

Focail thábhachtacha

fána ráta athraithe difreáil feidhm dhíorthaithe feidhm na fána
 tadhlaithe uaspointe casaidh íospointe casaidh dara díorthach
 feidhm mhéadaitheach feidhm laghdaitheach treoluas (luas) luasghéarú
 meánráta athraithe

Mír 18.1 Fána líne

Is é ábhar na caibidle seo an brainse den mhatamaitic a dtugtar an **calcalas** air.

Beirt mhatamaiticeoirí a bhí ag obair go neamhspleách ar a chéile a d'fhorbair an calcalas sa 17ú haois. Sasanach a bhí i nduine acu, Isaac Newton. Gearmánach a bhí san fhear eile, Gottfried Leibnitz.

Is é atá sa chcalcalas ná an staidéar ar ráta an athraithe nuair a athraíonn cainníocht amháin de thoradh athrú ar chainníocht eile.

Seo roinnt samplaí:

- (i) De réir mhéid an innill a bhíonn i gcarr a athraíonn caitheamh an pheitрил.
- (ii) De réir an fhaid ama a athraíonn an fad an ghluaistear.
- (iii) De réir fhad a sleasa a athraíonn achar cearnóige.

Is ionann an luas a bhíonn faoi charr agus an ráta ar a n-athraíonn an fad a ghluaiseann sí i dtreimhse áirithe ama.

Más ag luasghéarú a bhíonn an carr, is in aghaidh an tsoicind a bhíonn an luas ag athrú.

Abair gur 60 km/h a bhíonn ar an luasmhéadar. Sin é an **luas meandrach**.

Is é an calcalas an áis mhatamaitice a ligfidh dúinne **rátaí meandracha athraithe** a ríomh.

Fána (grádán) líne

Féach ar an líne ar dheis.

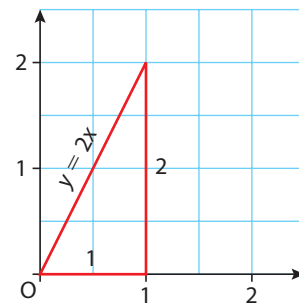
Is ionann cothromóid na líne agus $y = 2x$.

Is ionann an **fhána** agus $\frac{2}{1} = 2$.

Más san fhoirm $y = mx$ a bhíonn líne, deir an chéimseata chomhordanáideach linn gurb ionann m agus fána na líne.

Mar sin, má tá $y = 2x$,

⇒ an fhána $m = 2$, rud atá le feiceáil ar dheis.



Ainm eile ar an bhfána é **ráta athraithe**.

Is é 2 ráta an athraithe sa chás sin.

Ciallaíonn sé sin, má mhéadaítear ar x d'aonad amháin, go méadaítear ar y de 2 aonad.

An **fhána** a thugtar ar ráta athraithe y i leith x .

Bainfidimid úsáid feasta as an nodaireacht $\frac{dy}{dx}$ chun an fhána a chur in iúl.

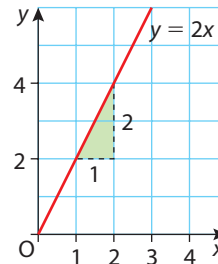
Slí eile chun an fhána (nó ráta an athraithe) a fháil ná leas a bhaint as an **difreáil**.

Cuir i gcás arís an líne $y = 2x$, mar atá le feiceáil ar dheis.

$$\frac{dy}{dx} = \text{fána} = \frac{\text{ardú}}{\text{bonnfhad}} = \frac{2}{1} = 2$$

Maidir leis an líne $y = 2x$, scrúdóimid tábla na n-ionchur agus na n-aschur.

x	y	1 ú difríocht
0	0	
1	2	+2
2	4	+2
3	6	+2



Tá an chéad difríocht idir na haschuir
(i) tairiseach
(ii) cothrom le 2 ... mar an gcéanna leis an bhfána.

Taispeánann an léaráid agus an tábla thuas, i gcás feidhm líneach:

$$\frac{dy}{dx} = \text{fána} = 1 \text{ ú difríocht}$$

Seo agat roinnt línte agus a gcuid fánaí:

- (i) $y = 4x$ $\frac{dy}{dx} = 4 = \text{fána}$
- (ii) $y = -3x + 5$ $\frac{dy}{dx} = -3 = \text{fána}$
- (iii) $y = \frac{1}{2}x + 6$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} = \text{fána}$

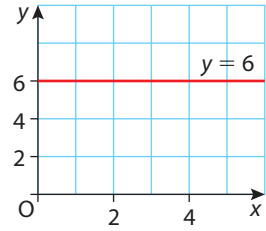
Riail

$$y = ax + b \quad \frac{dy}{dx} = a = \text{fána}$$

↑
Fána na líne

Taispeántar an líne $y = 6$ sa ghraf ar dheis.
 Anseo is ionann fána na líne agus 0 mar **nach dtagann athrú ar bith** ar y de réir mar a thagann athrú ar x .

Léiríonn sé sin, má tá $y = 6$, go bhfuil $\frac{dy}{dx} = 0$.



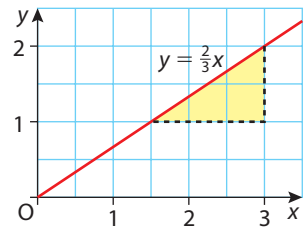
Riail Má tá $y = 6$ (tairiseach), $\frac{dy}{dx} = 0$

Cleachtadh 18.1

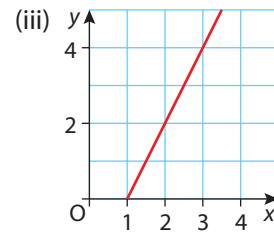
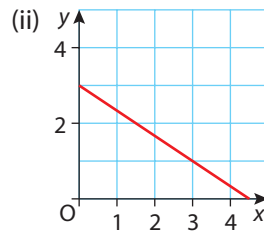
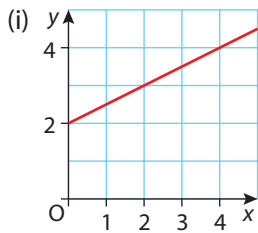
1. Bain úsáid as an ngreille ar dheis chun ráta athraithe y i leith x a scríobh síos.

