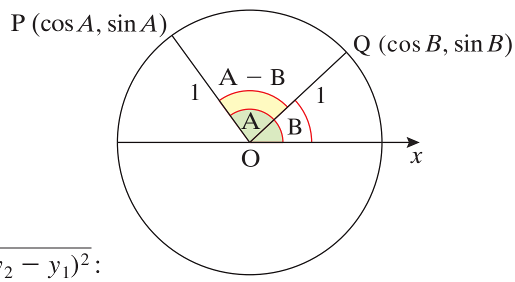
Is éard a dhéanfaimid sa roinn seo ná foirmlí le haghaidh $\cos(A \pm B)$, $\sin(A \pm B)$ agus $\tan(A \pm B)$ a bhunú trína scríobh i dtéarmaí $\sin A$, $\cos A$ and $\tan A$.

Bunaímis an fhoirmle le haghaidh $\cos(A - B)$ ar dtús, agus cruthaímis na foirmlí eile ansin le cabhair ionannas atá bunaithe cheana.

An fhoirmle le haghaidh cos($A - B$)*

Déanadh an ga [OP] an uillinn A leis an x-ais dheimhneach agus déanadh an ga [OQ] an uillinn B léi.

$|\angle POQ| = A - B$



Gheobhaimid |PQ| anois ar dhá mhodh éagsúla:

1. foirmle an fhaid idir dhá phointe

2. riail an chomhshínis.

1. Is éard a fhaighimid leis an bhfoirmle $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$:

$$|PQ|^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2$$
$$= \cos^2 A - 2 \cos A \cos B + \cos^2 B + \sin^2 A - 2 \sin A \sin B + \sin^2 B$$

Ach $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ agus $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$.

$$\Rightarrow \quad |PQ|^2 = 1 - 2 \cos A \cos B + 1 - 2 \sin A \sin B$$
$$= 2 - 2(\cos A \cos B + \sin A \sin B) \ \dots \ ①$$

2. Má thriailimid |PQ| a fháil ansin le cabhair Riail an Chomhshínis, is éard a bheidh againn:

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP|\,|OQ| \cos(A - B)$$
$$= 1 + 1 - 2(1)(1) \cos(A - B) \ \dots \ |OP| = |OQ| = 1 = \text{ga}$$
$$= 2 - 2 \cos(A - B) \ \dots \ ②$$

Cothromaímid an dá luach ar $|PQ|^2$ ansin go bhfaighimid é seo:

$$2 - 2(\cos A \cos B + \sin A \sin B) = 2 - 2 \cos (A - B)$$
$$\Rightarrow \quad -(\cos A \cos B + \sin A \sin B) = -\cos(A - B)$$

*$\Rightarrow$ **$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ ...... (i)**

Ó tá foirmle $\cos(A - B)$, bunaithe againn, gheobhaimid na foirmlí eile uaithi sin ach leas a bhaint as na hionannais ar dheis.

$\cos(-B) = \cos B$
$\sin(-B) = -\sin B$
$\sin(90° - A) = \cos A$
$\cos(90° - A) = \sin A$

Nóta: Aon fhoirmle atá marcáilte le réiltín (*), d'fhéadfadh go n-iarrfaí ort í a dhíorthú i scrúdú na hArdteistiméireachta.

An fhoirmle le haghaidh cos($A + B$)*

Gheobhaimid an fhoirmle le haghaidh $\cos(A + B)$, má chuirimid $-B$ in áit (B) i bhfoirmle **(i)** ar an leathanach roimhe seo:

$$\begin{aligned} \cos(A - B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ \Rightarrow \quad \cos[A - (-B)] &= \cos A \cos(-B) + \sin A \sin(-B) \\ &= \cos A \cos B + \sin A (-\sin B) \end{aligned}$$

$$*\Rightarrow \quad \mathbf{\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B} \;\ldots\ldots\; \textbf{(ii)}$$

Na foirmlí le haghaidh sin($A + B$) agus sin($A - B$)

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ … from **(i)**

Más í foirmle $\sin(A + B)$, atá uainn, cuirimid $(90° - A)$ in áit A.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \cos(A - B) &= \cos[(90° - A) - B] = \cos(90° - A)\cos B + \sin(90° - A)\sin B \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \Rightarrow \quad \cos[90° - (A + B)] &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned}$$

$$*\Rightarrow \quad \mathbf{\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B} \;\ldots\ldots\; \textbf{(iii)}$$

Má chuirtear $(-B)$ in áit B i bhfoirmle **(iii)**, is éard a fhaightear:

$$\sin(A - B) = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$

$$*\Rightarrow \quad \mathbf{\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B} \;\ldots\ldots\; \textbf{(iv)}$$

$\sin(-B) = -\sin B$

Na foirmlí le haghaidh tan($A + B$) agus tan($A - B$)

Is féidir slonn ar $\tan(A + B)$ agus slonn ar $\tan(A - B)$ a bhaint as na foirmlí **(i)** go dtí **(iv)** atá díreach bunaithe againn:

$$\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

Roinnimis gach téarma san uimhreoir agus san ainmneoir ar $\cos A \cos B$.

$$\tan(A + B) = \frac{\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\sin B}{\cos B}}{1 - \dfrac{\sin A}{\cos A}\dfrac{\sin B}{\cos B}}$$

$$*\Rightarrow \quad \mathbf{\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}} \;\ldots\ldots\; \textbf{(v)}$$

Is éard a fhaightear nuair a chuirtear $(-B)$ in áit B i bhfoirmle **(v)**:

$$\mathbf{\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}} \;\ldots\ldots\; \textbf{(vi)}$$

$\tan(-B) = -\tan B$

Foirmlí na n-uillinneacha comhshuite

$$\mathbf{\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B}$$

$$\mathbf{\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B}$$

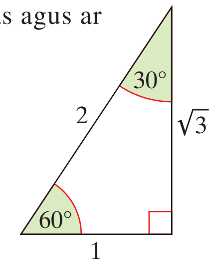
$$\mathbf{\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

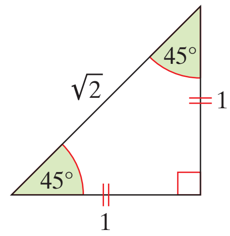
$$\mathbf{\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

$$\mathbf{\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B};\ \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}}$$

Nóta: Na luachanna beachta ar shíneas, ar chomhshíneas agus ar thangant na n-uillinneacha 30°, 45° agus 60°, tugtar iad ar leathanach 13 de *Foirmlí agus Táblaí.*

Féadfaimid freisin cóimheasa triantánachta beachta 30°, 45° agus 60° a fháil le cabhair na dtriantán ar dheis.





Sampla 1

Scríobh i bhfoirm surda (i) sin 15° (ii) tan 105°

(i) $$\begin{aligned}\sin 15° &= \sin(60° - 45°)\\ &= \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ii) $$\begin{aligned}\tan 105° &= \tan(60° + 45°)\\ &= \frac{\tan 60° + \tan 45°}{1 - \tan 60° \tan 45°}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\,\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} \ldots\end{aligned}$$ rinneamar uimhir chóimheasta den ainmneoir

$$= -2 - \sqrt{3}$$

$$\tan 60° = \sqrt{3} \qquad \tan 45° = 1$$

Sampla 2

Má tá $\tan A = \frac{1}{4}$ agus $\tan B = \frac{3}{5}$, faigh luach $(A + B)$ gan áireamhán a úsáid.

$$\begin{aligned}\tan(A + B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}\\ &= \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{4}\,\frac{3}{5}}\\ &= \frac{5+12}{20-3} \ldots\end{aligned}$$ iolraigh faoi 20 gach téarma os cionn na líne agus faoina bun

$$\Rightarrow \quad \tan(A + B) = \frac{17}{17} = 1 \quad \Rightarrow \quad (A + B) = \tan^{-1} 1$$
$$= 45°$$

Sampla 3

Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B$.

$$\frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B}$$

Roinn gach téarma san uimhreoir agus san ainmneoir ar $\cos A \cos B$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{\dfrac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}}$$

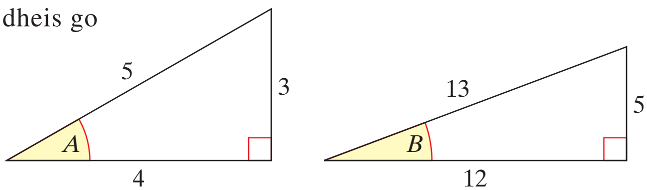
$$= \frac{\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\sin B}{\cos B}}{1} = \tan A + \tan B$$

Triailcheisteanna 5.2

1. Scríobh luach gach ceann díobh seo i bhfoirm surda:
(i) $\cos 15°$ (ii) $\sin 75°$ (iii) $\cos 105°$

2. Scríobh gach ceann díobh seo i bhfoirm surda:
(i) $\tan 15°$ (ii) $\sin 135°$ (iii) $\tan 75°$

3. Bain leas as na triantáin ar dheis go bhfaighidh tú a luach seo:
(i) $\cos(A+B)$
(ii) $\tan(A-B)$.



4. I gcás gach ceann díobh seo, scríobh ina fheidhm ag uillinn chomhshuite é, agus faigh a luach:
(i) $\sin 45° \cos 15° + \cos 45° \sin 15°$ (ii) $\cos 40° \cos 50° - \sin 40° \sin 50°$
(iii) $\cos 80° \cos 20° + \sin 80° \sin 20°$ (iv) $\dfrac{\tan 25° + \tan 20°}{1 - \tan 25° \tan 20°}$.

5. Simpligh gach ceann díobh seo:
(i) $\dfrac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$ (ii) $\sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta$

6. Bain leas as foirmlí na n-uillinneacha comhshuite go dtaispeánfaidh tú an méid seo:
(i) $\sin(90° - A) = \cos A$ (ii) $\cos(90° + A) = -\sin A$.

7. Má tá $\tan(A-B) = 2$ agus $\tan B = \frac{1}{4}$, scríobh $\tan A$ ina chodán.

8. Má tá $\tan A = \frac{1}{2}$ agus $\tan B = \frac{1}{3}$, áit a bhfuil A agus $B < \dfrac{\pi}{2}$ faigh luach na huillinne $(A+B)$.

9. Má tá $\tan(A+B) = 1$ agus $\tan A = \frac{1}{3}$, scríobh $\tan B$ ina chodán.

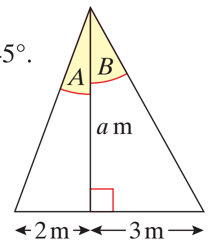
10. Má tá $\sin x = \frac{1}{2}$ agus $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, faigh luach $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ gan áireamhán a úsáid.

11. Scríobh luach $\tan 15°$ i bhfoirm surda.
Uaidh sin scríobh luach $\tan^2 15°$ san fhoirm $p + q\sqrt{r}r$, áit ar slánuimhreacha iad p, q agus r.

12. Cruthaigh go bhfuil $\tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = \dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}$.

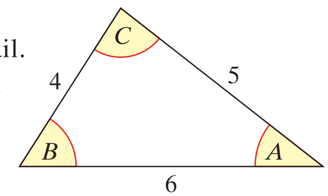
13. Taispeáin go bhfuil $\cos(A + B)\cos B + \sin(A + B)\sin B = \cos A$.

14. Tá an triantán ar dheis a m ar airde.
Is uillinneacha iad A agus B sa chaoi is go bhfuil $A + B = 45°$.
Bain leas as an bhforbart ar $\tan(A + B)$, go bhfaighidh tú luach h nó faigh ar shlí ar bith eile é.



15. Má tá $\sin A = \sin(A + 30°)$, taispeáin go bhfuil $\tan A = 2 + \sqrt{3}$.

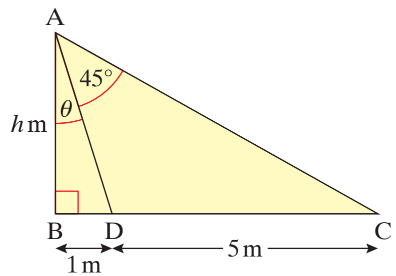
16. Tá sleasa 4, 5 agus 6 ar thriantán.
Is iad A, B agus C uillinneacha an triantáin, mar atá le feiceáil.
(i) Bain leas as riail an chomhshínis le taispeáint go bhfuil $\cos A + \cos C = \frac{7}{8}$
(ii) Taispeáin go bhfuil $\cos(A + C) = -\frac{9}{16}$.



17. Sa léaráid taispeántar triantán dronuilleach ABC ar a bhfuil $|AB| = h$ m agus $|BC| = 6$ m.
Tá an pointe D ar [BC] sa chaoi is go bhfuil $|BD| = 1$ m agus $|DC| = 5$ m.

$$|\angle CAD| = 45° \text{ agus } |\angle BAD| = \theta.$$

Bain leas as an bhfoirmle le haghaidh $\tan(\theta + 45°)$, go bhfaighidh tú an dá luach a d'fhéadfadh a bheith ar h, nó faigh ar shlí ar bith eile iad.



MÍR 5.3: Foirmlí na n-uillinneacha dúbailte agus na leathuillinneacha

Ba é ábhar na roinne roimpi seo foirmlí na n-uillinneacha comhshuite a dhéantar leis na huillinneacha A agus B.

Má chuirimid A in áit B gheobhaimid foirmlí an-úsáideacha le haghaidh $\sin 2A$, $\cos 2A$ agus $\tan 2A$.

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

Má chuirimid A in áit B gheobhaimid:

$$\sin 2A = \sin(A + A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A = 2\sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos(A + A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\tan 2A = \tan(A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Ach leas a bhaint as an ionannas $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, we get two further identities for $\cos 2A$:

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A\\ &= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A\\ &= 1 - 2\sin^2 A\end{aligned}$$

nó

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A\\ &= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)\\ &= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A\\ &= 2\cos^2 A - 1\end{aligned}$$

Foirmlí na n-uillinneacha dúbailte

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A \qquad \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

Ach atheagar a chur ar na foirmlí le haghaidh $\cos 2A$, féadfaimid $\cos^2 A$ agus $\sin 2A$ a scríobh i dtéarmaí $\cos 2A$, mar leanas:

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \quad \text{nó} \quad \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\Rightarrow\ 2\cos^2 A = 1 + \cos 2A \qquad \Rightarrow\ 2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$$

$$\Rightarrow\ \cos^2 A = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2A) \qquad \Rightarrow\ \sin^2 A = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2A)$$

$$\cos^2 A = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2A) \qquad \sin^2 A = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2A)$$

Sampla 1

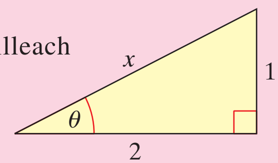
Scríobh $\sin 3A$ i dtéarmaí $\sin A$.

$$\begin{aligned}
\sin 3A &= \sin(2A + A)\\
&= \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A\\
&= 2\sin A\cos A\cos A + (1 - 2\sin^2 A)(\sin A)\\
&= 2\sin A(\cos^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A\\
&= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A\\
&= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2\sin^3 A\\
\Rightarrow\ \sin 3A &= 3\sin A - 4\sin^3 A
\end{aligned}$$

Sampla 2

Más géaruillinn θ agus má tá $\tan\theta = \frac{1}{2}$, faigh a luach seo:
(i) $\sin 2\theta$ (ii) $\cos 2\theta$.

Má tá $\tan\theta = \frac{1}{2}$, tá an t-eolas seo le baint as an triantán dronuilleach sa léaráid ar dheis:



$$x^2 = 2^2 + 1^2 \ \Rightarrow\ x^2 = 5 \ \Rightarrow\ x = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ agus } \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(i) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

(ii) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Má bhíonn $\cos 2A$ san ionannas a bhíonn le cruthú, ní féidir é a dhéanamh mura roghnaítear an fhoirmle $\cos 2A$. Is gnách go gcaithimid roghnú idir $(2\cos^2 A - 1)$ agus $(1 - 2\sin^2 A)$.

Más é $1 + \cos 2A$ a thugtar dúinn, is féidir 1 a chealú ach $(2\cos 2A - 1)$ a roghnú le haghaidh $\cos 2A$. Amhlaidh $1 + \cos 2A = 1 + 2\cos^2 A - 1 = 2\cos^2 A$.

Sampla 3

Taispeáin go bhfuil (i) $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$ (ii) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$.

(i) $$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \frac{2\sin A\ \cos A}{1+2\cos^2 A - 1}$$
$$= \frac{2\sin A\ \cos A}{2\cos^2 A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

(ii) $$\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$= (1)(\cos 2\theta)$$
$$= \cos 2\theta$$

$x^4 - y^4 = (x^2+y^2)(x^2-y^2)$

sin 2*A*, cos 2*A* agus tan 2*A* a scríobh i dtéarmaí tan *A*

Agus ionannais á gcruthú, is minic gur fiú $\sin 2A$, $\cos 2A$ agus $\tan 2A$ a scríobh i dtéarmaí $\tan A$.

Chruthaíomar níos túisce go bhfuil $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$.

Tá na foirmlí seo a leanas le feiceáil ar leathanach 14 de *Foirmlí agus Táblaí*:

(i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ * (ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ *

Tá cruthú i Sampla 4 ar na foirmlí sin.

Nóta: Nuair a scríobhtar $\sin 2A$, $\cos 2A$ agus $\tan 2A$ i dtéarmaí $\tan A$, is gnách **foirmlí na leathuillinneacha** a thabhairt orthu.

Sampla 4

Cruthaigh (i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$.

Is é an bealach leis na hionannais a chruthú ná a thaispeáint go bhfuil an taobh deas cothrom leis an taobh clé:

(i) $$\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{\dfrac{2\sin A}{\cos A}}{1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2\sin A\ \cos A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$ … (iolraigh thuas agus thíos faoi $\cos^2 A$)

$$= \frac{2\sin A\ \cos A}{1} = \sin 2A$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

(ii) $$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A} = \frac{\cos 2A}{1} = \cos 2A$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} \qquad \cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} \qquad \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

Sampla 5

Má tá $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$, faigh na luachanna ar $\sin \theta$ i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2\sin^2\theta = \frac{7}{25} \quad \Rightarrow \quad 2\sin^2\theta = \frac{18}{25}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \pm\frac{3}{5}$$

Sampla 6

Má tá $\sin 2A = \frac{2}{5}$, faigh an dá luach ar $\tan A$ i gcás $0° < A < 90°$.

I dtéarmaí $\tan A$ a scríobhaimid $\sin 2A$.

$$\sin 2A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad 3 + 3\tan^2 A = 10\tan A$$

$$\Rightarrow \quad 3\tan^2 A - 10\tan A + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3\tan A - 1)(\tan A - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\tan A = 1 \quad \text{nó} \quad \tan A = 3$$

$$\Rightarrow \quad \tan A = \frac{1}{3} \quad \text{nó} \quad \tan A = 3$$

Nóta: Ó tá $\sin 2A = 2\sin A\cos A$, is fíor an méid seo:

(i) $\sin 4A = 2\sin 2A\cos 2A$

(ii) $\sin 6A = 2\sin 3A\cos 3A$

(iii) $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

Similarly, since $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

(iv) $\cos 4A = 2\cos^2 2A - 1$

(v) $\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$

Triailcheisteanna 5.3

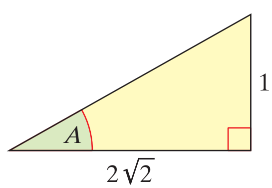
1. Má tá $\sin A = \frac{3}{5}$, agus $0° < A < 90°$, faigh luach

(i) $\sin 2A$ (ii) $\cos 2A$ (iii) $\tan 2A$

2. Más géaruillinn A agus má tá $\tan A = \frac{1}{2}$, faigh luach

(i) $\tan 2A$ (ii) $\sin 2A$.

3. Gan áireamhán a úsáid, faigh amach ón léaráid ar dheis an luach ar $\cos 2A$.



4. Má tá $\cos 2A = \frac{3}{8}$, $0° < A < 90°$, faigh luach $\sin A$ agus $\cos A$.

5. Má tá $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ agus $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$, faigh luach gach ceann díobh seo, gan áireamhán a úsáid:
(i) $2 \sin 15° \cos 15°$ (ii) $2 \sin 75° \cos 75°$ (iii) $\cos^2 22\frac{1}{2}° - \sin^2 22\frac{1}{2}°$.

6. Simpligh $\dfrac{2 \tan 22\frac{1}{2}°}{1 - \tan^2 22\frac{1}{2}°}$.

7. Cruthaigh go bhfuil $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$.

8. Cruthaigh gach ceann de na hionannais seo a leanas:
(i) $(\sin A + \cos A)^2 = 1 + \sin 2A$ (ii) $\dfrac{\cos 2A}{\cos A + \sin A} = \cos A - \sin A$.

9. Taispeáin go bhfuil $1 - (\cos x - \sin x)^2 = \sin 2x$.

10. Má tá $\tan A = \frac{1}{2}$, agus más géaruillinn í A, faigh $\tan 2A$ gan áireamhán a úsáid.

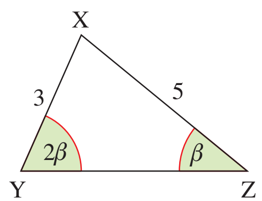
11. Má tá $\cos A = \frac{3}{5}$, i gcás $0 < A < 90°$, faigh luach
(i) $\sin 2A$ (ii) $\cos 2A$

12. Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{1 - \cos 2A}{\sin 2A} = \tan A$.

13. Taispeáin go bhfuil $\dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} = \sin 2A$.

14. Má tá $\tan 2\theta = \frac{4}{3}$, faigh na luachanna ar $\tan \theta$ i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$.

15. I gcás an triantáin XYZ, $|\angle XYZ| = 2\beta$ agus $|\angle XZY| = \beta$.
$|XY| = 3$ agus $|XZ| = 5$.
(i) Bain úsáid as an eolas sin chun $\sin 2\beta$ a scríobh san fhoirm $\dfrac{a}{b} \sin \beta$, áit a bhfuil $a, b \in \mathbb{N}$.
(ii) Uaidh sin scríobh $\tan \beta$ san fhoirm $\dfrac{\sqrt{c}}{d}$, áit a bhfuil $c, d \in \mathbb{N}$.



16. Dhá ghéaruillinn iad A agus B sa chaoi is go bhfuil $\tan A = \dfrac{4}{3}$ agus $\tan(A + B) = -1$.
Gan luach A ná luach B a fháil,
(i) taispeáin go bhfuil $\tan B = 7$
(ii) faigh luach $\sin 2B$.

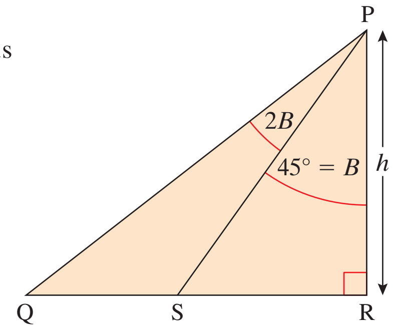
17. (i) Taispeáin go bhfuil $\dfrac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$.
(ii) Uaidh sin, nó ar shlí éigin eile, cruthaigh go bhfuil $\tan 22\frac{1}{2}° = \sqrt{2} - 1$.

18. Má tá $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$ nó $2 \cos^2 A - 1$, scríobh $\cos 4A$ i dtéarmaí
(i) $\sin 2A$ (ii) $\cos 2A$.
Taispeáin uaidh sin go bhfuil $\dfrac{1 - \cos 4A}{1 + \cos 4A} = \tan^2 2A$.

19. 21, 17 agus 10 ar fad atá sleasa triantáin áirithe.
Is í A an uillinn is lú sa triantán..
(i) Taispeáin go bhfuil $\cos A = \frac{15}{17}$.
(ii) Faigh $\tan \dfrac{A}{2}$, gan luach A a fháil.

20. I gcás an triantáin PQR, $|\angle QRP| = 90°$ agus $|RP| = h$.
Is pointe ar [QR] é S sa chaoi is go bhfuil $|\angle SPQ| = 2B$ agus $|\angle RPS| = 45° - B, 0° < B < 45°$.

(i) Taispeáin go bhfuil $|SR| = h \tan(45° - B)$.
(ii) Uaidh sin, nó ar shlí éigin eile, taispeáin go bhfuil $|QS| = 2h \tan 2B$.



MÍR 5.4: Foirmlí na suimeanna, na ndifríochtaí agus na dtorthaí

Tá foirmlí tábhachtacha ar leathanach 15 de *Foirmlí agus Táblaí* le suimeanna agus difríochtaí a athrú ina dtorthaí. Na foirmlí sin, gan chruthú, a thugtar thíos.

Torthaí a athrú ina suimeanna nó ina ndifríochtaí

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$
$$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$
$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$
$$-2 \sin A \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$$

Suimeanna agus difríochtaí a athrú ina dtorthaí

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$
$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$
$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$

Nóta: Moltar an uillinn is mó a bheith chun tosaigh agus suim nó difríocht á hathrú ina toradh. Mar sin, mar shampla, ba chóir sin $\sin 3x + \sin 5x$ a athrú go $\sin 5x + \sin 3x$. Ar an gcaoi chéanna, más é an toradh $2 \sin 2x \cos 3x$, a thugtar dúinn, is san fhoirm $2 \cos 3x \sin 2x$ ba chóir é a scríobh.

Sampla 1

Scríobh ina shuim nó ina dhifríocht: (i) $2 \cos 3x \sin x$ (ii) $\cos\theta \cos 5\theta$

(i) $2 \cos 3x \sin x = \sin(3x + x) - \sin(3x - x)$
$= \sin 4x - \sin 2x$

(ii) $\cos \theta \cos 5\theta = \cos 5\theta \cos \theta$
$= \frac{1}{2}[2 \cos 5\theta \cos \theta]$
$= \frac{1}{2}[\cos(5\theta + \theta) + \cos(5\theta - \theta)]$
$= \frac{1}{2}[\cos 6\theta + \cos 4\theta]$

Tabhair an uillinn is mó chun tosaigh i gcónaí.

Sampla 2

Scríobh ina thoradh: (i) $\cos 5A + \cos 3A$ (ii) $\sin 3A - \sin A$

(i) $\cos 5A + \cos 3A = 2\cos\left(\frac{5A + 3A}{2}\right)\cos\left(\frac{5A - 3A}{2}\right)$

$= 2\cos 4A \cos A$

(ii) $\sin 3A - \sin A = 2\cos\left(\frac{3A + A}{2}\right)\sin\left(\frac{3A - A}{2}\right)$

$= 2\cos 2A \sin A$

Sampla 3

Taispeáin go bhfuil $\frac{\sin 3A - \sin 2A + \sin A}{\cos 3A + \cos A - \cos 2A} = \tan 2A$.

$$\frac{\sin 3A - \sin 2A + \sin A}{\cos 3A + \cos A - \cos 2A} = \frac{(\sin 3A + \sin A) - \sin 2A}{(\cos 3A + \cos A) - \cos 2A}$$

$$= \frac{2\sin 2A \cos A - \sin 2A}{2\cos 2A \cos A - \cos 2A}$$

$$= \frac{\sin 2A\,(2\cos A - 1)}{\cos 2A\,(2\cos A - 1)} = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \tan 2A$$

Triailcheisteanna 5.4

1. Scríobh gach ceann díobh seo ina thoradh:

(i) $\sin 5x + \sin 3x$ (ii) $\sin 4x - \sin 2x$ (iii) $\cos 3x + \cos x$

(iv) $\cos 7\theta - \cos 5\theta$ (v) $\cos 3\theta - \cos \theta$ (vi) $\sin 3\theta - \sin 7\theta$

2. Scríobh gach ceann díobh seo ina thoradh, agus simpligh:

(i) $\cos 80° + \cos 40°$ (ii) $\sin 125° - \sin 55°$ (iii) $\cos 75° - \cos 15°$

3. Gan áireamhán a úsáid, taispeáin gur fíor gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\sin 75° - \sin 15° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sin 10° + \sin 80° = \sqrt{2}\cos 35°$.

4. Scríobh gach ceann díobh seo ina thoradh, agus tabhair an freagra agat san fhoirm is simplí:

(i) $\cos(x + 45°) + \cos(x - 45°)$ (ii) $\cos(x + 60°) - \cos(x - 60°)$.

5. Scríobh gach ceann díobh seo ina shuim nó ina dhifríocht:

(i) $2\sin 3A \cos 2A$ (ii) $2\cos 4x \sin x$ (iii) $2\cos 5A \cos 2A$

(iv) $-2\sin 6A \sin 2A$ (v) $\sin 2A \sin A$ (vi) $\sin x \cos 5x$

6. Scríobh ina shuim nó ina dhifríocht agus simpligh:

(i) $2\sin 75° \cos 45°$ (ii) $10\sin 67\tfrac{1}{2}° \sin 22\tfrac{1}{2}°$.

7. Taispeáin go bhfuil

(i) $2\cos(A + 45°)\sin(A - 45°) = \sin 2A - 1$ (ii) $\frac{\cos 50° - \cos 70°}{\sin 70° - \sin 50°} = \sqrt{3}$.

8. Taispeáin go bhfuil $\dfrac{\sin(\theta + 15°) + \sin(\theta - 15°)}{\cos(\theta + 15°) + \cos(\theta - 15°)} = \tan\theta$.

9. Taispeáin go bhfuil $\dfrac{\sin 4A + \sin 2A}{2\sin 3A} = \cos A$.

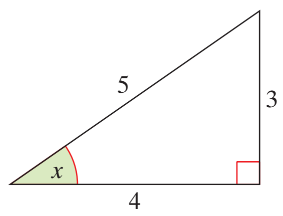
10. Taispeáin go bhfuil $\dfrac{\sin 5A - \sin 3A}{\cos 5A + \cos 3A} = \tan A$.

11. Taispeáin go bhfuil $2\sin(135° + A)\sin(45° + A) = \cos 2A$.

12. Má tá $\tan 3\theta = 2$, faigh a luach seo, gan áireamhán a úsáid:

$$\frac{\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta}.$$

MÍR 5.5: Feidhmeanna triantánachta inbhéartacha



I gcás an triantáin ar dheis, $\sin x = \frac{3}{5}$.

D'fhéadfaí a rá gurb í 'x an uillinn ar síneas di $\frac{3}{5}$.'

Mar seo a scríobhtar é $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = x$.

'arc sin' a thugtar ar $\sin^{-1}$.

Agus má tá (i) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

(ii) $\tan x = 1 \Rightarrow x = \tan^{-1}(1) = 45°$.

Is léir ar an dá shampla sin gur **uillinneacha** iad $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ agus $\tan^{-1}(1)$, agus gur **cóimheasa** iad $\cos 30°$ agus $\tan 45°$.

Sampla 1

Scríobh síos luach gach ceann de na huillinneacha seo a leanas sa raon 0° go dtí 90°.

(i) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (iii) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ (iv) $\cos^{-1}(0.8)$.

(i) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 30°$ (ii) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

(iii) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$ (iv) $\cos^{-1}(0.8) = 36.9°$ (le háireamhán)

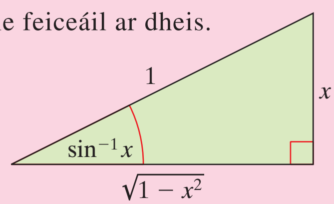
Sampla 2

(i) Scríobh $\cos(\sin^{-1}x)$ i dtéarmaí x. (ii) Faigh luach $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$.

(i) Is í $\sin^{-1}x$ an uillinn ar síneas di x, mar atá le feiceáil ar dheis.

Is é $\sqrt{1 - x^2}$ an tríú slios.

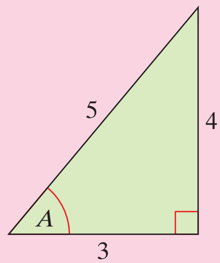
$$\cos(\sin^{-1}x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}$$



(ii) Is uillinn dhúbailte í $2\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

Bíodh $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = A$.

Taispeántar A sa triantán ar dheis.



$$\begin{aligned}\sin\left(2\tan^{-1}\frac{4}{3}\right) &= \sin 2A \\ &= 2\sin A\cos A \\ &= 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}\end{aligned}$$

Triailcheisteanna 5.5

1. Scríobh síos luach gach ceann de na huillinneacha seo sa raon 90° go dtí −90°, gan áireamhán a úsáid.

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (iii) $\tan^{-1}(1)$

(iv) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (v) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (vi) $\tan^{-1}(-1)$

(vii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (viii) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2. I gcás gach ceann díobh seo a leanas, tarraing triantán le taispeáint go bhfuil

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(iii) $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ (iv) $\tan^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

3. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas, agus scríobh na freagraí agat i dtéarmaí x:

(i) $\sin(\sin^{-1}x)$ (ii) $\cos(\sin^{-1}x)$ (iii) $\sin(\tan^{-1}x)$.

4. Faigh luach gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ (ii) $\cos(\tan^{-1}1)$ (iii) $\sin\left(\tan^{-1}\frac{8}{15}\right)$.

5. Faigh luach

(i) $\sin\left(2\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ (ii) $\cos\left(2\sin^{-1}\frac{5}{13}\right)$.

6. Bain úsáid as an bhfoirmle le haghaidh $\sin(A+B)$ le taispeáint go bhfuil

(i) $\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right] = \frac{63}{65}$. (ii) $\sin\left[\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

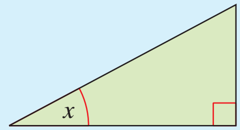
7. Faigh luach $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13}\right)$.

8. Cruthaigh go bhfuil $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sin\left(\cos^{-1}\frac{7}{25}\right)$.

CUIR TRIAIL ORT FÉIN 5

Ceisteanna A

1. Faigh luach sin $2x$ sa léaráid ar dheis, gan leas a bhaint as áireamhán.



2. Is géaruillinneacha iad A agus B sa chaoi is go bhfuil tan $A = \frac{5}{12}$ agus tan $B = \frac{3}{4}$. Faigh cos $(A - B)$ ina chodán.

3. Taispeáin go bhfuil $(\cos A + \sin A)^2 = 1 + \sin 2A$.

4. Má tá $\cos x = \frac{4}{5}$ agus $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, faigh luach tan $2x$.

5. Cruthaigh go bhfuil $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

6. Is géaruillinn í A sa chaoi is go bhfuil tan $A = \frac{8}{15}$.
Gan luach A, a fháil, faigh
(i) $\cos A$ (ii) $\sin 2A$.

7. (i) Scríobh $\sin 75° \cos 15° - \cos 75° \sin 15°$ ina fheidhm ag uillinn chomhshuite agus, uaidh sin, simpligh é.
(ii) Cruthaigh go bhfuil $2 + 2\cos 2x = 4\cos^2 x$.

8. Má tá $\tan 75° = a + b\sqrt{3}$, faigh luach a agus luach b, áit a bhfuil $a, b \in \mathbb{Z}$.

9. (i) Taispeáin go bhfuil $\tan\theta \sin\theta + \cos\theta = \sec\theta$.
(ii) Más géaruillinn í θ agus má tá $\cos\theta = \frac{5}{12}$, faigh luach sin 2θ.

10. (i) Faigh an luach ar k a fhágann go bhfuil $\sin 75° - \sin 15° = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N}$.
(ii) Má tá $A = \sin^{-1}\frac{1}{2}$, faigh luach tan $2A$.

Ceisteanna B

1. (i) Bain leas as $\cos 2A = \cos^2 A -^2 A$, nó as modh éigin eile, le cruthú go bhfuil
$$\cos^2 A = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2A).$$
(ii) Scríobh síos luach beacht
$$\sin 40° \cos 20° + \cos 40° \sin 20°.$$

2. (i) Más géaruillinn í θ agus má tá $\sin\theta = \frac{4}{5}$, faigh luach cos 2θ.
(ii) Taispeáin go bhfuil $2\cos^2 A - \cos 2A - 1 = 0$.

3. (i) Scríobh $2\sin 4\theta \cos 2\theta$ ina shuim nó ina dhifríocht de dhá fheidhm thriantánachta.
(ii) Taispeáin gur féidir $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$ a shimpliú ina thairiseach agus scríobh síos a luach.

4. (i) Cruthaigh go bhfuil $\cos(45° + \theta) - (\cos 45° - \theta) = -\sqrt{2}\sin\theta$
(ii) Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta \sin\theta$

5. (i) Bain leas as foirmle uillinneacha dúbailte chun a luach seo a scríobh i bhfoirm surda:
$\cos^2 15° - \sin^2 15$.

(ii) Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = 2$.

6. (i) Taispeáin go bhfuil $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

(ii) Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{\cos 5\theta - \cos 3\theta}{\sin 4\theta} = -2 \sin \theta$.

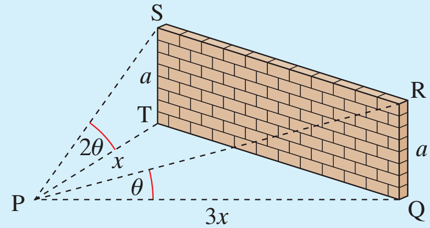
7. Cruthaigh go bhfuil $\tan (A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.

8. Má tá $A + B = \dfrac{\pi}{4}$, scríobh $\tan A$ i dtéarmaí $\tan B$.
Cruthaigh uaidh sin go bhfuil $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$.

9. Faigh luach $\sin 105° - \sin 15°$ ina shurda, gan áireamhán a úsáid.

10. Is balla ceartingearach ar thalamh chothrom é QRST, ar airde dó a. Is pointe é P atá ar an talamh os comhair $\theta°$ atá in uillinn airde R ó P agus $2\theta°$ atá in uillinn airde S ó P. $|PQ| = 3|PT|$.

Faigh θ.



Ceisteanna C

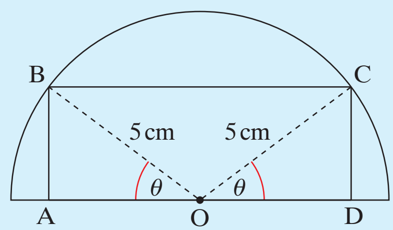
1. Má tá $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, cruthaigh go bhfuil
$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$.
Uaidh sin, trí $\sin 3x$ a scríobh san fhoirm $\sin(2x + x)$, cruthaigh go bhfuil
$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

2. Taispeáin go bhfuil $(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2 = 2 + 2 \cos (A - B)$.

3. Seo agat léaráid ar dheis de dhronuilleog ABCD taobh istigh de leathchiorcal ar lárphointe dó O agus ar ga dó 5 cm, sa chaoi is go bhfuil $|\angle BOA| = |\angle COD| = \theta$.

(i) p cm atá in imlíne na dronuilleoige.
Taispeáin go dtugann an chothromóid seo luach
$p = 20 \cos \theta + 10 \sin \theta$.

(ii) Faigh an luach ar k a d'fhágfadh gurb é achar na dronuilleoige ná $k \sin 2\theta$ cm².

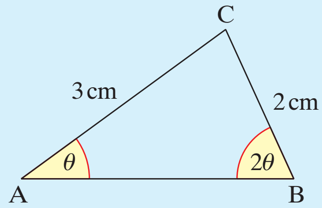


4. Bain úsáid as an bhfoirmle $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ chun foirmle a dhíorthú $\cos(A - B)$. Cruthaigh uaidh sin go bhfuil $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

5. (i) Taispeáin go bhfuil $\sqrt{2 \sin^2 \theta + 6 \cos^2 \theta - 2} = 2 \cos \theta$, i gcás gach θ.

(ii) Is dhá réiteach iad $x = 0°$ agus $x = 60°$ ar an gcothromóid $a\sin^2 2x + \cos 2x - b = 0$, áit a bhfuil $a, b \in \mathbb{N}$.
Faigh luach a agus luach b.

6. I gcás an triantáin ABC, $|AC| = 3$ cm, $|BC| = 2$ cm, $|\angle BAC| = \theta$ agus $|\angle ABC| = 2\theta$.
Ríomh luach θ, ceart go dtí an deichiú cuid de chéim is gaire.

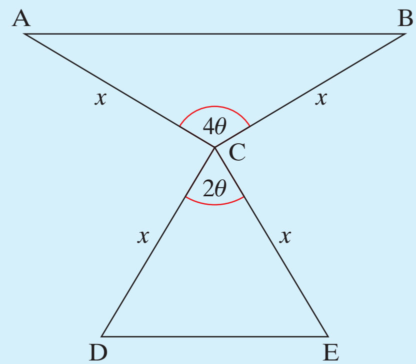


Faigh uaidh sin méid na huillinne ACB agus, gan aon rud eile a ríomh, mínigh cén fáth a bhfuil fad [AB] níos mó ná 2 cm.

7. (i) Má tá $\sin 2\theta = 1$ agus más géaruillinn í θ, faigh luach beacht
(a) $\sin\theta$ (b) $\tan\theta$

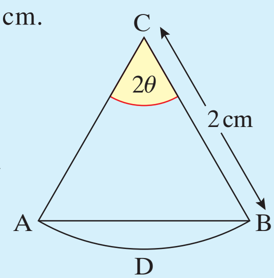
(ii) Taispeáin go bhfuil $\dfrac{\sin 4\theta(1 - \cos 2\theta)}{\cos 2\theta(1 - \cos 4\theta)} = \tan\theta$.

8. Féach ar an léaráid ar dheis.
$|AC| = |CB| = |DC| = |EC| = x$,
$|\angle ACB| = 4\theta$ agus $|\angle DCE| = 2\theta$.



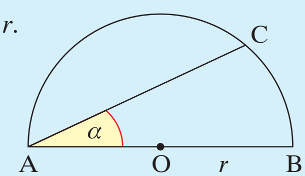
(i) Má tá achar $\triangle ACB$ = achar $\triangle DCE$, taispeáin go bhfuil $\theta = 30°$.
(ii) Bain úsáid as $\theta = 30°$, chun luach x a fháil, má tá $|AB|^2 + |DE|^2 = 24$.
Tabhair an freagra agat i bhfoirm surda.

9. Sa léaráid ar dheis, is lárphointe ciorcail é C, ciorcal ar ga dó 2 cm.
Is teascóg den chiorcal í ADBC agus uillinn 2θ raidian atá inti.
Faigh (i) tachar na teascóige ADBC i dtéarmaí θ.
(ii) achar an triantáin ABC i dtéarmaí $\sin 2\theta$.



Más ionann achar $\triangle ABC$ agus trí cheathrú den achar sa teascóg ADBC, taispeáin go bhfuil
$2\sin 2\theta = 3\theta$.
Más $\sqrt{3}$ cm^2 atá in achar $\triangle ABC$, faigh θ ina raidiain.

10. Is é [AB] trastomhas leathchiorcail ar lárphointe dó O agus ar fad ga dó r.
Is corda é [AC] sa chaoi is go bhfuil $|\angle CAB| = \alpha$,
áit a bhfuil α ina raidiain.



(i) Faigh $|AC|$ i dtéarmaí r agus α.
(ii) Déroinneann [AC] achar an réigiúin leathchiorclaigh.
Taispeáin go bhfuil $2\alpha + \sin 2\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Achoimre ar Phríomhphointí

Ionannais triantánachta

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ $\qquad \cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$ $\qquad \sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ $\qquad \operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ $\qquad \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$\cos(-A) = \cos A$

$\sin(-A) = -\sin A$

$\tan(-A) = -\tan A$

Foirmlí na n-uillinneacha comhshuite

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

Foirmlí na n-uillinneacha dúbailte

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$

$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

$\sin 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

Torthaí a athrú ina suimeanna nó ina ndifríochtaí

$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$

$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$

$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$

Suimeanna agus difríochtaí a athrú ina dtorthaí

$\cos A + \cos B = 2 \cos \dfrac{A + B}{2} \cos \dfrac{A - B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2 \sin \dfrac{A + B}{2} \sin \dfrac{A - B}{2}$

$\sin A + \sin B = 2 \sin \dfrac{A + B}{2} \cos \dfrac{A - B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2 \cos \dfrac{A + B}{2} \sin \dfrac{A - B}{2}$

caibidil 6 Céimseata 2: Méaduithe agus Tógálacha

Focail Thábhachtacha

méadú **bunfhíor** **íomhá** **rinn** **fachtóir scála** **lárphointe an mhéadaithe** **déroinnteoir** **déroinnteoir ingearach** **inchiorcal** **meánlíne** **meánlár** **imchiorcal** **ingearlár** **ar comhfhad**

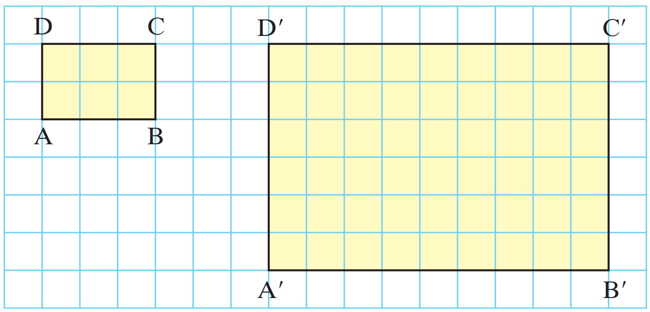
MÍR 6.1: Méaduithe

Sa léaráid seo is **méadú** $A'B'C'D'$ ar an dronuilleog $ABCD$.

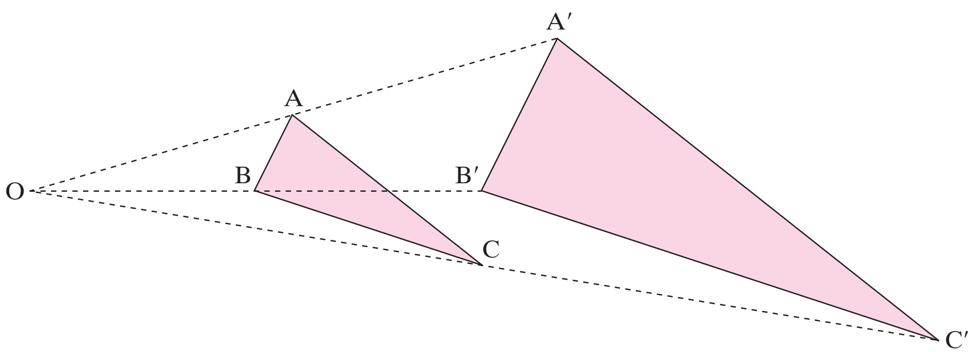
Anseo $|AB| = 3$ agus $|A'B'| = 9$

$|AD| = 2$ agus $|A'D'| = 6$

Tá sleasa na dronuilleoige $A'B'C'D'$ trí oiread chomh fada le sleasa na dronuilleoige $ABCD$.
Anseo is é **3** an **fachtóir scála**.



Féach anois ar an dá thriantán ABC agus $A'B'C'$, thíos.



Is méadú é an triantán $A'B'C'$ ar an triantán ABC.

Lárphointe an mhéadaithe a thugtar ar an bpointe O.

Ó tá $|OA'| = 2|OA|$, is é 2 an fachtóir scála.

Ós é 2 an fachtóir scála, $|A'B'| = 2|AB|$, $|A'C'| = 2|AC|$ agus $|B'C'| = 2|BC|$.

An **bhunfhíor** a thugtar ar an triantán ABC.

An **íomhá** a thugtar ar an triantán $A'B'C'$.

Línte teilgin nó **gathanna** a thugtar ar na línte briste.

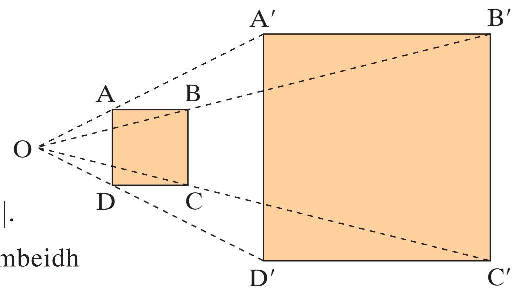
Méaduithe a tharraingt

Chun íomhá fíorach áirithe faoi mhéadú a thógáil, bíonn dhá rud uainn:

(i) lárphointe an mhéadaithe
(ii) fachtóir scála an mhéadaithe.

Ar dheis feicfidh tú léaráid den chearnóg ABCD agus de O, lárphointe an mhéadaithe.

Anois méadóimid ABCD. Is é O lárphointe an mhéadaithe agus is é 3 an fachtóir scála.



Gheobhaimid íomhá A ach O a cheangal de A, agus í sin a leanúint go A′ sa chaoi is go mbeidh $|OA'| = 3|OA|$.

Ar an gcaoi chéanna, O a cheangal de B′ sa chaoi is go mbeidh $|OB'| = 3|OB|$.

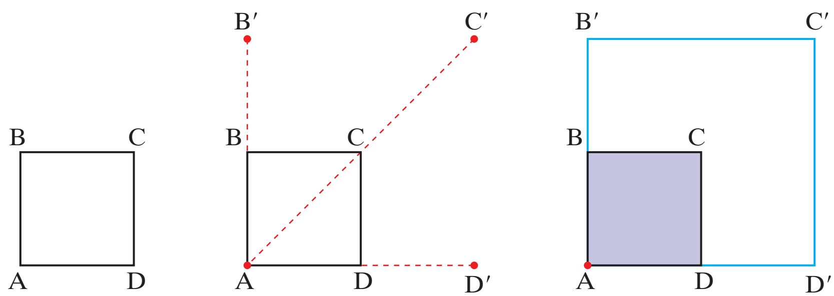
Tá an rud céanna le déanamh i gcás na bpointí C agus D.

Is í an chearnóg A′B′C′D′ íomhá na cearnóige ABCD.

Ós é 3 an fachtóir scála, $|A'B'| = 3|AB|$ agus $|A'D'| = 3|AD|$.

Nuair a bhíonn rinn ina lárphointe méadaithe

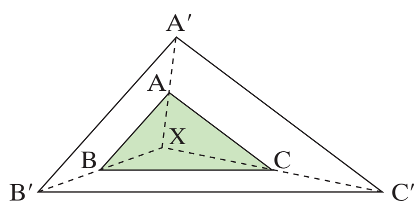
Sna léaráidí thíos taispeántar cén chaoi leis an gcruth ABCD a mhéadú faoi fhachtóir scála 2 agus A ina lárphointe méadaithe.



Tabhair faoi deara go bhfanann lárphointe an mhéadaithe, A, san áit chéanna.

San fhíor dheiridh, $|AB'| = 2|AB|$, $|AD'| = 2|AD|$ agus $|AC'| = 2|AC|$.

Féach ar an méadú ar dheis. Sa chás seo tá lárphointe an mhéadaithe, X, taobh istigh den fhíor.



I gcás an mhéadaithe seo, is é 2 an fachtóir scála.

Tarraing an líne [XA] and sín í sa chaoi is go mbeidh $|XA'| = 2|XA|$.

Sín [XB] sa chaoi is go mbeidh $|XB'| = 2|XB|$.

Déan an rud céanna i gcás [XC].

Tá gach slios ar an triantán méadaithe A′B′C′ dhá uair chomh fada leis an slios comhfhreagrach ar ABC.

I gcás aon mhéadaithe, is féidir an fachtóir scála a fháil ach fad shlios na híomhá a roinnt ar fhad shlios comhfhreagrach na bunfhíorach.

An fachtóir scála

$$\frac{\text{fad shlios na híomhá}}{\text{fad shlios comhfhreagrach na bunfhíorach}}$$

Méaduithe a bhfuil Fachtóir Scála níos lú ná 1 acu

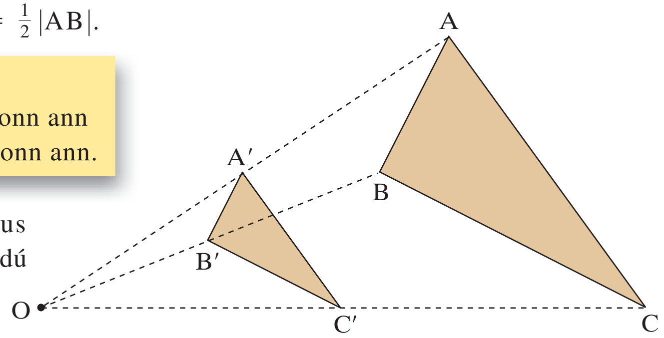
Más fachtóir scála níos lú ná 1 atá ag an méadú, is fíor níos lú a gheofar, níos gaire do lárphointe an mhéadaithe.

Is í $A'B'C'$ íomhá ABC faoi mhéadú san fhíor thíos. Is é $\frac{1}{2}$ an fachtóir scála.

Mar sin $|OA'| = \frac{1}{2}|OA|$ agus $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$.

Más ionann an fachtóir scála agus k,
(i) má bhíonn $k > 1$, is méadú a bhíonn ann
(ii) má bhíonn $k < 1$, is laghdú a bhíonn ann.

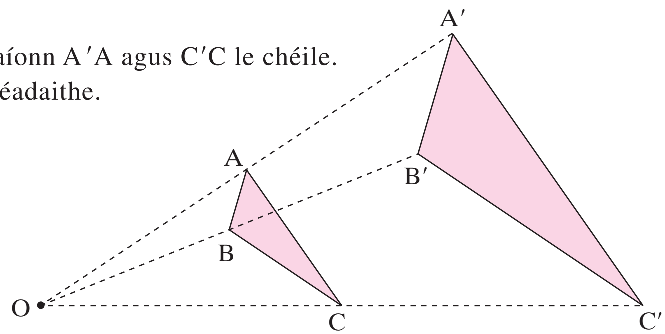
Nuair is ionann an fachtóir scála agus codán deimhneach níos lú ná 1, is laghdú ar an bhfíor bhunaidh a bhíonn ann.



Lárphointe an mhéadaithe a fháil

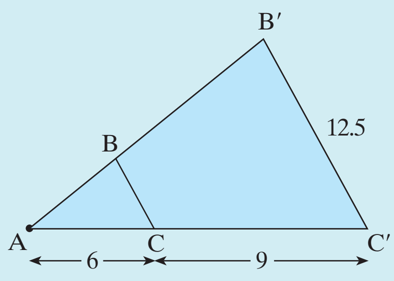
Nuair a bhíonn fíor agus méadú na fíorach sin againn, gheobhaimid lárphointe an mhéadaithe ach dhá thacar de phointí comhfhreagracha a cheangal dá chéile agus na línte a leanúint go dtí go dteagmhaíonn siad le chéile.

Sa léaráid ar dheis, is ag O a theagmhaíonn $A'A$ agus $C'C$ le chéile. Is é an pointe sin, O, lárphointe an mhéadaithe.



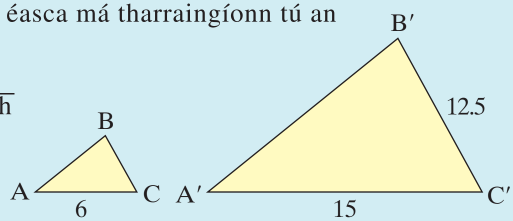
Sampla 1

San fhíor thíos, méadú ar an triantán ABC is ea $AB'C'$, áit arb é A lárphointe an mhéadaithe.



Má tá $|AC| = 6$, $|CC'| = 9$ agus $|B'C'| = 12.5$, faigh
(i) fachtóir scála an mhéadaithe
(ii) $|BC|$
(iii) an cóimheas $|AB|:|AB'|$.

(i) Seans go mbeidh do chuid oibre níos éasca má tharraingíonn tú an dá thriantán ar leith óna chéile.



$$\text{An fachtóir scála} = \frac{\text{fad na híomhá}}{\text{fad na bunfhíorach}}$$
$$= \frac{|AC'|}{|AC|} = \frac{15}{6} = 2.5$$

(ii) Ós é $2\frac{1}{2}$, $|B'C'| = 2\frac{1}{2}|BC|$

$$|B'C'| = 2\tfrac{1}{2}|BC| \quad \Rightarrow \quad |BC| = \frac{|B'C'|}{2\frac{1}{2}} = \frac{12.5}{2.5} = 5$$

$\therefore \quad |BC| = 5$

(iii) $|AB'| = 2\frac{1}{2}|AB|$

$$\therefore \quad \frac{|AB'|}{|AB|} = 2\tfrac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$\therefore \quad |AB'|:|AB| = 5:2$

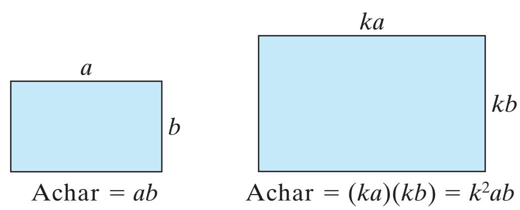
$\Rightarrow \quad |AB|:|AB'| = 2:5$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad x:y = 3:4$

Méadú agus achar

An dronuilleog ar dheis, is méadú í ar an dronuilleog ar chlé. Is é k fachtóir scála an mhéadaithe.



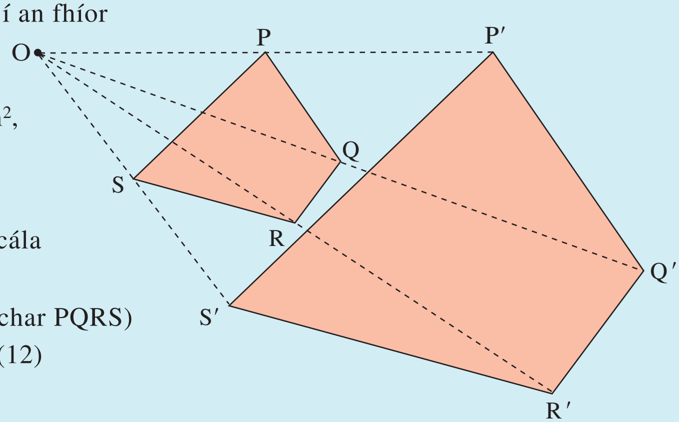
Is ionann achar na fíorach méadaithe agus k^2 (achar na fíorach bunaidh).

Léiríonn sé seo riail thábhachtach ghinearálta a bhaineann le gach cruth den sórt sin.

Nuair a mhéadaítear fíor faoi fhachtóir scála k, méadaítear achar na híomhá faoi fhachtóir scála k^2.

Sampla 2

Is méadú ar an bhfíor PQRS í an fhíor P′Q′R′S′.
Má tá achar PQRS $= 12\text{ cm}^2$ agus achar P′Q′R′S $= 48\text{ cm}^2$, faigh fachtóir scála an mhéadaithe.



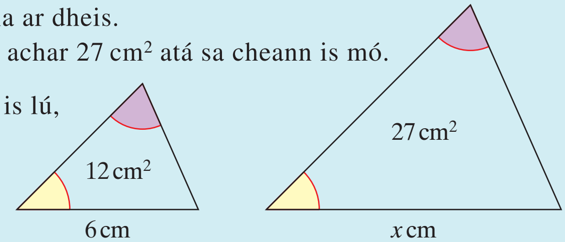
Abraimis gurb é k fachtóir scála an mhéadaithe.

$$\text{Achar } P'Q'R'S' = k^2 \text{ (achar PQRS)}$$
$$\Rightarrow \quad 48 = k^2(12)$$
$$12k^2 = 48$$
$$k^2 = 4$$
$$k = 2$$

$\therefore$ is é 2 fachtóir scála an mhéadaithe.

Sampla 3

Féach ar an dá thriantán chomhchosúla ar dheis.
Achar 12 cm^2 atá sa cheann is lú agus achar 27 cm^2 atá sa cheann is mó.



Más 6 cm ar fad atá bonn an triantáin is lú, faigh fad bhonn an triantáin is mó.

Bíodh fachtóir scála an mhéadaithe $= k$.

Achar an triantáin is mó $= k^2$ (achar an triantáin is lú)

$$\Rightarrow \quad 27 = k^2(12)$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

Fad an tsleasa is mó $= k$ (fad an tsleasa is lú)

$$\Rightarrow \quad x = 6k$$

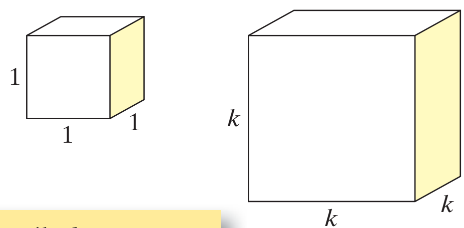
$$\Rightarrow \quad x = 6\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = 9\text{ cm}$$

Fad bhonn an triantáin is mó $= 9$ cm

Méadú agus toirt

1 aonad amháin ar fad atá an slios ar an gciúb is lú ar dheis.



Toirt $= 1 \times 1 \times 1 = 1$ aonad ciúbach

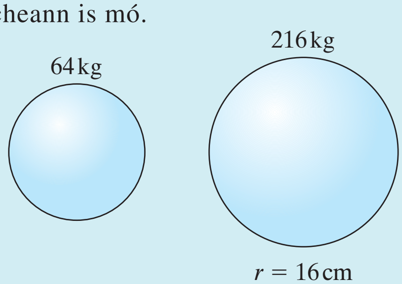
Méadaítear an ciúb faoi fhachtóir scála k.

Toirt an chiúib mhéadaithe ná $k \times k \times k = k^3$ aonad ciúbach

Cóimheas toirteanna Nuair a mhéadaítear fíor faoi fhachtóir scála k, méadaítear toirt na fíorach méadaithe faoi fhachtóir scála k^3.

Sampla 4

Is den ábhar céanna atá dhá sféar chomhchosúla déanta. Mais 64 kg atá sa cheann is lú, agus mais 216 kg atá sa cheann is mó.



Más 16 cm atá i nga an sféir is mó, faigh ga an sféir is lú.
[Glac leis gurb ionann cóimheas na maiseanna agus cóimheas na dtoirteanna.]

Abraimis gurb é k fachtóir scála an mhéadaithe.

Toirt an sféir is mó $= k^3$ (toirt an sféir is lú)

$$\Rightarrow \quad 216 = k^3(64)$$

$$\Rightarrow \quad k^3 = \frac{216}{64} \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt[3]{\frac{216}{64}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Ga an sféir is mó $= k$ (ga an sféir is lú)

Tugaimis r ar gha an sféir is lú.

$$\Rightarrow \quad 16 = k(r)$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{3}{2}r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}r = 16 \quad \Rightarrow \quad 3r = 32 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{32}{3}\text{ cm}$$

$\therefore$ ga an sféir is lú $= 10\frac{2}{3}$ cm

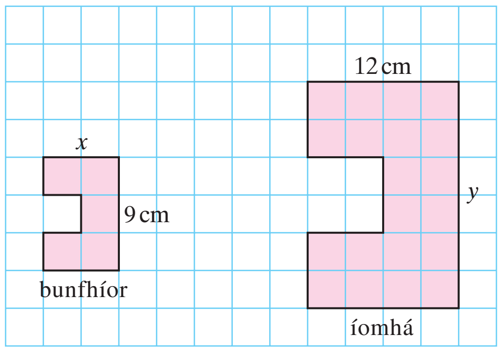
Triailcheisteanna 6.1

1. Taispeántar sa léaráid ar dheis fíor agus a méadú.

(i) Úsáid an ghreille chun fachtóir scála an mhéadaithe a scríobh síos.

(ii) Tá faid dhá shlios tugtha. Faigh faid na sleasa x agus y.

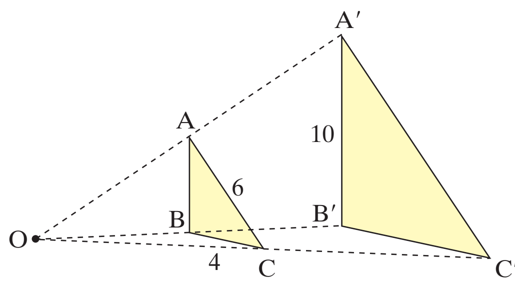
(iii) Más é k an fachtóir scála, fíoraigh gurb ionann achar na fíorach méadaithe agus k^2 iolraithe faoin mbunfhíor.



2. Is é an triantán $A'B'C'$ sa léaráid ar dheis íomhá an triantáin ABC faoi mhéadú. Is é O lárphointe an mhéadaithe agus is é 2 an fachtóir scála. Má tá $|BC| = 4$, $|AC| = 6$ agus $|A'B'| = 10$, faigh

(i) $|B'C'|$ (ii) $|A'C'|$ (iii) $|AB|$.

Más 30 aonad cearnach atá in achar $\triangle A'B'C'$, faigh achar an triantáin ABC.



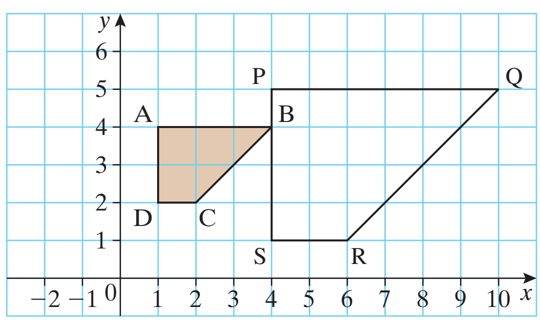
3. Feicfidh tú sa léaráid ar dheis an fhíor ABCD agus a méadú PQRS.

(i) Úsáid an ghreille chun fachtóir scála an mhéadaithe a scríobh síos.

(ii) Déan cur síos ar an gcaoi a bhfaighfeá lárphointe an mhéadaithe.

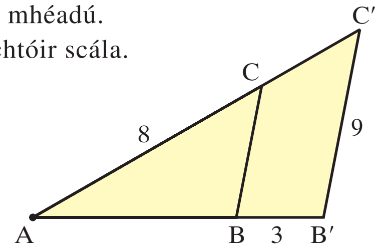
(iii) Bain úsáid as imeall díreach chun comh--ordanáidí lárphointe an mhéadaithe a fháil.

(iv) Más 30 aonad cearnach atá in achar ABCD, faigh achar PQRS.

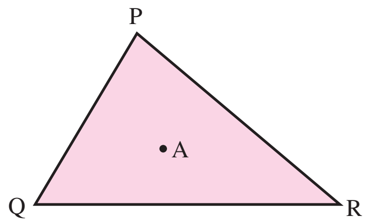


4. Is é an triantán $AB'C'$ íomhá an triantáin ABC faoi mhéadú.
Is é A lárphointe an mhéadaithe agus is é $1\frac{1}{2}$ an fachtóir scála.
Má tá $|AC| = 8$, $|B'C'| = 9$ agus $|BB'| = 3$, faigh
(i) $|AC'|$ (ii) $|BC|$ (iii) $|AB|$.

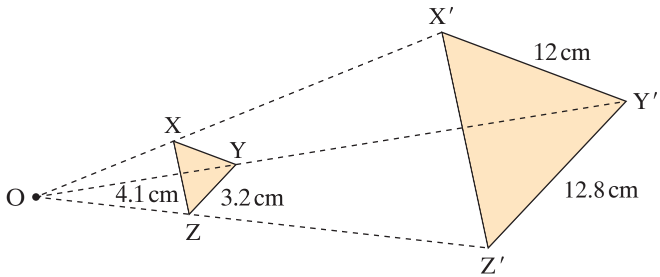
Más 20 aonad cearnach atá in achar $\triangle ABC$, faigh achar $\triangle AB'C'$.



5. Déan cóip den triantán ar dheis, PQR.
Anois tarraing méadú den triantán, le A mar lárphointe agus 2 mar fhachtóir scála.

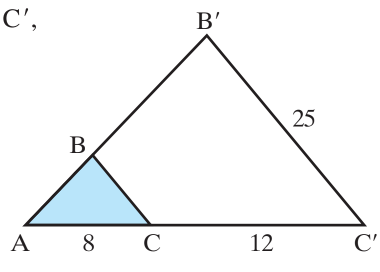


6. Is é an triantán $X'Y'Z'$ sa léaráid thíos íomhá an triantáin XYZ faoi mhéadú arb é O a lárphointe.

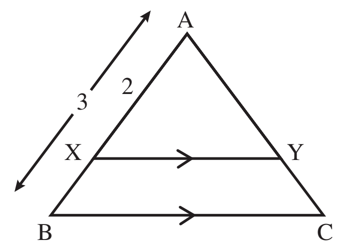


$|YZ| = 3.2$ cm, $|XZ| = 4.1$ cm, $|X'Y'| = 12$ cm and $|Y'Z'| = 12.8$ cm.
Faigh (i) fachtóir scála an mhéadaithe.
(ii) $|X'Z'|$
(iii) $|XY|$
(iv) an cóimheas $|OZ| : |ZZ'|$
(v) achar an triantáin XYZ má tá 64 cm^2 in achar an triantáin $X'Y'Z'$.

7. San fhíor thíos, méadú ar an triantán ABC is ea $AB'C'$, áit arb é A lárphointe an mhéadaithe.
Má tá $|AC| = 8$, $|CC'| = 12$ agus $|B'C'| = 25$, faigh
(i) fachtóir scála an mhéadaithe
(ii) $|BC|$ (iii) an cóimheas $|AB| : |AB'|$
(iv) achar $\triangle AB'C'$ más 16 aonad chearnacha atá in achar $\triangle ABC$.



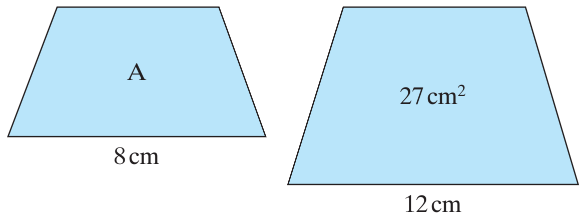
8. I gcás an triantáin ABC, $XY \| BC$ agus $\dfrac{|AB|}{|AX|} = \dfrac{3}{2}$.
Más 4 cm^2 atá in achar an triantáin AXY, faigh achar an triantáin ABC.



9. Déanann duine dearadh le haghaidh mósáice. 176 cm^2 atá in achar an dearaidh. Méadú ar an dearadh is ea an mhósáic féin agus is é 2.5 an fachtóir scála. Céard é achar na mósáice féin?

10. Má theastaíonn uait grianghraf a mhéadú sa chaoi is go mbeidh a achar iolraithe faoi 4, cén fachtóir scála ba chóir duit a úsáid? Cén fachtóir scála ba chóir duit a úsáid má theastaíonn uait go mbeadh an t-achar dúbailte?

11. Tá na cruthanna ar dheis comhchosúil. Faigh achar chruth A.

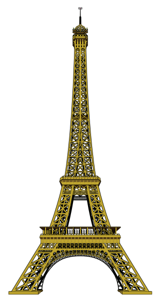


12. Baintear leas as gléas fótachóipeála chun an léaráid ar dheis a laghdú go dtí $\frac{2}{3}$ dá bunmhéid.

(i) Más 156 mm ar airde atá an bhunléaráid, cé chomh hard is a bheidh an léaráid laghdaithe?

(ii) Más 28 mm ar airde atá an lipéad ar an léaráid laghdaithe, faigh airde an lipéid ar an mbunléaráid.

13. Tá Túr Eiffel 300 m ar airde. Tá samhail de Thúr Eiffel 15 cm ar airde agus 25.5 cm^2 atá in achar an bhoinn. Cén t-achar atá i mbonn an túir féin?



14. Tarraingítear plean de ghairdín beag agus is é 1 : 25 an scála.

(i) Clúdaíonn lochán 24 cm^2 den phlean. Céard é achar, ina m^2, an locháin féin?

(ii) 17 m2 atá in achar na faiche féin. Cén t-achar a chlúdóidh an fhaiche ar an bplean? Tabhair do fhreagra ina cm^2.

15. Is é 1 : 1000 an scála ar léarscáil. Méadaíonn Anna an léarscáil faoi fhachtóir scála 2.

(i) Céard é an scála le haghaidh na léarscáile méadaithe?

(ii) Ar an mbunléarscáil, tá sráid Anna 6 cm ar fad. Cén fad atá sa tsráid féin? Tabhair do fhreagra ina mhéadair.

Fuair Seán an bhunléarscáil ar iasacht ó Anna agus mhéadaigh sé í faoi fhachtóir scála $\frac{1}{2}$.

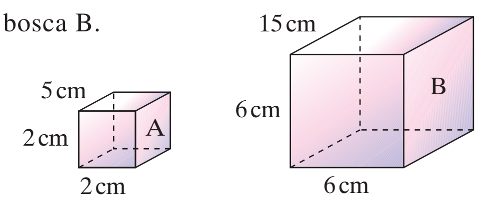
(iii) Céard é an scála ar léarscáil mhéadaithe Sheáin?

(iv) Má tá fad 1 km idir dhá stáisiún iarnróid, cá fhad atá siad óna chéile ar léarscáil mhéadaithe Sheáin?

16. Féach ar an bhfíor ar dheis. Is méadú ar bhosca A é bosca B.

(i) Scríobh síos luach k, fachtóir scála an mhéadaithe.

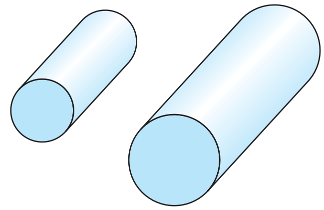
(ii) Céard é an gaol idir k agus an fachtóir scála i gcás toirte?



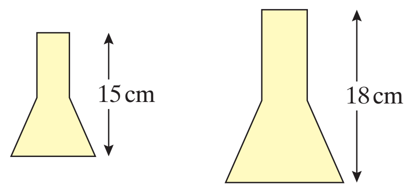
17. Déanann dealbhóir samhail chré ar scála beag de dhealbh atá sí a phleanáil. Tá an tsamhail 40 cm ar airde. Beidh an dealbh dheiridh 100 cm ar airde.
(i) Céard é fachtóir scála an mhéadaithe?
(ii) Céard é an fachtóir scála i gcás na toirte?
(iii) 240 cm3 atá i dtoirt na samhla.
Cén toirt a bheidh sa dealbh dheiridh?

18. Tá dhá shorcóir **chomhchosúla** le feiceáil sa léaráid. Ga an tsorcóra is lú, is ionann é agus leath gha an tsorcóra is mó.
200 cm^3 atá i dtoirt an tsorcóra is lú.

Faigh toirt an tsorcóra is mó.



19. Tá dhá bhuidéal seampú le feiceáil sa léaráid. Tá na cruthanna comhchosúil le chéile ó thaobh na matamaitice de. Is féidir 400 ml de sheampú a chur sa bhuidéal is lú. Ríomh cé mhéad seampú is féidir a chur sa bhuidéal is mó. Tabhair do fhreagra ina ml, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.

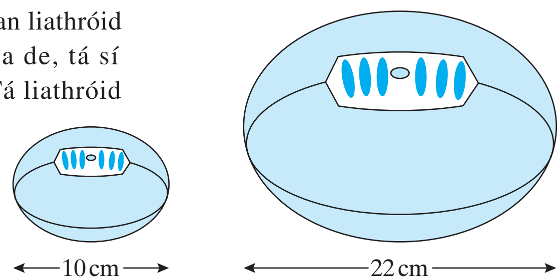


20. Tá piseanna garraí á ndíol i gcannaí de dhá mhéid éagsúla, 300 g agus 400 g. Tá an dá shaghas canna comhchosúil le chéile ó thaobh na matamaitice de. Má tá an canna beag 10 cm ar airde, ríomh airde an channa mhóir, ceart go dtí an cm is gaire.

21. 5 cm^2 agus 45 cm^2 faoi seach atá in achair dromchla dhá dhlúthsféar, agus 2 kg atá i mais an sféir is lú.
Faigh mais an sféir is mó.

22. Tá liathróid rugbaí ag páiste. 10 cm ar fad atá an liathróid agus 200 cm^3 atá ina toirt. Ó thaobh crutha de, tá sí comhchosúil le liathróid rugbaí lánmhéide. Tá liathróid rugbaí lánmhéide 22 cm ar fad.

Faigh toirt na liathróide lánmhéide.

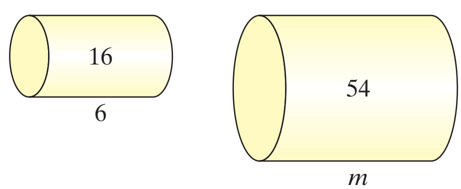


23. Tá lochán ornáideach 8 m ar leithead agus tá 50 m^3 uisce ann.
Cé mhéad uisce is féidir a chur i samhail den lochán atá 20 cm ar leithead?

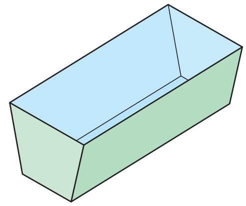
Tabhair do fhreagra ina cm^3.

24. Tá an dá shorcóir ar dheis comhchosúil le chéile ó thaobh crutha de. 16 aonad ciúbach atá i dtoirt an tsorcóra ar chlé agus 54 aonad ciúbach atá i dtoirt an tsorcóra ar dheis, mar atá le feiceáil.

Faigh luach m, fad an tsorcóra is mó.



25. Samhail de thrach uisce atá ar dheis.
Agus é lán, is é achar dromchla an uisce ann ná 400 cm^2.
1.2 m^2 atá in achar dromchla an trach féin agus é lán.
Is féidir 0.1 m^3 uisce a chur sa trach féin.
Cé mhéad uisce is féidir a chur sa tsamhail?
Tabhair do fhreagra ina cm^3, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.



26. Bhí grúpa ochtair amuigh ag taiscéaladh. Tháinig siad ar dhealbh dhlúth-óir a bhí 40 cm ar airde agus a raibh toirt 12,000 cm^3 inti. Ní raibh siad in ann cinneadh a dhéanamh i dtaobh cén duine acu a bhfágfaí an dealbh aige nó aici, mar sin leádh í agus rinneadh macasamhla ón ór, ceann amháin do gach duine acu. Úsáideadh an t-ór ar fad.
Cén airde a bhí sna macasamhla?

MÍR 6.2: Tógálacha

Agus tú ag déanamh staidéir ar thógálacha le haghaidh an Teastais Shóisearaigh, d'fhoghlaim tú:

- Cén chaoi le mírlíne a dhéroinnt
- Cén chaoi le huillinn a dhéroinnt
- Cén chaoi le triantáin éagsúla a thógáil
- Cén chaoi le línte comhthreomhara agus ingearacha a tharraingt.

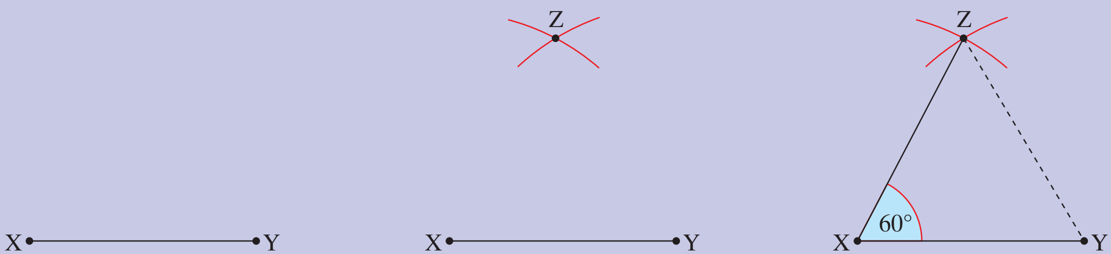
Sa mhír seo beimid ag plé le seacht dtógáil nua atá ar chúrsa na hArdteistiméireachta. Ina theannta sin, beimid ag foghlaim cén chaoi leis na tógálacha sin a chur i bhfeidhm sa ghnáthshaol. Chun na tógálacha seo a dhéanamh teastaíonn compás, corr dhíreach agus uillinntomhas.

Nuair a úsáideann tú compás, ní mór duit na stuanna tógála a fhágáil ann mar fhianaise gur úsáid tú an modh ceart.

1. Uillinn 60° a tharraingt

60° atá i ngach uillinn i dtriantán comhshleasach. Anois bainfimid leas as an eolas sin chun uillinn 60° a tharraingt.

Bíonn gach slios ar thriantán comhshleasach ar comhfhad.



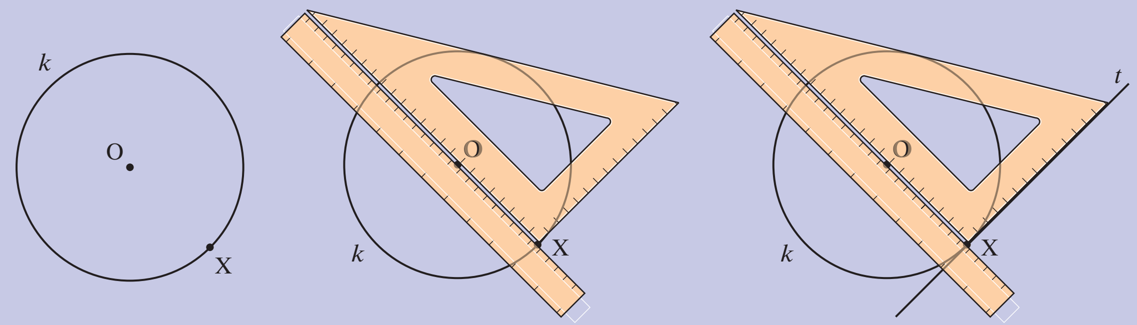
Tarraing mírlíne [XY].

Socraigh an compás sa chaoi is go mbeidh ga $|XY|$ agat. Le X mar lárphointe agus ga $|XY|$, tarraing stua.
Déan an rud céanna ach bíodh Y ina lárphointe an uair seo.
Tagann na stuanna le chéile ag Z.

Ceangail XZ.
$|\angle ZXY| = 60°$.

Is triantán comhshleasach é XYZ.

2. Cén chaoi le tadhlaí le ciorcal a thógáil ag pointe áirithe ar an gciorcal



Tugtar dúinn ciorcal, k agus pointe air, X. Is é O lárphointe an chiorcail.

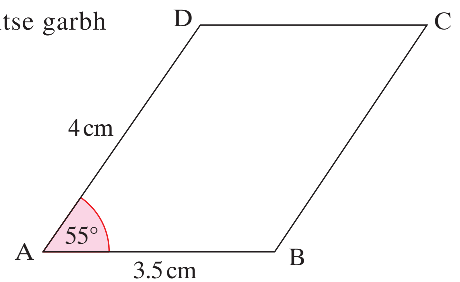
Ceangail X le O, lárphointe an chiorcail. Leag rialóir ar feadh OX agus sleamhnaigh dronbhacart ar feadh na rialóra go dtí go sroicheann sé X.

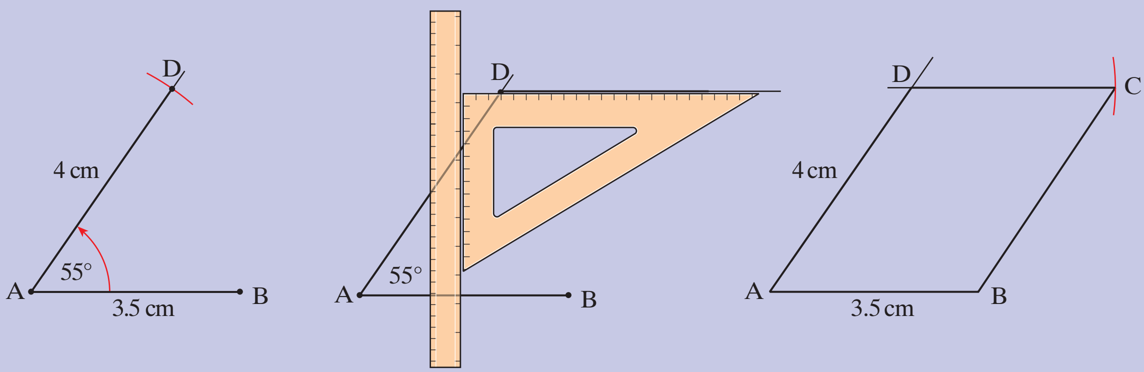
Tarraing líne *t* trí X ingearach le OX. Tadhlaí leis an gciorcal k is ea *t*.

3. Cén chaoi le comhthreomharán a thógáil, má thugtar duit faid na sleasa agus tomhais na n-uillinneacha

Taispeánann na treoracha thíos cén chaoi le comhthreomharán, ABCD, a thógáil, áit a bhfuil $|AB| = 3.5$ cm, $|AD| = 4$ cm agus $|\angle DAB| = 55°$.

An chéad rud a dhéanaimid ná sceitse garbh de ABCD a tharraingt.



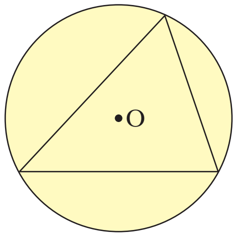


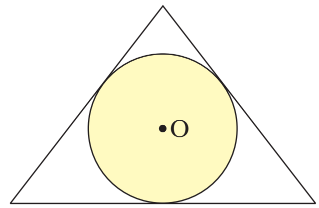
Tarraing líne chothrománach [AB] = 3.5 cm. Bain úsáid as uillinntomhas chun uillinn 55° a thomhas ag A. Tarraing líne trí A agus tomhais $|AD| = 4$ cm.

Leag dronbhacart ar feadh na líne AB. Bain úsáid as rialóir chun an dronbhacart a shleamhnú suas go dtí an pointe D. Tarraing líne trí D, comhthreomhar le AB.

Bain úsáid as compás ar ga dó 3.5 cm (mar a chéile le $|AB|$) chun stua a tharraingt ar an líne. $|DC| = 3.5$ cm. Ceangail BC. Is é ABCD an comh-‑threomhar le AB.

Ciorcail agus triantáin





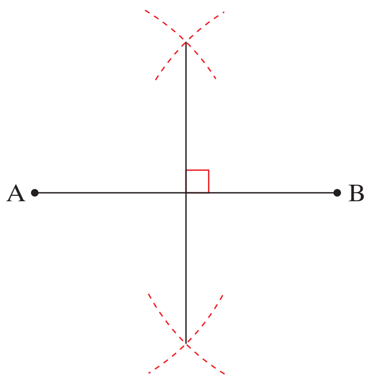
Is éard is **imchiorcal** triantáin ann ná an ciorcal a ghabhann trí na trí rinn, mar atá le feiceáil sa léaráid thuas.
Imlár an triantáin a thugtar ar lárphointe, O, an chiorcail seo.

Inchiorcal an triantáin a thugtar ar chiorcal atá inscríofa i dtriantán sa chaoi is go dtadhlaíonn gach ceann de na trí shlios le himlíne an chiorcail.
Ionlár an triantáin a thugtar ar lárphointe an inchiorcail. San fhíor thuas, is é O an t-ionlár.

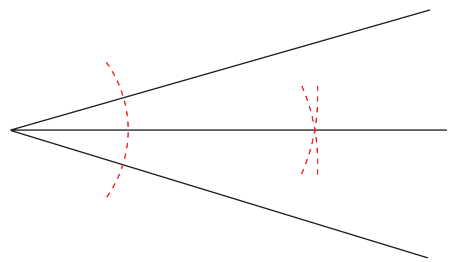
Chun imchiorcal agus inchiorcal triantáin a thógáil, bainfidh tú leas as dhá thógáil a ndearna tú staidéar orthu le haghaidh scrúdú an Teastais Shóisearaigh.

Na léaráidí thíos, cabhróidh siad leat chun na céimeanna sna tógálacha sin a thabhairt chun cuimhne.

Déroinnteoir ingearach mírlíne

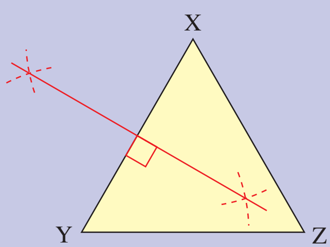


Déroinnteoir uillinne

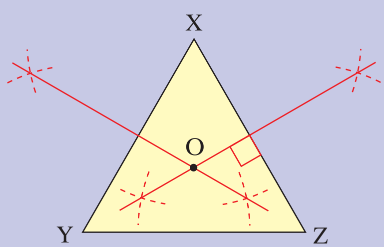


Ba chóir duit na tógálacha sin a chleachtadh sula dtugann tú faoi imchiorcal agus inchiorcal triantáin a tharraingt.

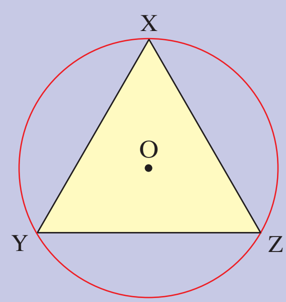
4. Cén chaoi le himchiorcal triantáin áirithe a thógáil



Tóg déroinnteoir ingearach [XY].



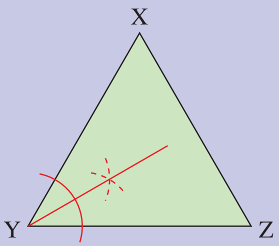
Tóg déroinnteoir ingearach [XZ]. Sa phointe O a thagann an dá dhéroinnteoir le chéile, mar a thaispeántar. Is é O an t-imlár.



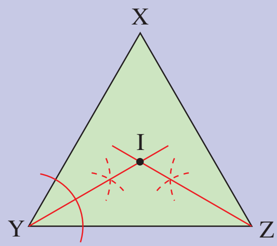
Tarraing ciorcal trí X, Y agus Z. Bíodh O ina lárphointe agus |OX| ina gha. Is é seo imchiorcal an triantáin.

5. Cén chaoi le hinchiorcal triantáin áirithe a thógáil

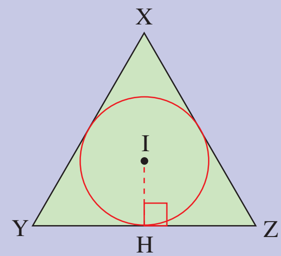
Chun inchiorcal triantáin a thógáil, ní mór déroinnteoir uillinne a thógáil, tógáil a thugtar ar an leathanach roimhe seo.



Tóg déroinnteoir ∠XYZ,, mar a thaispeántar.



Anois tóg déroinnteoir∠XZY. Sa phointe I a thagann an dá dhéroinnteoir le chéile. Is é I an t-ionlár.

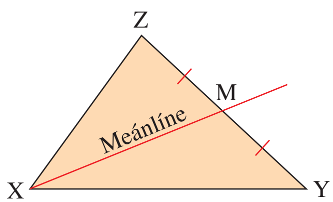


Bain úsáid as dronbhacart chun ingear a tharraingt ó I go dtí an líne YZ. Tagann an t-ingear agus YZ le chéile ag H. Agus |IH| ina gha, tarraing ciorcal a theagmhóidh leis na trí shlios. Is é seo inchiorcal an triantáin XYZ.

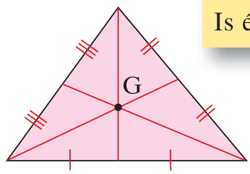
6. Cén chaoi le meánlár triantáin a thógáil

Meánlíne a thugtar ar an mírlíne a cheanglaíonn rinn triantáin le lárphointe an tsleasa urchomhairigh.

I gcás an triantáin thíos, is meánlíne í [XM].



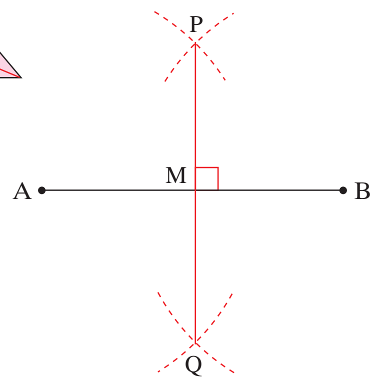
Meánlár an triantáin a thugtar ar phointe trasnaithe na dtrí mheánlíne ar thriantán.



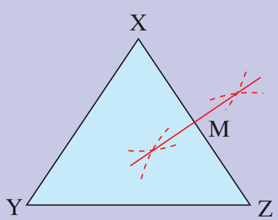
Is é G an meánlár.

Chun lárphointe mírlíne ar bith a fháil, tógaimid déroinnteoir ingearach na mírlíne sin.

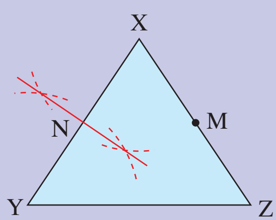
Seans go mbeidh an léaráid ar dheis ina cabhair agat chun na céimeanna a bhaineann leis an tógáil seo a thabhairt chun cuimhne.



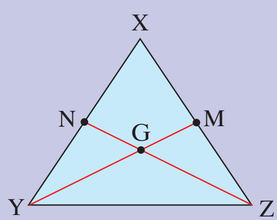
Na trí léaráid thíos, léiríonn siad na céimeanna a bhíonn le leanúint agus tú ag tógáil meánlár triantáin.



Tóg déroinnteoir ingearach [XZ], mar a thaispeántar. Is é M lárphointe [XZ].



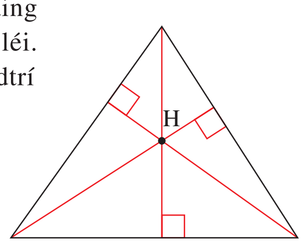
Anois tóg déroinnteoir ingearach [XY]. Is é N lárphointe [XY].

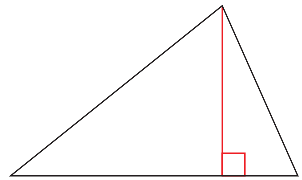


Ceangail YM agus ZN. Ag an pointe G a thagann siad le chéile. Is é G meánlár an triantáin.

7. Cén chaoi le hingearlár triantáin a thógáil

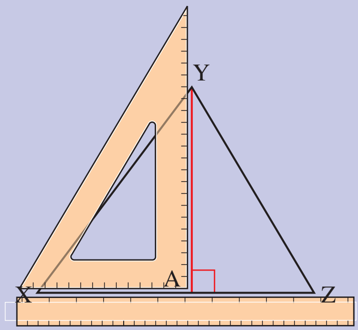
I gcás gach ceann de na trí rinn ar thriantán, tarraing mírlíne ingearach go dtí an slios urchomhaireach léi. An t-**ingearlár** a thugtar ar phointe trasnaithe na dtrí mhírlíne sin.



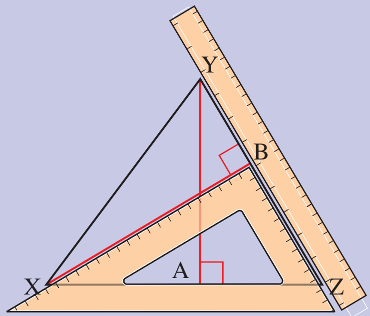


An t-ingearlár a thugtar ar an bpointe H.

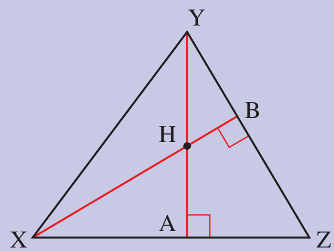
Na léaráidí thíos, léiríonn siad na céimeanna a bhaineann le hingearlár triantáin a thógáil.



Leag an rialóir ar feadh XZ agus úsáid an dronbhacart chun an líne YA a tharraingt ingearach le XZ.



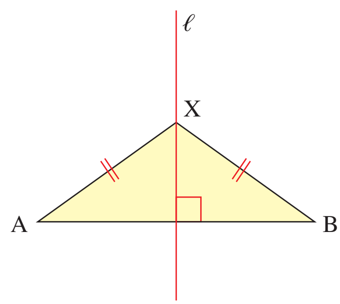
Úsáid an rialóir agus an dron--bhacart chun an líne XB a tharraingt ingearach le YZ.



Tagann na línte YA agus XB le chéile sa phointe H. Is é H ingearlár an triantáin.

Feidhmeanna de chuid na dtógálacha sin

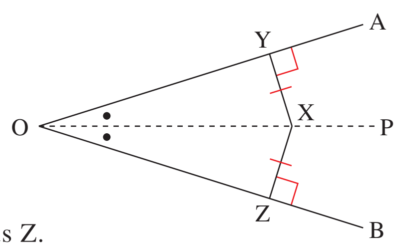
Sa léaráid ar dheis, is í an líne ℓ déroinnteoir ingearach [AB].



Pointe ar bith ar an déroinnteoir sin, tá sé ar comhfhad ó A agus B.

Mar sin $|AX| = |XB|$.

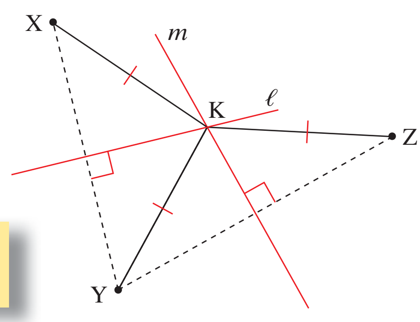
Is é OP déroinnteoir $\angle AOB$.



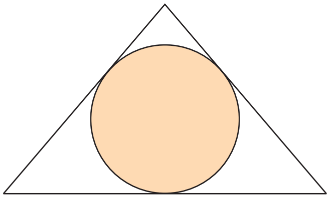
Pointe ar bith ar an déroinnteoir sin, tá sé ar comhfhad ó dhá shlios na huillinne. $|XY| = |XZ|$.

Cuir i gcás trí phointe, X, Y agus Z.
Cén chaoi a bhfaighimid pointe atá ar comhfhad ó gach ceann de na trí phointe?
Tóg déroinnteoirí ingearacha [XY] agus [YZ].
Tabhair ℓ agus m ar na línte sin.
Pointe ar bith ar ℓ, tá sé ar comhfhad ó X agus Y.
Pointe ar bith ar m, tá sé ar comhfhad ó Y agus Z.
Trasnaíonn na línte ℓ agus m a chéile ag K.
Tá K ar comhfhad ó X, Y agus Z.

Is éard is brí le 'ar comhfhad' ná 'an fad céanna'.

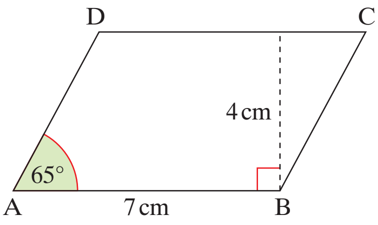


Is é an t-**inchiorcal** an **ciorcal is mó** is féidir a tharraingt taobh istigh de thriantán, is é sin, an ciorcal a theagmhaíonn le gach ceann de na trí shlios.



Triailcheisteanna 6.2

1. (i) Taispeánann an léaráid ar dheis sceitse garbh den chomhthreomharán ABCD.
Tóg an comhthreomharán seo más 4 cm atá a airde ingearach.



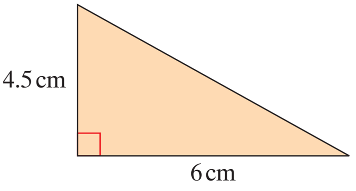
(ii) Tarraing na trasnáin [AC] agus [BD].
An bhfíoraíonn an tógáil a rinne tú go ndéroinneann na trasnáin a chéile?

(iii) Anois cruthaigh go ndéroinneann an trasnán [AC] an trasnán [BD].

2. Tarraing an comhthreomharán ABCD ar a bhfuil bhonn [AB], áit a bhfuil $|AB| = 4.5$ cm, $|BC| = 3$ cm agus $|AC| = 6$ cm. Tomhais $\angle ABC$.

3. Tarraing triantán ar a bhfuil sleasa 6 cm, 5 cm agus 4 cm.
Anois tóg imchiorcal an triantáin seo. Taispeáin na línte tógála go léir.

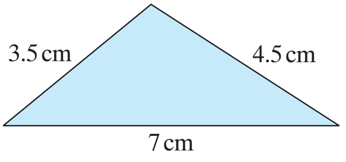
4. Tarraing an triantán dronuilleach, mar atá le feiceáil ar dheis.
Anois tóg imchiorcal an triantáin seo.
Céard a thugann faoi deara faoi imlár an triantáin?



Anois tarraing triantán dronuilleach ar bith eile agus tóg an t-imchiorcal.

An bhfuair tú an toradh céanna agus a fuair tú don chéad triantán?
Cén tátal a bhainfeá as sin maidir le himlár triantáin dhronuilligh?

5. Sceitse garbh de thriantán atá sa léaráid ar dheis.
7 cm, 4.5 cm agus 3.5 cm ar fad atá na sleasa ar an triantán.

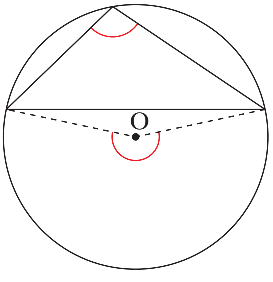


Tarraing an triantán sin go cruinn agus tóg an t-imchiorcal.

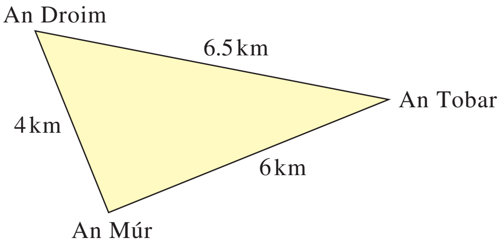
Má tá an tarraingt agus an tógáil déanta go cruinn agat, feicfidh tú go bhfuil lár an imchiorcail taobh amuigh den triantán.

Cén ceangal atá idir an saghas triantáin atá tarraingthe agat agus an áit a bhfuil an t-imlár?

Bain úsáid as an léaráid ar dheis le míniú cén fáth ar taobh amuigh den triantán a bhíonn imlár triantáin mhaoluilligh i gcónaí.



6. Taispeántar sa léaráid trí shráidbhaile, An Droim, An Múr agus An Tobar.

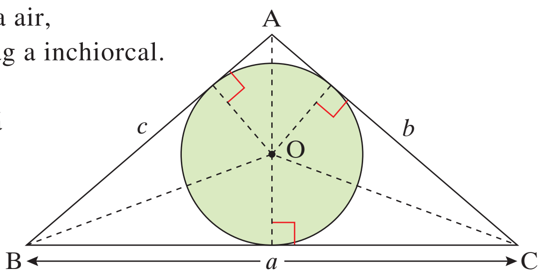


Agus an scála 1 cm = 1 km, in úsáid agat, déan líníocht chruinn den léaráid thuas.
Tá sé beartaithe scoil a thógáil ar comhfhad ó na trí shráidbhaile.
Taispeáin ar do líníocht cén áit ar chóir an scoil a thógáil.

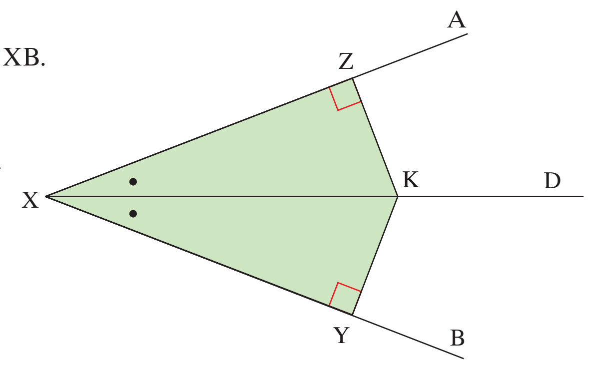
7. Tóg uillinn 60°. Ná húsáid ach compás agus rialóir agus tú á dhéanamh.

8. Tarraing triantán ar a bhfuil sleasa 6.5 cm, 5 cm agus 4 cm.
Bain úsáid as déroinnteoirí aon dá uillinn sa triantán chun lárphointe a inchiorcail a fháil.
Anois tarraing an t-inchiorcal.

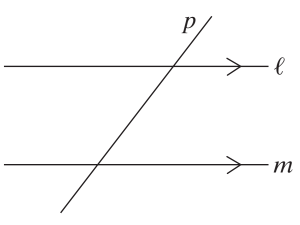
9. Is triantán é ABC. a, b agus c ar fad atá na sleasa air, mar a thaispeántar. Ga r agus lárphointe O atá ag a inchiorcal.
(i) Scríobh achar $\triangle$BOC i dtéarmaí a agus r.
(ii) Taispeáin uaidh sin gurb é achar $\triangle$ABC ná $\frac{1}{2}r\,(a + b + c)$.



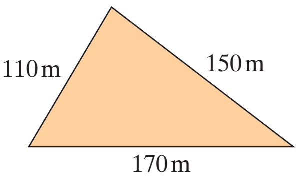
10. Is í an líne XD déroinnteoir $\angle$AXB.
Is pointe ar XD é K, KZ $\perp$ AX agus KY $\perp$ XB.
Taispeáin gurb iomchuí dá chéile iad na triantáin XKZ agus XKY.
Taispeáin uaidh sin go bhfuil $|KZ| = |KY|$.
Cén tátal is féidir leat a bhaint maidir le pointe ar bith ar dhéroinnteoir uillinne?



11. Sa léaráid ar dheis, is traslíne í atá ag trasnú p dhá líne chomhthreomhara ℓ agus m.
Tarraing sceitse garbh chun suíomhanna na bpointí X agus Y a thaispeáint, más ar comhfhad ó na trí líne atá X agus Y.

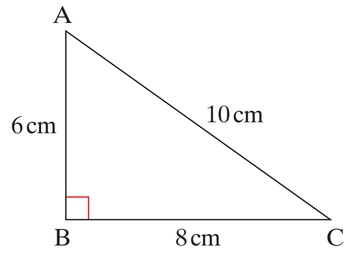


12. Cruth triantáin atá ar láithreán campála agus tá bóithre gnóthacha ag rith ar feadh gach ceann de thrí thaobh an láithreáin.
Tá taobhanna an láithreáin 110 m, 150 m agus 170 m ar fad.



(i) Agus scála 10 m = 1 cm in úsáid agat, tarraing léaráid scálaithe den láithreán seo.
(ii) Taispeáin ar an léaráid an áit is fearr le puball a chur ionas go mbeidh sé chomh fada agus is féidir ó gach ceann de na trí bhóthar. Taispeáin do chuid línte tógála.

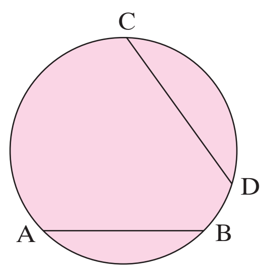
13. Is triantán dronuilleach é ABC, mar atá le feiceáil.
(i) Scríobh síos ga an imchiorcail gan é a tharraingt agus a thomhas.
(ii) Mínigh cén fáth arb é an pointe B ingearlár △ABC.



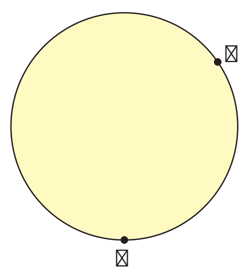
14. Tarraing triantán maoluilleach ar bith.
Anois tóg ingearlár an triantáin.
An taobh istigh nó taobh amuigh den triantán atá an t-ingearlár?
An fíor an toradh sin i gcás gach triantáin mhaoluilligh? Mínigh an fáth.

15. Tarraing ciorcal ar ga dó 3 cm agus marcáil an lárphointe O. Marcáil pointe X ar an gciorcal seo. Anois úsáid rialóir agus dronbhacart chun tangant leis an gciorcal seo a tharraingt ag an bpointe X.

16. San fhíor ar dheis feicfidh tú ciorcal agus dhá chorda [AB] agus [CD].
Céard is féidir leat a rá faoi dhéroinnteoir ingearach [AB]?
Anois déan cur síos ar an gcaoi ar féidir an dá chorda sin a úsáid chun lárphointe an chiorcail a fháil.



17. I gCeist 16 bhaineamar úsáid as dhá chorda chun lárphointe ciorcail a fháil.
Sa léaráid ar dheis feicfidh tú ciorcal agus dhá phointe ar an gciorcal.
Déan cur síos ar bhealach eile chun lárphointe an chiorcail seo a fháil agus tú ag úsáid na bpointí X agus Y.



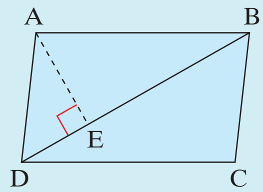
18. Tóg triantán comhshleasach a bhfuil a chuid sleasa 5 cm ar fad.
(i) Anois tóg imlár, O, an triantáin.
(ii) Mínigh cén fáth arb é O freisin ionlár an triantáin.

CUIR TRIAIL ORT FÉIN 6

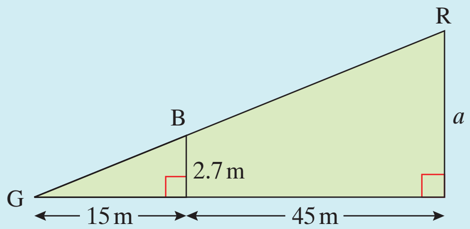
(Súil siar atá sna ceisteanna seo. Clúdaíonn siad Caibidil 3 agus Caibidil 6.)

Ceisteanna A

1. 40 cm^2 an t-achar atá sa chomhthreomharán ABCD.
Má tá $|DB| = 15$ cm, faigh $|AE|$,
áit a bhfuil $AE \perp DB$.

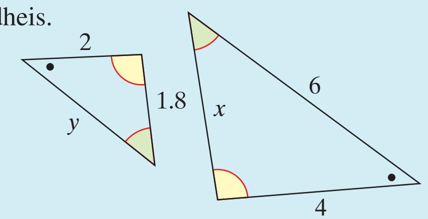


2. Tá Gary, G, díreach in ann barr crann tarchurtha raidió, R, a fheiceáil os cionn balla, B .
Tá Gary 15 m ón mballa. Tá an balla 45 m ón gcrann tarchurtha raidió.
Tá an balla 2.7 m ar airde.

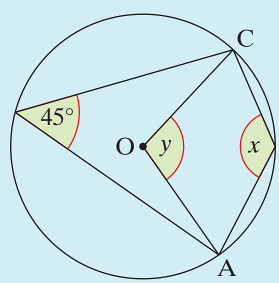


Ríomh airde an chrainn tarchurtha raidió, marcáilte a ar an léaráid.

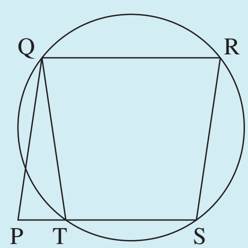
3. Tá na huillinneacha atá ar cóimhéid marcáilte sna triantáin ar dheis.
(i) Mínigh cén fáth a bhfuil an dá thriantán comhchosúil le chéile.
(ii) Faigh luach x agus y.



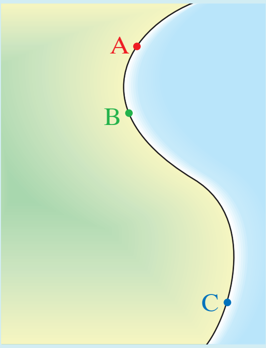
4. Is é O lárphointe an chiorcail ar dheis.
(i) Faigh méid na n-uillinneacha x agus y.
(ii) Tarraingítear ciorcal arb é [AC] a thrastomhas. Mínigh cén fáth a gcaithfidh an ciorcal sin gabháil trí O.



5. Féach ar an bhfíor ar dheis. Is comhthreomharán é PQRS.
Scríobh síos cé acu fíor nó bréagach atá gach ceann díobh seo a leanas. Tabhair fáth le do fhreagra i ngach cás.
(i) $|\angle TQR| + |\angle QRS| = 180°$
(ii) $|\angle PQR| + |\angle RST| = 180°$
(iii) $|\angle QTS| + |\angle QRS| = 180°$
(iv) $|\angle QPS| + |\angle QRS| = 180°$.

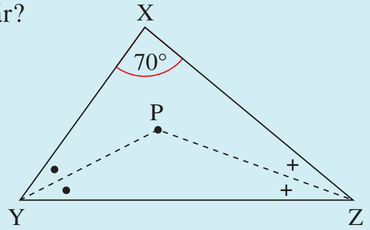


6. (i) Tá triúr, A, B agus C, ar líne an chladaigh. Feiceann an triúr acu bád ar muir. Tá an bád ar comhfhad ó gach duine den triúr. Déan cur síos ar an gcaoi a n-oibreofá amach suíomh an bháid.



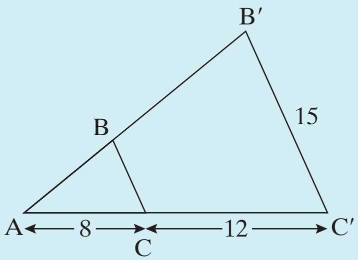
(ii) Sa triantán XYZ thíos, tá na huillinneacha XYZ agus XZY déroinnte. Má tá $|\angle YXZ| = 70°$, faigh $|\angle YPZ|$.

(iii) An é P an t-ionlár? Mínigh.

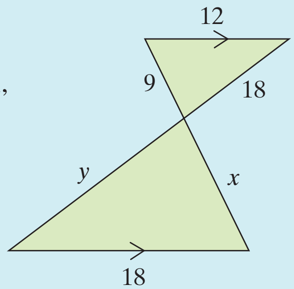


7. Tarraing triantán ar a bhfuil sleasa 5 cm, 6 cm agus 7 cm. Anois tóg imchiorcal an triantáin. Taispeáin do chuid línte tógála go léir.

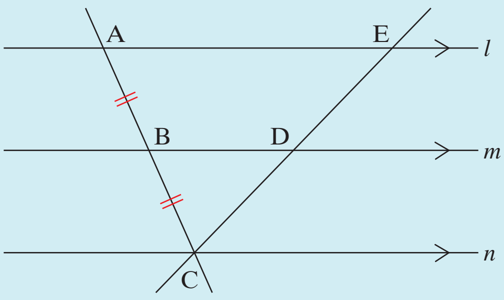
8. San fhíor thíos, méadú ar an triantán ABC is ea $AB'C'$, áit arb é A lárphointe an mhéadaithe.
Má tá $|AC| = 8$, $|CC'| = 12$ agus $|B'C'| = 15$, faigh
(i) fachtóir scála an mhéadaithe
(ii) $|BC|$
(iii) an cóimheas $|AB| : |AB'|$.



9. Ar na triantáin ar dheis, léiríonn na saigheada go bhfuil na línte comhthreomhar lena chéile.
Marcáil isteach na huillinneacha atá ar cóimhéid agus, uaidh sin, bain úsáid as triantáin chomhchosúla chun luach x agus y a fháil.



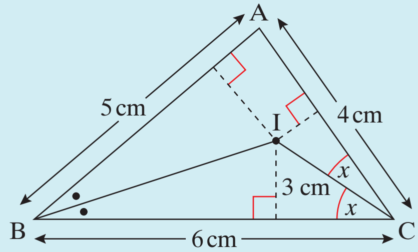
10. San fhíor thíos, tá na línte l, m agus n comhthreomhar.



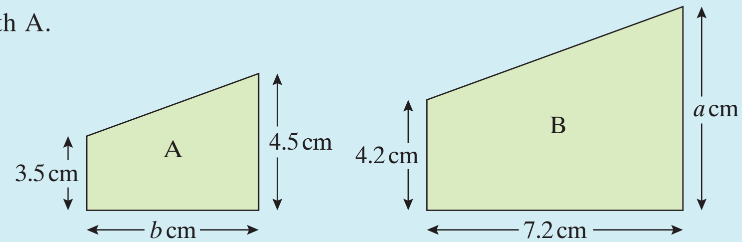
(i) Má tá $|AB| = |BC| = 7$ cm agus $|CD| = 8$ cm, faigh $|DE|$.
(ii) Má tá $|AE| = 12$ cm, faigh $|BD|$.

Ceisteanna B

1. Is é I ionlár an triantáin ABC ar dheis, agus 3 cm atá i nga an inchiorcail.
Céard é achar △BIC?
Faigh, uaidh sin, achar △ABC.

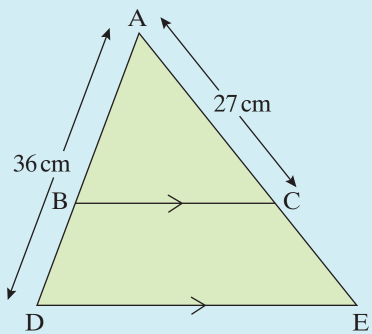


2. Tá cruth B comhchosúil le cruth A.
(i) Céard é fachtóir scála an mhéadaithe?
(ii) Faigh a agus b.

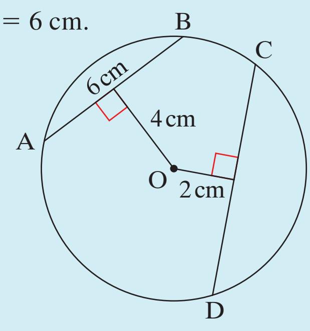


3. Tá BC comhthreomhar le DE.
Tá |AB| dhá oiread chomh fada le |BD|.
$|AD| = 36$ cm agus $|AC| = 27$ cm.

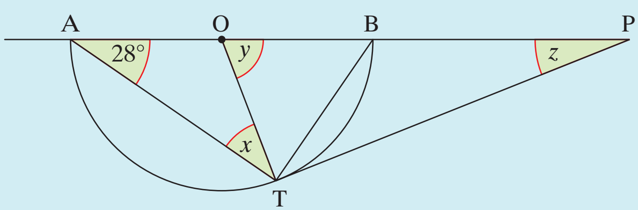
(i) Oibrigh amach fad [AB].
(ii) Oibrigh amach fad [AE].



4. Is é O lárphointe an chiorcail ar dheis agus tá $|AB| = 6$ cm.
4 cm atá san fhad ó O go AB agus 2 cm atá san fhad ó O go CD.
Faigh fad an chorda [CD].



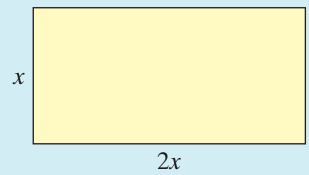
5. Is tadhlaí leis an leathchiorcal é [PT]. Is é O lárphointe an leathchiorcail.



Má tá $|\angle TAO| = 28°$, faigh luach alues of x, luach y agus luach z.

6. (i) 20 cm^2 atá in achar dromchla liathróide ar ga dó r cm.
Faigh, i dtéarmaí r, ga liathróide arb é 500 cm^2 achar a dromchla.

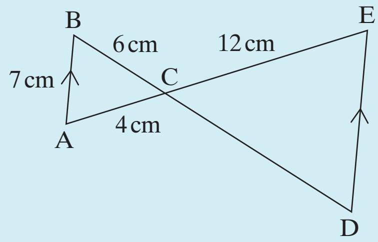
(ii) Is ionann fad dronuilleoige agus dhá oiread a leithid.
25 cm ar fad atá trasnán de chuid na dronuilleoige.
Oibrigh amach achar na dronuilleoige.
Bíodh do fhreagra ina shlánuimhir.



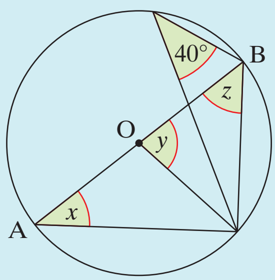
7. San fhíor ar dheis, AB || DE.

(i) Taispeáin go bhfuil na triantáin ABC agus CDE comhchosúil le chéile.

(ii) Má tá $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm agus $|CE| = 12$ cm, faigh $|CD|$.



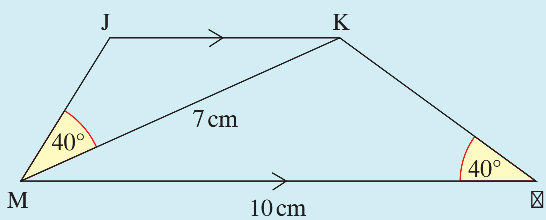
8. Is trastomhas é AOB den chiorcal arb é O a lárphointe.
Faigh luachanna x, y agus z.



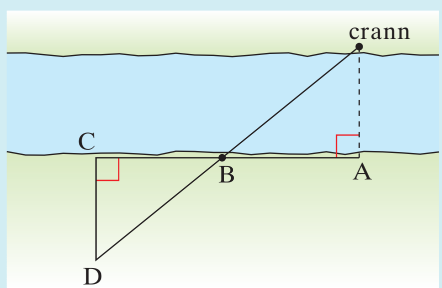
9. San fhíor ar dheis, JK || ML.

(i) Mínigh cén fáth a bhfuil na triantáin JKM agus KML comhchosúil le chéile.

(ii) Faigh fad [JK].



10. Is mian le taiscéalaí meastachán a dhéanamh ar leithead abhann. Seasann sé os comhair crainn, go ceartin--gearach, crann atá ag fás ar an mbruach eile, ag A. Ansin siúlann sé 50 m ar feadh bhruach na habhann go dtí B, áit a leagann sé maide. Ansin siúlann sé 50 m eile go C, agus ansin siúlann sé ag dronuillin--neacha leis an abhainn go dtí go sroicheann sé pointe D, áit a bhfuil an maide agus an crann ar aon líne. Má tá $|CD| = 80$ m, cén leithead atá san abhainn?



Ceisteanna C

1. Sa chóimheas 2:3 atá faid imill dhá chiúb.

(i) Céard é cóimheas

(a) a gcuid achair dromchla (b) a dtoirteanna?

(ii) Má tá imeall den chiúb is mó 12 cm ar fad, cén fad atá in imeall den chiúb is lú?

(iii) Más 54 cm^2 atá in achar iomlán an dromchla ar an gciúb is lú, céard é achar iomlán an dromchla ar an gciúb is mó?

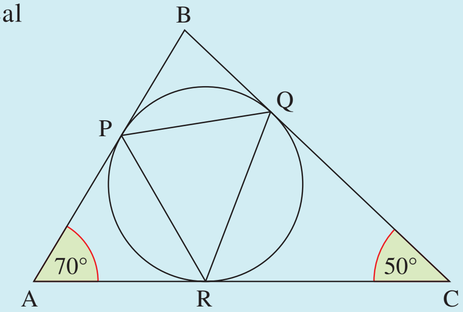
(iv) Más 108 cm^3 atá i dtoirt an chiúib is mó, cén toirt atá sa chiúb is lú?

2. Féach ar an léaráid ar dheis. Is tadhlaithe leis an gciorcal iad [AB], [BC] agus [CA] ag P, Q agus R faoi seach. Má tá $|\angle BAC| = 70°$ agus $|\angle BCA| = 50°$, faigh

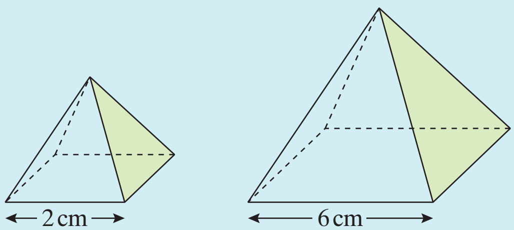
(i) $|\angle PRQ|$

(ii) $|\angle BPQ|$

(iii) $|\angle PQR|$.



3. (i) 2.75 cm^3 atá i dtoirt pirimide boinn chearnógaigh. 2 cm ar fad atá slios an bhoinn uirthi.



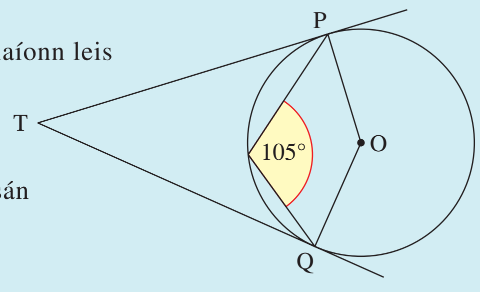
Cén toirt atá i bpirimid boinn chearnógaigh chomhchosúil a bhfuil slios an bhoinn uirthi 6 cm ar fad?

(ii) Is tadhlaithe iad TP agus TQ a thadhlaíonn leis an gciorcal, ar lárphointe dó O, ag P agus ag Q faoi seach..

(a) Faigh $|\angle POQ|$.

(b) Mínigh cén fáth ar ceathairshleasán comhchiorclach é POQT.

(c) Faigh $|\angle PTQ|$.



4. Is corda é [AB], ar fad dó 12 cm, i gciorcal, lárphointe O, ar ga dó 8 cm, agus is é [AC] an trastomhas. Faigh

(i) an fad idir lárphointe an chiorcail agus an corda [AB],

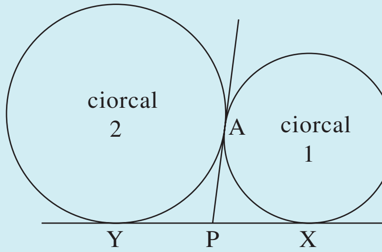
(ii) fad [BC],

(iii) an fad idir lárphointe an chiorcail agus an corda [BC],

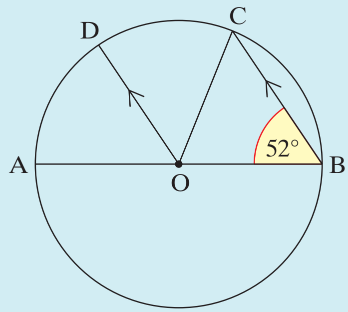
(iv) achar an triantáin ABC.

5. (i) Tá dhá chrúiscín comhchosúil lena chéile. Tá ceann amháin 4 cm ar airde, agus tá an ceann eile 6 cm ar airde. Más 50 cm^3 atá i dtoilleadh an chrúiscín is lú, faigh toilleadh an chrúiscín is mó.

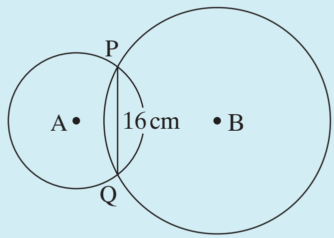
(ii) Cruthaigh
 (a) go ndéroinneann an tadhlaí ag A an líne [XY]
 (b) go bhfuil $|\angle XAY| = 90°$



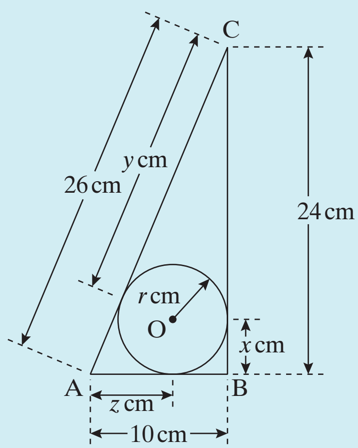
6. (i) Is trastomhas é AOB de chiorcal, lárphointe O. $|\angle ABC| = 52°$.
 (a) Cruthaigh go ndéroinneann OD $\angle AOC$.
 (b) Dá dtarraingeofaí líne ó A go D agus líne ó A go C, cén mhéid a bheadh in $\angle CAD$?
 (c) Cruthaigh go bhfuil OD $\perp$ AC.



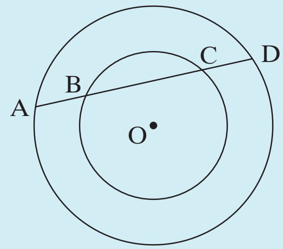
(ii) Féach ar an dá chiorcal ar dheis. An ceann ar chlé, is é A a lárphointe agus tá a gha 10 cm ar fad. An ceann ar dheis, is é B a lárphointe agus tá a gha 17 cm ar fad. Trasnaíonn an dá chiorcal a chéile ag P agus ag Q, áit a bhfuil $|PQ| = 16$ cm.
Cá fhad óna chéile atá lárphointí an dá chiorcal?
Bíodh do fhreagra ina shurda san fhoirm is simplí.



7. I gcás an triantáin dhronuilligh ar chlé:
 (i) Mínigh cén fáth a bhfuil $x + y = 24$.
 (ii) Scríobh síos dhá chothromóid cosúil léi sin lena mbaineann x agus z, agus y agus z.
 Faigh uaidh sin luach x, luach y agus luach z.
 (iii) Bain as sin ga an chiorcail inscríofa.



8. (i) Féach ar na ciorcail chomhlárnacha (i.e. a bhfuil an lárphointe céanna acu) ar dheis. Tá ga 6 cm ag an gceann is lú agus tá ga 10 cm ag an gceann is mó. An líne ABCD, trasnaíonn sí an chéad chiorcal ag B agus C agus trasnaíonn sí an dara ciorcal ag A agus D. Má tá $|BC| = 8$ cm, taispeáin go bhfuil $|AB| = 4\,(\sqrt{5} - 1)$ cm.

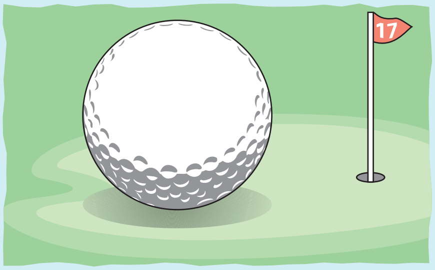


(ii) Baintear úsáid as fachtóir scála k chun cearnóg ar ga dó 25 cm^2 a mhéadú. Faigh an fachtóir scála k má tá an luach uimhriúil céanna ag achar na cearnóige méadaithe ina cm^2 agus atá ag imlíne na cearnóige méadaithe ina cm.

9. (i) Tá dhá channa shorcóireacha comhchosúil le chéile. 6 cm agus 8 cm faoi seach is ga do na boinn orthu. Más 252 cm^3 atá i dtoilleadh an channa is mó, faigh toilleadh an channa is lú.

(ii) Déantar liathróid ghailf ollmhór chun díolacháin déantús nua de liathróid ghailf a chur chun cinn. 50 cm^2 atá in achar dromchla gnáthliathróid ghailf. Tá trastomhas na liathróide ollmhóire 100 uair chomh mór le trastomhas gnáthliathróide.

Oibrigh amach achar dromchla na liathróide ollmhóire ina^2.



10. Leagadh síos raon ciorclach ar pháirc imeartha scoile áirithe. Iarradh ar na daltaí an ga a fháil, gan dul isteach sa raon ná an imlíne a thomhas. Bhí cead ag na daltaí úsáid a bhaint as téip 50-m, chomh maith lena dtrealamh matamaiticiúil féin.

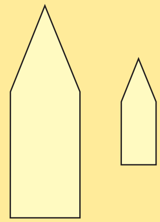
Chuaigh Sorcha go dtí pointe taobh amuigh den chiorcal, bhain úsáid as an téip le cinneadh cá raibh an dá thadhlaí leis an gciorcal, thomhais faid na dtadhlaithe ag 29 m agus fuair amach gur 120° a bhí san uillinn idir na tadhlaithe. Cén fad a fuair sí don gha, agus cá fhad a bhí sí ó imlíne an chiorcail?

An féidir leat modh eile a mholadh?

Achoimre ar Phríomhphointí

Méaduithe

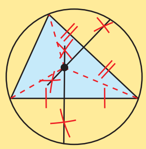
Nuair a mhéadaítear cruth



- bíonn an bhunfhíor agus an íomhá comhchosúil le chéile; athraíonn an mhéid ach ní athraíonn an cruth
- i gcás gach ceann de na mírlínte ar an íomhá, bíonn fad na mírlíne sin ar an mbunfhíor iolraithe faoi uimhir ar leith. An **fachtóir scála** a thugtar ar an uimhir sin.
- má bhíonn an fachtóir scála k níos mó ná $1 (k > 1)$, bíonn an íomhá níos mó ná an bhunfhíor.
- má bhíonn an fachtóir scála k níos lú ná $1 (k < 1)$, bíonn an íomhá níos lú ná an bhunfhíor.
- má mhéadaítear fíor faoi fhachtóir scála k, méadófar a hachar faoi fhachtóir scála k^2
- má mhéadaítear fíor faoi fhachtóir scála k, méadófar a toirt faoi fhachtóir scála k^3
- faightear lárphointe an mhéadaithe ach línte a tharraingt trí dhá thacar de phointí comhfhreagracha. Is é pointe trasnaithe na línte sin an lárphointe.

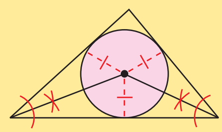
Tógálacha

Imchiorcal



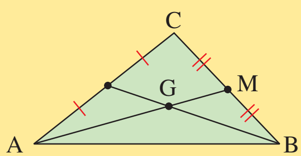
Is é lárphointe an imchiorcail pointe trasnaithe dhéroinnteoirí ingearacha na sleasa.

Inchiorcal



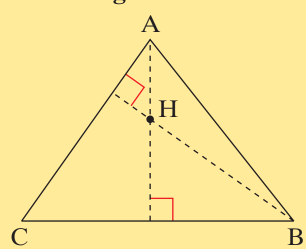
Is é lárphointe an inchiorcail pointe trasnaithe dhéroinnteoirí na n-uillinneacha.

Meánlár



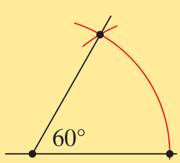
Meánlíne a thugtar ar an líne AM.
Meánlár an triantáin a thugtar ar an bpointe G, an áit a dtagann na meánlínte le chéile.

Ingearlár

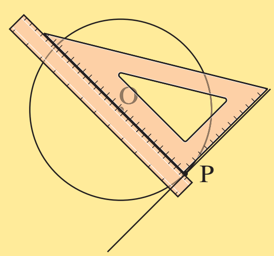


An t-**ingearlár** a thugtar ar phointe trasnaithe, H, na n-airdí ar an triantán ABC.

Uillinn 60°



Tadhlaí le ciorcal



Freagraí

Caibidil 1: An Chéimseata Chomhordanáideach: An Líne

Triailcheisteanna 1.1

1. (i) $\sqrt{41}$ (ii) $2\sqrt{5}$
(iii) $-\frac{1}{6}$ (iv) $(4, 0)$
2. $(-1, -1)$
3. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $-\frac{4}{3}$
6. $k = 5$
7. $p = 5$
8. (i) $\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{3}$
9. (i) a agus c (ii) b agus d
10. Fána $a = \frac{2}{3}$; fána $b = \frac{3}{2}$; fána $c = 2$
11. Tá an líne ag titim ó chlé go deis; $m = -\frac{1}{2}$
12. $a = -5$ nó 9
13. $k = 3, 11$
14. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $-2, k = 6$
(iii) $4\sqrt{5}$ (iv) 10 n-aonad chearnacha
15. (i) $q = 4$ nó $\frac{32}{3}$

Triailcheisteanna 1.2

1. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{27}{2}$ (iii) $\frac{5}{2}$ (iv) 5
2. $B' = (-7, -2)$, $C' = (1, -2)$; 8 n-aonad chearnacha
3. (i) $\frac{9}{2}$ (ii) $\frac{33}{2}$
4. 14 n-aonad chearnacha
5. $k = 7, -21$
6. $k = 5, -\frac{23}{5}$
7. $k = 1, 8$
8. Achar = 0; pointí comhlíneach
9. $k = 8$ nó 16
10. $b = 6$; 5 aonad chearnacha
11. $k = 1$
12. (i) 15 aonad chearnacha (ii) $2\sqrt{10}$ (iii) $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

Triailcheisteanna 1.3

1. (i) $3x - y - 13 = 0$ (ii) $2x + y + 12 = 0$
2. $2x - 3y + 9 = 0$
3. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $x - 3y - 15 = 0$
4. (i) 6 (ii) $x + 6y - 4 = 0$
5. $k = 2$
6. $t = \frac{8}{3}$
7. $k = 2$
8. $(6, 0)$ agus $(0, -2)$
9. $a = -5$
10. (i) $C = (-3, 0)$ (ii) $3x + 2y + 9 = 0$
11. $-\frac{2}{5}$; $2x + 5y - 11 = 0$
12. (i) níl siad comhthreomhar ná ingearach
(ii), (iii) ingearach (iv) comhthreomhar
(v) comhthreomhar (vi) ingearach
13. $(5, -2)$
14. $(2, 3)$; $2x - 3y + 5 = 0$
15. $3x - y - 7 = 0$
16. (ii) $k = 3$
17. $x - 5y + 11 = 0$
18. $\left(\frac{k}{3}, 0\right)$; $\left(0, \frac{k}{4}\right)$; $k = 24$
19. $2x - 3y + c = 0$; $2x - 3y - 2 = 0$
20. $4x + y = k$; $4x + y - 12 = 0$

Triailcheisteanna 1.4

1. $\left(\frac{17}{5}, -\frac{12}{5}\right)$
2. $(1, -4)$
3. $\left(\frac{16}{3}, 12\right)$
4. (i) $\left(\frac{13}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ (ii) $(-7, -6)$
5. (i) $\left(\frac{17}{4}, 6\right)$ (ii) $\left(\frac{13}{2}, 9\right)$
6. $\left(\frac{14}{3}, \frac{17}{3}\right)$
7. $x = 8, y = 3$
8. $x = 6, y = 4$
9. $x = 21, y = -14$
10. $1:2$

Triailcheisteanna 1.5

1. (i) $(1, 2)$ (ii) $(4, 1)$
2. $(2, 1)$
3. $(3, -2)$
4. $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$
5. $(2, 0)$
7. $k = -5$

Triailcheisteanna 1.6

1. 1

5. $c = 10$ nó $c = -40$

6. $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$

7. Tá

8. $a = -\frac{1}{3}, 3$

9. $a = -3$

12. Ní hea

13. $4x + 3y + c = 0; 4x + 3y + 11 = 0;$
$4x + 3y - 9 = 0$

14. $4x + 3y + k = 0; 4x + 3y + 13 = 0;$
$4x + 3y - 27 = 0$

15. $mx - y + 4m + 2 = 0; y - 2 = 0;$
$4x + 3y + 10 = 0$

16. $y - 5 = 0; 15x + 8y - 85 = 0$

17. (i) 2
(ii) Achar = 5 aonad chearnacha

Triailcheisteanna 1.7

1. (i) -1 (ii) $\frac{7}{4}$ (iii) 8

2. 45°

3. 135°

4. 82°

5. 135°

6. 30°

7. $-\frac{1}{5}$ nó 5

8. $5x + y = 0; x - 5y = 0$

9. $3x - y + 4 = 0; x + 3y - 2 = 0$

10. $x + 5y - 14 = 0; 5x + y - 22 = 0$

11. $2x + 3y - 6 = 0$

12. (i) Fána $= -t$ (ii) $t = -\frac{1}{3}$ nó 3

Triailcheisteanna 1.8

1. (a) (i) 95°F (ii) 58°F (iii) 10°C (iv) 38°C
(b) $5x - 9y - 160 = 0$
(c) 203°F

2. (i) €320 (ii) 45 m^2 (iii) €440

3. (i) €400, €800, €1200
(ii) $I = 400T$
(iii) $8\frac{3}{4}$ bliain
(iv) $A = 400T + 5000$

4. (ii) $5P + 4N = 700$ (iii) €69.60
(iv) 85

5. (ii) **A**: $P = 5 + 2D$; **B**: $P = 2.2D$
(iii) 25 km (iv) Gnólacht **B**

6. (ii) Praghas = €40 agus líon den earra = 28

Cuir triail ort féin 1

Ceisteanna A

1. $2x + 3y - 10 = 0$

2. 4 aonad chearnacha

3. $a = -8$

4. $a = 9$

5. (i) $\frac{3}{2}$ (ii) $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ agus $(0, -2)$
(iii) $\frac{4}{3}$ aonad cearnach

6. $\frac{2}{5}$; $2x - 5y + 3 = 0$

7. (i) $k = -\frac{1}{2}$ (ii) $(-4, 11)$

8. (a) Tá (b) Tá
(c) Tá (d) Níl

9. $2x - y - 8 = 0$

10. $k = 9$

Ceisteanna B

1. (i) 3 (ii) $k = -32$

2. (i) $(-1, 1)$ (ii) (a) $(3, 0)$ agus $\left(0, \dfrac{6}{k}\right)$
(b) $k = 3$

3. (i) $2x + y = 9$ (ii) (a) $x - 2y = 1 - 2k$
(b) $k = \frac{1}{2}$

4. $(3, 3)$

5. (i) $2x + y = 5$ (ii) 5 m (iii) 559 cm

6. $(4\frac{1}{2}, 1)$

7. (i) $y - 6 = m(x + 4)$
(ii) $\left(\dfrac{-6 - 4m}{m}, 0\right), (0, 6 + 4m)$
(iii) $m = \frac{3}{4}$ or $m = 3$

8. (i) $k = -3\frac{1}{2}$ (ii) $3x - 4y - 23 = 0$

9. (i) $mx - y + (5 - 2m) = 0$
(ii) $\left(\dfrac{-5 + 2m}{m}, 0\right), (0, 5 - 2m)$
(iii) $m = -\frac{1}{2}$ nó $m = -\frac{25}{2}$

10. (i) $\dfrac{4 - k}{2}$ (ii) $k = -2, 3$
(iii) 15 aonad chearnacha

Ceisteanna C

1. (i) Q = (8, 0), R = (0, −12) (ii) $c = 12\sqrt{2}$

2. $4x - 3y + 20 = 0; 4x - 3y - 20 = 0$

3. (i) $(1, -1)$ (ii) $\sqrt{65}$ (iii) 65π

4. (i) $x - 4y + 10 = 0$
(ii) A = (4, 1); C = (−2, 2)

5. $3x - y - 2 = 0$ agus $x + 3y - 14 = 0$

6. (i) $k = 2$ (ii) T = (2, 12)

7. (ii) $4I - 3S + 77 = 0$ (iii) €41 milliún
(iv) $10\frac{3}{4}\%$

8. $m = -1, 2$; tangant $= 3$

9. (ii) $4x + 3y + c = 0$
(iii) $4x + 3y + 5 = 0$; $4x + 3y - 15 = 0$

10. (i) fána $= \frac{-t}{t+2}$ (ii) $t = -\frac{3}{2}$ nó $t = 1$

Caibidil 2: Triantánacht 1

Triailcheisteanna 2.1

1. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) $\frac{5\pi}{6}$ (iv) $\frac{3\pi}{4}$
(v) $\frac{\pi}{5}$ (vi) $\frac{4\pi}{3}$ (vii) $\frac{13\pi}{6}$

2. (i) 180° (ii) 90° (iii) 30° (iv) 150°
(v) 80° (vi) 330° (vii) 75°

3. (i) 8 cm (ii) 16 cm (iii) 10 cm (iv) 5 cm

4. (i) 1 raidian (ii) 2 raidian
(iii) $\frac{1}{2}$ raidian (iv) $1\frac{1}{2}$ raidian
(v) $1\frac{1}{4}$ raidian

5. $7\frac{1}{2}$ cm

6. 15 cm^2

7. $1\frac{1}{4}$ raidian

8. $\frac{\pi}{6}$

9. $\frac{3}{2}$ raidian

10. $\frac{15\pi}{2}$ cm^2

11. (i) $\frac{5}{2}$ raidian (ii) 143°

12. $(4 - \pi)$ cm^2

13. 16π cm^2

14. (ii) 2π cm (iii) $(12\pi - 18\sqrt{3})$ cm^2

15. (i) $\theta = \frac{40 - 2r}{r}$ $\left(\text{nó } \theta = \frac{200}{r^2}\right)$
(ii) $r = 10$ (iii) $\theta = 2$ raidian

Triailcheisteanna 2.2

1. (i) 0.7431 (ii) 0.2756 (iii) 0.5407
(iv) 0.7266 (v) 0.5914

2. (i) 48° (ii) 69° (iii) 55°
(iv) 78° (v) 42° (vi) 12°

3. (i) 42° (ii) 53° (iii) 41°
(iv) 24°

4. 5

6. $42 + 12\sqrt{3}$

7. (i) 13.9 (ii) 44°

8. (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{6}$; $1 + \sqrt{3}$

Triailcheisteanna 2.3

1. (i) 0.7660 (ii) -0.7660 (iii) 0.6428
(iv) -0.6428 (v) -0.8192 (vi) 0.5736

2. (i) 0.6691 (ii) -0.8480
(iii) -0.9004 (iv) -0.9336

3. (i) sin 50° (ii) $-$cos 65°
(iii) $-$tan 20° (iv) $-$cos 40°
(v) $-$sin 70° (vi) $-$tan 60°

4. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(iv) $-\frac{1}{2}$ (v) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (vi) 1
(vii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (viii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. (i) 3ú (ii) 1ú (iii) 2ú (iv) 1ú

6. (i) 124° (ii) 68° (iii) 240°
(iv) 345° (v) 75°

7. 13° agus 167°

8. (i) 147° agus 213° (ii) 224° agus 316°
(iii) 43° agus 223°

9. 30° agus 150°

10. 1 agus -1

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ agus $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. $\frac{1}{2}$ agus $-\frac{1}{2}$

13. 233°

14. $-\frac{3}{4}$

15. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

17. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\sqrt{3}$

Triailcheisteanna 2.4

1. (i) 6.4 m (ii) 18.7 m (iii) 6.7 m

2. (i) 44° (ii) 35° (iii) 41°

3. (i) 68°16′ (ii) 9.7 (iii) 36 ad. cearnach

4. (i) 28.3 cm^2 (ii) 9.5 cm^2 (iii) 29.5 cm^2

5. (i) 35° (ii) 90° (iii) 42°

6. (i) 23 cm (ii) 182 cm^2

7. (i) 2 m

8. $x = 4$ cm

9. 72.5° agus 107.5°

10. (i) 7.3 cm (ii) 2.0 cm

11. 36.8 m

12. 103 km

Triailcheisteanna 2.5

1. (i) 7.2 cm (ii) 8.6 cm (iii) 9.4 cm

2. (i) 106° (ii) 44° (iii) 108°

4. 15.2 aonad cearnach

5. (i) 4.0 (ii) 120°

6. 146.5 m
7. (i) 46° (ii) 10.9 cm
8. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $a = 3, b = 8$
10. 18.3 cm
11. (i) $x = 4$ (ii) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$
12. (i) 21.5 cm (ii) 582 cm
13. 70°

Triailcheisteanna 2.6

1. (i) 11.87 cm (ii) 19.7°
2. (i) 25.7 m (ii) 38.7° (iii) 29.8 m
 (iv) 21.9°
3. (i) $|PY| = 180$ m; $|QY| = 297$ m
 (ii) 331 m
4. (i) 18.4° (ii) 31.9 cm (iii) 15.8°
5. (i) 7 m (ii) 13 m
6. (i) 3.3 m (ii) 17.6 m^2
7. 29 m
8. (i) 14.8 m (ii) 19.7° (iii) 28.5°
9. $x = 8$
10. 11.9 m
11. 6.1 m
12. (i) 28.6 m^2 (ii) 29.2 m^2
13. (i) 160 m (ii) 340 m (iii) 525 m
 (iv) 200 m
14. (i) 169.7 cm (ii) 177 cm (iii) 43°

Triailcheisteanna 2.7

1. (i) Peiriad $= 2\pi$ (ii) Raon $= [-1, 1]$
 (iii) Peiriad $= 2\pi$ (iv) Raon $= [-3, 3]$
2. (i) Peiriad $= 2\pi$ (ii) Raon $= [-1, 1]$
3. (i) (540°, 0) (ii) Peiriad $= \pi$
4. (i) Peiriad $= 2\pi$; Raon $= [-3, 3]$
 (ii) Peiriad $= \pi$; Raon $= [-2, 2]$
 (iii) Peiriad $= \frac{2\pi}{3}$; Raon $= [-4, 4]$
5. Peiriad $= \pi$; Raon $= [-3, 3]$; $y = 3 \cos 2x$
6. (i) Peiriad $= \pi$; Raon $= [-1, 1]$; $y = \cos 2x$
 (ii) Peiriad $= \pi$; Raon $= [-2, 2]$; $y = 2 \sin 2x$
 (iii) Peiriad $= \frac{\pi}{2}$; Raon $= [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; $y = \frac{1}{2} \sin 4x$
 (iv) Peiriad $= \pi$; Raon $= [-4, 4]$; $y = 4 \cos 2x$
7. (i) 1 (ii) 0 (iii) 1 (iv) -1
 (v) -1; $\frac{\pi}{4}$ agus $\frac{5\pi}{4}$
8. Seasann a do $4 \sin x$; seasann b do $4 \cos x$
9. $y = 3 \cos 3x$ (i) 0 agus $\frac{2\pi}{3}$
 (ii) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ agus π
10. $y = 2 \sin 3x$
11. (i) $y = 2 \cos 4x$ (ii) $y = \tan x$
 (iii) $y = 3 \sin 2x$ (iv) $y = 5 \cos 2x$
12. (i) $f(x) = 3 \cos 2x$; $g(x) = 2 \cos 3x$;
 $h(x) = \cos 3x$

Triailcheisteanna 2.8

1. 30° agus 150°
2. 30° agus 330°
3. 45° agus 225°
4. $\frac{\pi}{12} + n\pi$ nó $\frac{5\pi}{12} + n\pi$
5. $10° + n(120°)$ nó $110° + n(120°)$
6. $\frac{4\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$ nó $\frac{5\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$
7. $\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$ nó $\frac{5\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$
8. $\frac{\pi}{6} + n\pi$
9. $x = 75°, 105°, 195°, 225°, 315°, 345°$
10. 75°, 105°, 255°, 285°
11. $\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$
12. $\frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}$ nó $\frac{11\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}$
13. $\theta = 40°, 80°, 160°, 200°, 280°, 320°$
14. $\theta = 17°, 43°, 137°, 163°, 257°, 283°$

Cuir triail ort féin 2

Ceisteanna A

1. 23.1 cm^2
2. 150° agus 330°
3. (i) $\frac{6}{5}$ raidian (ii) 24 cm
4. $16\frac{4}{5}$ cm^2
5. (i) Peiriad $= 180°$; Raon $= [-2, 2]$
 (ii) $a = 2, b = 2$
6. 2 aonad cearnach
7. $-\frac{3}{4}$
8. 30° nó 150°
9. 49° nó 131°
10. $\frac{1}{2}$

Ceisteanna B

1. (i) 115° (ii) 43.5 cm^2
2. (i) $n\pi + \frac{5\pi}{12}$ nó $n\pi + \frac{7\pi}{12}$
 (ii) $1\frac{1}{2}$ raidian
3. (i) 57° (ii) 39 cm
4. 36 km/u

5. (i) $a = 5$ (ii) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

6. 2.9 m

7. (i) $[-4, 4]$ (ii) π (iii) -4
(iv) $g(x) = 4\cos x$; $f(x) = 2\sin 2x$
(v) $P = \left(\frac{5\pi}{4}, 2\right)$

8. 3.13 m

9. (a) (i) 9.4 m (ii) 42°
(b) Níl; gluaiseann na súile 32.4°

10. (i) $\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$ nó $\frac{2n\pi}{3} + \frac{11\pi}{18}$

Ceisteanna C

1. (i) 6.5 m (ii) 21.0 m (iii) 63.4°
(iv) 23.3 m (v) 16.2°

2. (i) $k - \frac{8}{\tan\theta}$ (ii) 49°

3. (i) $4 - 2\sqrt{2}$ (ii) $8 - 8\pi + 4\pi\sqrt{2}$

4. 12 mhéadar

5. (i) Peiriad $= \pi$; Raon $= [-3, 3]$
(ii) (a) 10.4 cm (b) $1\frac{1}{4}$ raidian

7. (i) $\frac{h}{\tan 25°}$ (ii) $\frac{h}{\tan 33°}$ (iii) 22.7 m

8. 38°

9. (i) 10°, 110°, 130°, 230°, 250°, 350°
(ii) $\left(\frac{32\pi}{3} - 8\sqrt{3}\right)$ cm^2

10. (i) $a = (0, 4)$, $b = (0, -4)$, $c = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, $d = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$,
$e = \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$, $f = \left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$
(ii) 20.5 m

Caibidil 3: Céimseata 1

Triailcheisteanna 3.1

1. $a = 46°$, $b = 134°$, $c = 80°$, $d = 100°$, $e = 65°$

2. $a = 111°$, $b = 74°$, $c = 112°$, $d = 65°$, $e = 40°$,
$f = 52\frac{1}{2}°$, $g = 60°$, $h = 30°$

3. $a = 62°$, $b = 110°$, $c = 55°$, $d = 34°$

4. (i) $x = 55°$, $y = 45°$ (ii) $x = 116°$, $y = 52°$
(iii) $x = 80°$, $y = 30°$

5. (i) $\sqrt{76}$ $(= 2\sqrt{19})$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{11}$

6. $x = 10$, $y = 8$

8. (i) Uillinneacha ailtéarnacha

9. (i) B'fhéidir nach bhfuil na sleasa ar comhfhad.

10. (i) Tá an dá cheann cothrom le $90° + |\angle CBG|$

11. $\sqrt{105}$

12. $\angle$DEA

Triailcheisteanna 3.2

1. (i) 36 cm^2 (ii) 6 cm

2. (i) 4.8 cm (ii) 10.5 cm (iii) 21.6 cm

3. (i) 96 cm^2 (ii) 126 cm^2 (iii) 143 cm^2

4. 308 cm^2; $17\frac{1}{9}$ cm

5. (i) Is í $\angle$BAC an uillinn is mó; is í $\angle$ACB an uillinn is lú; $|AC| > 5$ cm agus < 15 cm

6. (i) 5 cm (iii) 8 cm

7. (i) 30 cm^2 (ii) 30 cm^2
(iii) 45 cm^2 (iv) 4 cm

8. (ii) 150 aonad cearnach

9. (i) $3(a + 2)$; $7a$ (ii) $a = 1.5$

10. (i) $5(2x + 1)$; $12x$ (ii) $x = 2.5$

11. 76 cm^2

Triailcheisteanna 3.3

1. (i) 2.5 (ii) 9 (iii) $5\frac{5}{6}$

2. $x = 8.4$, $y = 2.8$; $a = 6$, $b = 8.4$

3. 14.4

4. 4.8

5. $|BC| = 4.2$; $|BP| = 1.6$

6. (i) 20 cm (ii) 2 : 3 (iii) 20 cm

7. (i) 8 cm (ii) 7 cm

8. $\frac{12}{x}$

9. (i) Tá na triantáin comhuilleach
(ii) [DF] (iii) $x = \frac{96}{7}$, $y = \frac{64}{7}$

10. $x = 4.5$, $y = 4$

11. (i) [XY] (ii) $x = 9$, $y = 13.5$

12. (i) $x = 16\frac{2}{3}$, $y = 10$ (ii) $x = 8$, $y = 5\frac{1}{3}$

13. (i) 9 (ii) 18

14. (ii) 6

15. $|BD| = 11.25$; $|AB| = 9$

16. (i) $\triangle$ABC agus $\triangle$DBC (ii) $m = 6$, $n = 6$

17. $x = 5$

18. (i) $\triangle$WXZ (ii) $w = 6\frac{2}{3}$, $v = 5\frac{1}{3}$

19. $x = 0.618$; $1 : 1.618$

20. $\frac{\sqrt{2}}{1}$

21. 10.8 m

Triailcheisteanna 3.4

1. $a = 96°$, $b = 88°$, $c = 136°$, $d = 84°$, $e = 48°$

2. $a = 52°$, $b = 44°$, $c = 45°$, $d = 20°$

3. $a = 47°$, $b = 94°$, $c = 43°$

4. $f = 40°$, $g = h = 55°$

5. $a = 42°$, $b = 48°$, $c = 40°$, $d = 55°$, $e = 35°$

6. $a = 95°$, $b = 75°$, $c = 43°$, $d = 116°$, $e = 64°$

7. 60°, 54°, 66°

8. (i) 90° (ii) 50° (iii) 50° (iv) 80°
9. $a = 55°$, $b = 90°$, $c = 49°$, $d = 49°$, $e = 67°$
10. (i) 62° (ii) 44°
12. 20°
13. (i) 146° (ii) 17°
15. (i) Na triantáin XRZ, YQZ agus PYX
(ii) 61° (iii) $|\angle XZY| = 61°$; $|\angle ZYX| = 61°$ agus $|\angle ZXY| = 58°$
16. 68°
17. (i) 106° (ii) 74° (iii) 53°
18. (i) 48° (ii) 48°
20. $a = 78°$, $b = 39°$; $x = 50°$, $y = 68°$; $c = 63°$, $d = 54°$
22. (ii) Ní bheadh (b) fíor i gcónaí
23. $4\sqrt{102}$ (= 40.4)
24. (a) 105.8 cm (b) 122.5 cm

Caibidil 4: An Chéimseata Chomhordanáideach: An Ciorcal

Triailcheisteanna 4.1

1. (i) $x^2 + y^2 = 4$ (ii) $x^2 + y^2 = 25$
(iii) $x^2 + y^2 = 2$ (iv) $x^2 + y^2 = 18$
(v) $16x^2 + 16y^2 = 9$ (vi) $4x^2 + 4y^2 = 25$
2. $x^2 + y^2 = 25$
3. $x^2 + y^2 = 17$
4. (i) (0, 0) (ii) 5 (iii) $x^2 + y^2 = 25$
5. $x^2 + y^2 = 17$
6. (i) 3 (ii) 1 (iii) $3\sqrt{3}$
(iv) $\frac{5}{2}$ (v) $\frac{2}{3}$ (vi) $\frac{7}{4}$
7. (i) $\sqrt{5}$ (ii) $x^2 + y^2 = 5$
8. $x^2 + y^2 = 25$
9. $x^2 + y^2 = 10$
10. $x^2 + y^2 = 20$; is tadhlaí é t

Triailcheisteanna 4.2

1. (i) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
(ii) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 8$
(iii) $(x - 4)^2 + y^2 = 12$
(iv) $x^2 + (y + 5)^2 = 18$
2. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$
3. (i) (1, 3)
(ii) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$
4. (i) $(3, 2)$; $r = 4$ (ii) $(-2, 6)$; $r = 2\sqrt{2}$
(iii) $(3, 0)$; $r = \sqrt{5}$ (iv) $(0, -2)$; $r = \sqrt{10}$
5. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 72$
6. (3, 3); $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
7. (i) $(2, -4)$; $r = 5$ (ii) $(1, 3)$; $r = 5$
(iii) $(4, 0)$; $r = 2\sqrt{6}$ (iv) $(-2\frac{1}{2}, 3)$; $r = \frac{9}{2}$
(v) $(1, -\frac{3}{4})$; $r = \frac{5}{4}$ (vi) $(0, 3\frac{1}{2})$; $r = 2$

10. Taobh istigh
11. Taobh amuigh
12. $k = -8$
13. (ii) 4 (iii) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$
14. (i) 2 (ii) $(4, -4)$
(iii) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 4$
(iv) k_4
15. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$
16. (i) (2, 6)
17. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$
18. (i) A: $(-7, -1)$; $r = 10$;
B: $(3, -1)$; $r = 10$;
C: $(-2, -1)$; $r = 5$
(ii) $(x + 7)^2 + (y + 1)^2 = 100$

Triailcheisteanna 4.3

1. Lárphointe = (0, 0); ga = $\sqrt{10}$
2. $(3, -4)$; $r = 5\sqrt{2}$
3. Ní tadhlaí é
4. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$
5. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 18$
6. (i) (1, 1)
(ii) 1
(iv) $|-g|$ agus $|-f|$ cothrom le fad an gha
7. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
8. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$
9. (i) $(2, -3)$; $r = 5$ (ii) $-31, 19$
10. (i) $2x + 8y - 1 = 0$ (ii) $8x - 2y - 21 = 0$
(iii) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (iv) $\sqrt{\frac{17}{2}}$
(v) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$
11. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
12. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
13. $-g - 2f = 6$; $6g + 10f + c = -34$;
$2g - 6f - c = 10$; $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$
14. $f = 0$; $3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0$
15. (i) $r = 3$
(ii) $k = 4$; T = (2, 0)
16. (i) $g = f$ agus $g, f < 0$
(ii) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$
17. (ii) $2x - 3y - 8 = 0$
(iii) $x + 5y + 9 = 0$
(iv) $(1, -2)$; $r = \sqrt{13}$
(v) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$
18. $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$
19. $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 30 = 0$;
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 18 = 0$
20. (i) $y = 1$
(ii) $(x - 15)^2 + (y - 7)^2 = 36$
(iii) $(x - 13)^2 + (y - 7)^2 = 36$

Triailcheisteanna 4.4

1. $x + y = 4$
2. $3x - y + 10 = 0$
3. $4x - y - 17 = 0$
4. (ii) $(1, -2)$
   (iii) $x + 2y - 7 = 0$
5. $4x - y + 2 = 0$
6. $(2, -5)$; $r = \sqrt{37}$; $x + 6y - 9 = 0$
7. 5
8. $(3, 2)$; $r = \sqrt{5}$
9. $(3, 1)$, $r = 5$; $c = -38, 12$
10. $k = 3, \frac{1}{9}$
12. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{2}$
    (nó $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 5 = 0$)
13. $mx - y = 0$; $y = 0$; $4x - 3y = 0$
14. $mx - y - 3m + 5 = 0$; $y - 5 = 0$;
    $24x - 7y - 37 = 0$
15. $3x + 4y + c = 0$; $3x + 4y + 8 = 0$;
    $3x + 4y - 22 = 0$
16. (i) $\sqrt{5}$
    (ii) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 5$
    (iii) $2x + y - 6 = 0$
17. (i) $(5k, -3)$ (ii) $k = 2$ (iii) $d = -53$
18. (i) $r = 3$ (iii) 4
19. $(7, 1)$; $r = 4$; 5
20. $\sqrt{10}$
21. $3\sqrt{2}$
22. $c = 12$

Triailcheisteanna 4.5

1. $(-1, 2)$ agus $(-2, -1)$
2. $(1, -3)$
3. $(2, -1)$
4. (i) $(4, 2)$ agus $(-1, 7)$
   (ii) $(-1, 4)$ agus $(3, -4)$
   (iii) $(2, 1)$ agus $(0, -5)$
5. $(-2, 5)$
6. (i) $(3, 1)$ agus $(-1, -1)$
   (ii) $(1, 0)$
   (iii) $(x - 1)^2 + y^2 = 5$
7. $(6, 0)$ agus $(-2, 0)$; 8 n-aonad
8. $(0, -7)$ agus $(0, 1)$; 8 n-aonad
9. $a = 6$, $b = 1$
10. 6 n-aonad
11. $2x - y - 3 = 0$; $(2, 1)$ agus $(-1, -5)$
12. $3x - 4y - 9 = 0$; $(-1, -3)$
13. $(-3, 4)$ agus $(-5, 2)$
14. (i) $(-1, 4)$
    (ii) Éirí na réalta: $(-3, 1)$; Dul faoi na réalta: $(1, 1)$

Triailcheisteanna 4.6

1. s_1: $(1, 0)$; $r = 4$; s_2: $(7, 8)$; $r = 6$
2. $(2, 1)$; $r = 5$; $(8, 9)$; $r = 5$; $|c_1 c_2| = 10$
4. Go seachtrach
5. (ii) $x + y - 9 = 0$ (iii) $(4, 5)$
6. (i) $r = 5$
   (ii) $(x - 3)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$
7. (iii) $2\sqrt{7}$ aonad
8. (i) $(4, 5)$
   (ii) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$
9. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$
   [nó $x^2 + y^2 - 5x - 4y + 4 = 0$]
10. (i) $r = \sqrt{30}$
    (ii) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 30$
11. (i) $(3, 4)$
    (ii) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
12. $(3, -2)$; $r = 5$; $k = 36$

Triailcheisteanna 4.7

1. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$
2. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$
3. (i) $y = 5$
   (ii) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$
   (iii) $x = 10$
4. (ii) $r = 4$
   (iii) $(6, 4)$
   (iv) $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$
5. (i) $r = 4$
   (ii) $(4, 5)$
   (iii) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$
6. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$
8. $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 25$; $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$

Cuir triail ort féin 4

Ceisteanna A

1. (i) $\sqrt{13}$ (ii) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 13$
2. $(1, 2)$; $r = \sqrt{14}$; $x^2 + y^2 = 14$
3. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$
5. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$
6. $P = (11, 0)$; $Q = (-1, 0)$
7. $(1, -2)$; $r = 1$; $k = 0, 2$
8. 4
10. $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 29$

Ceisteanna B

1. $(3, 1)$; $r = \sqrt{13}$; $2x + 3y - 22 = 0$
2. (ii) $p = 0$ nó $p = -\frac{12}{35}$

3. $k = -25, 48$
4. (i) $p = -6$ (ii) $(4, 3)$ agus $(1, 0)$
5. (ii) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 64$
6. (i) $C = (0, 5)$ (ii) $\sqrt{5}$ (iii) $(2, 4)$
7. $(0, 0); r = 2$ agus $(4, 3); r = 3; 4x + 3y - 10 = 0$
8. (i) $2g + 5f = -18; 2g - f = 6$
   (ii) $g = 1, f = -4$
   (iii) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0; (-1, 4); r = \sqrt{10}$
9. (i) $C = (-3, 2)$ (ii) $r = 5$ (iii) 4
10. $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 9$
    nó $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 49 = 0$

1. 1 aonad; $\sqrt{11}$
2. $3x - 4y + c = 0; 3x - 4y + 9 = 0;$
   $3x - 4y - 41 = 0$
3. (i) $C = (8, 1); D = (2, 1)$
   (ii) $(5, 4)$
   (iii) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$
4. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$
5. $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 16$
   nó $(x - 32)^2 + (y - 2)^2 = 16$
6. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$
7. (ii) $x^2 + y^2 - 9x - 5y + 24 = 0$
8. $g = -4, c = 7, f = \sqrt{7}; (x - 4)^2 + (y - \sqrt{7})^2 = 16$
9. $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0;$
   $x^2 + y^2 + 30x - 30y + 225 = 0$
10. (i) $(a, b); r = a$
    (iii) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$
    nó $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 25$
    (iv) $4\sqrt{2}$

Caibidil 5: Triantánacht 2

Triailcheisteanna 5.2

1. (i) $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ (iii) $\dfrac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
2. (i) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$
3. (i) $\frac{33}{65}$ (ii) $\frac{16}{63}$
4. (i) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) 0 (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) 1
5. (i) $\tan 3A$ (ii) $\sin 3\theta$
7. $4\frac{1}{2}$
8. $\dfrac{\pi}{4}$ (nó 45°)
9. $\frac{1}{2}$
10. $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
11. $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}; 7 - 4\sqrt{3}$
14. $h = 6$ m
17. $h = 2$ m nó 3 m

Triailcheisteanna 5.3

1. (i) $\frac{24}{25}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{24}{7}$
2. (i) $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{4}{5}$
3. $\frac{7}{9}$
4. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}; \dfrac{\sqrt{11}}{4}$
5. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
6. 1
10. $\frac{4}{3}$
11. (i) $\frac{24}{25}$ (ii) $-\frac{7}{25}$
14. $\frac{1}{2}$ nó -2
15. (i) $\frac{5}{3} \sin \beta$ (ii) $\dfrac{\sqrt{11}}{5}$
16. (ii) $\frac{7}{25}$
18. (i) $1 - 2\sin^2 2A$ (ii) $2\cos^2 2A - 1$
19. (ii) $\frac{1}{4}$

Triailcheisteanna 5.4

1. (i) $2 \sin 4x \cos x$ (ii) $2 \cos 3x \sin x$
   (iii) $2 \cos 2x \cos x$ (iv) $-2 \sin 6\theta \sin \theta$
   (v) $-2 \sin 2\theta \sin \theta$ (vi) $-2 \cos 5\theta \sin 2\theta$
2. (i) $\cos 20°$ (ii) 0 (iii) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
4. (i) $\sqrt{2} \cos x$ (ii) $-\sqrt{3} \sin x$
5. (i) $\sin 5A + \sin A$ (ii) $\sin 5x - \sin 3x$
   (iii) $\cos 7A + \cos 3A$ (iv) $\cos 8A - \cos 4A$
   (v) $-\frac{1}{2}[\cos 3A - \cos A]$
   (vi) $\frac{1}{2}[\sin 6x - \sin 4x]$
6. (i) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$ (ii) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
12. 2

Triailcheisteanna 5.5

1. (i) 45° (ii) 60° (iii) 45° (iv) 30°
   (v) −60° (vi) −45° (vii) −60° (viii) −30°
3. (i) x (ii) $\sqrt{1 - x^2}$ (iii) $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$
4. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{8}{17}$

5. (i) $\frac{24}{25}$ (ii) $\frac{119}{169}$
7. $\frac{56}{33}$
8. An dá thaobh $= \frac{24}{25}$

Cuir triail ort féin 5

Ceisteanna A

1. $\frac{12}{13}$
2. $\frac{63}{65}$
4. $\frac{24}{7}$
6. (i) $\frac{15}{17}$ (ii) $\frac{240}{289}$
7. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $a = 2, b = 1$
9. (ii) $\frac{120}{169}$
10. (i) $k = 2$ (ii) $\sqrt{3}$

Ceisteanna B

1. (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. (i) $-\frac{7}{25}$
3. (i) $\sin 6\theta + \sin 2\theta$ (ii) 2
5. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\tan A = \frac{1 - \tan B}{1 + \tan B}$
9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $\theta = \frac{\pi}{6}$

Ceisteanna C

3. (ii) $k = 25$
5. (ii) $a = 2, b = 1$
6. $41.4°; 55.8°; 55.8° > 41.4° \Rightarrow |AB| > 2$, mar go mbíonn an slios níos mó urchomhaireach leis an uillinn níos mó
7. (i) (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 1
8. (ii) $x = \sqrt{6}$
9. (i) 4θ raidian
   (ii) $2 \sin 2\theta$; $\theta = \frac{\pi}{6}$ raidian
10. (i) $|AC| = 2r \cos \alpha$

Caibidil 6: Céimseata 2: Méaduithe agus Tógálacha

Triailcheisteanna 6.1

1. (i) 2 (ii) $x = 6$ cm, $y = 18$ cm
2. (i) 8 (ii) 12 (iii) 5; $7\frac{1}{2}$ a. cearnach
3. (i) 2 (ii) $(-2, 3)$ (iii) 120 a. cearnach
4. (i) 12 (ii) 6 (iii) 6; 45 a. cearnach
6. (i) 4 (ii) 16.4 cm (iii) 3 cm
   (iv) 1 : 3 (v) 4 cm^2
7. (i) $2\frac{1}{2}$ (ii) 10 (iii) 2 : 5
   (iv) 100 aonad cearnach
8. 9 cm^2
9. 1100 cm^2
10. 2; $\sqrt{2}$
11. 12 cm^2
12. (i) 104 mm (ii) 42 mm
13. 10,200 cm^2
14. (i) 1.5 m^2 (ii) 272 cm^2
15. (i) 1 : 500 (ii) 60 m
    (iii) 1 : 2000 (iv) 50 cm
16. (i) 3
    (ii) Is é k^3 an fachtóir scála i gcás toirte
17. (i) $2\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{125}{8}$ (iii) 3750 cm^3
18. 1600 cm^3
19. 691 ml
20. 11 cm
21. 54 kg
22. 2129.6 cm^2
23. 781.25 cm^3
24. 9 n-aonad
25. 609 cm^3
26. 20 cm

Triailcheisteanna 1.2

2. 105°
4. Is é an t-imlár lárphointe an taobhagáin; is é an toradh céanna a fhaigheann tú
5. Tá maoluillinn sa triantán
6. Ba chóir an scoil a thógáil ag imlár an triantáin
9. (i) $\frac{1}{2}ar$
13. (i) 5 cm
14. Is fíor an toradh sin i gcás gach triantáin mhaoluilligh
16. Pointe trasnaithe dhéroinnteoirí ingearacha an dá chorda, is é sin lárphointe an chiorcail.

Cuir triail ort féin 6

Ceisteanna A

1. $2\frac{2}{3}$ cm
2. 10.8 m
3. (ii) $x = 3.6, y = 3$
4. (i) $x = 135°, y = 90°$
5. (i) Bréagach (ii) Bréagach (iii) Fíor (iv) Bréagach

6. (i) Pointe trasnaithe dhéroinnteoir ingearach [AB] agus dhéroinnteoir ingearach [BC]
   (ii) $125°$
   (iii) Is é
8. (i) 2.5 (ii) 6 (iii) $2:5$
9. $x = 13.5$, $y = 27$
10. (i) 8 cm (ii) 6 cm

Ceisteanna B

1. $9\,\text{cm}^2$; $22.5\,\text{cm}^2$
2. (i) 1.2 (ii) $a = 5.4$ cm, $b = 6$ cm
3. (i) 24 cm (ii) 40.5 cm
4. $2\sqrt{21}$ cm
5. (i) $x = 28°$, $y = 56°$, $z = 34°$
6. (i) $5r$ (ii) $250\,\text{cm}^2$
7. (ii) 18 cm
8. $x = 40°$, $y = 80°$, $z = 50°$
9. (ii) 4.9 cm
10. 80 m

Ceisteanna C

1. (i) (a) $4:9$ (b) $8:27$
   (ii) 8 cm (iii) $121.5\,\text{cm}^2$ (iv) $32\,\text{cm}^3$
2. (i) $60°$ (ii) $60°$ (iii) $55°$
3. (i) $74.25\,\text{cm}^3$
   (ii) (a) $150°$ (c) $30°$
4. (i) $2\sqrt{7}$ cm (ii) $4\sqrt{7}$ cm
   (iii) 6 cm (iv) $24\sqrt{7}\,\text{cm}^2$
5. (i) $168.75\,\text{cm}^3$
6. (a) (ii) $26°$ (b) 21 cm
7. (ii) $x + z = 10$; $y + z = 26$; $x = 4$, $y = 20$, $z = 6$
   (iii) 4 cm
8. (ii) $k = \frac{4}{5}$
9. (i) $106.3125\,\text{cm}^3$ (ii) $50\,\text{m}^2$
10. (i) 50.23 m; 7.8 m