Tabhair ainm eile ar an ráta athraithe seo.

Anois scríobh síos luach $\frac{dy}{dx}$.



2. Scríobh síos ráta athraithe y i leith x ($\frac{dy}{dx}$) i gcás gach ceann de na greillí seo:



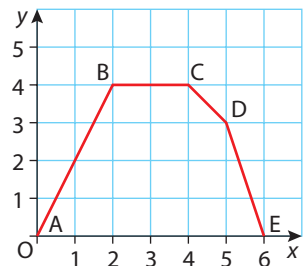
3. Scríobh síos $\frac{dy}{dx}$ i gcás gach ceann de na feidhmeanna líneacha seo:

- | | | | |
|---------------|--------------------|------------------------------|-------------------|
| (i) $y = 3x$ | (ii) $y = 2x - 1$ | (iii) $y = 4x + 3$ | (iv) $y = 5x + 6$ |
| (v) $y = -2x$ | (vi) $y = -3x + 7$ | (vii) $y = 7x - \frac{1}{2}$ | (viii) $y = 2$ |

4. Faigh ráta athraithe y i leith x ($\frac{dy}{dx}$) i gcás na líne a cheanglaíonn

- | | |
|----------------|----------------|
| (i) A agus B | (ii) B agus C |
| (iii) C agus D | (iv) D agus E. |

Mínigh an fáth a bhfuil $\frac{dy}{dx}$ diúltach i gcás na líne a cheanglaíonn D agus E.



5. Is feidhm líneach é $y = 3x - 2$.

Trí thábla na n-aschur ar dheis a chomhlánú, scríobh síos an difríocht idir na haschuir.

Anois scríobh síos luach $\frac{dy}{dx}$.

Céard é an ceangal idir difríocht na n-aschur agus $\frac{dy}{dx}$?

x	y
0	-2
1	...
2	...
3	...

6. Cum feidhm de do chuid féin i gcás na rátaí athraithe seo a leanas. (Tá an chéad cheann déanta duit.)

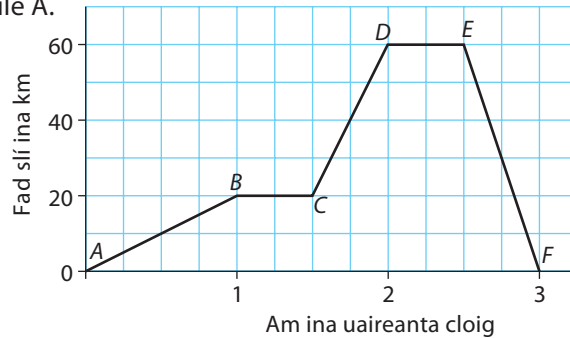
$\frac{dy}{dx}$	Feidhm
$\frac{dy}{dx} = 10$	$y = 10x$
$\frac{dy}{dx} = 6$	
$\frac{dy}{dx} = -4$	
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$	
$\frac{dy}{dx} = 0$	

7. Cóipeáil agus comhlánaigh an tábla thíos trí fheidhm a scríobh a oireann don fhaisnéis a thugtar. (Tá an chéad cheann déanta duit.)

y-idirlíne	$\frac{dy}{dx}$	Feidhm
3	2	$y = 2x + 3$
-2	4	
-3	2	
0	4	
2	$\frac{1}{2}$	
0	$\frac{2}{3}$	

8. (i) Tugann aintín €50 d'airgead póca dá neacht ar an 1 Eanáir agus méadaíonn sí de €10 in aghaidh na bliana é ina dhiaidh sin.
Céard é ráta athraithe an airgid phóca i leith ama (blianta)?
- (ii) Luas seasta 80 km/h atá faoi thraein áirithe.
Céard é ráta athraithe an fhaid slí (km) i leith ama (uaireanta an chloig)?
- (iii) Tá lus na gréine 5 cm ar airde nuair a cheannaítear é agus fásann sé 3 cm sa tseachtain ina dhiaidh sin. Céard é ráta athraithe na hairde (cm) i ndáil le ham (seachtainí)?

9. Féach ar an ngraf faid agus ama thíos. Taispeántar aistear gluaisrothaí a thosaigh a chuid taistil ó bhaile A.



- Céard é ráta athraithe an fhaid slí i ndáil le ham i gcás an aistear ó A go B?
 - Céard é an meánluas ó A go B?
 - Céard é fána na líne BC?
 - Céard é an meánluas idir B agus C?
 - Céard é an meánluas idir C agus D?
 - Céard é ráta athraithe an fhaid slí i ndáil le ham i gcás an aistear ó E go F?
- Mol slí eile chun an cheist seo a chur.

Mír 18.2 Fána cuair

Cuir i gcás an cuar $y = x^2$, a bhfuil sceitse ar dheis de.

Is pointe ar an gcuar sin é (2, 4).

Deirtear gurb ionann fána an chuir ag (2, 4) agus fána an tadhlaí ag (2, 4).

Más líníocht bheacht í, is é 4 a bheidh i bhfána an tadhlaí.

Taispeánann an dá líne bhriste ar an ngraf dhá thadhlaí eile leis an gcuar.

Níl fána aon dá cheann de na tadhlaith sin mar an gcéanna.

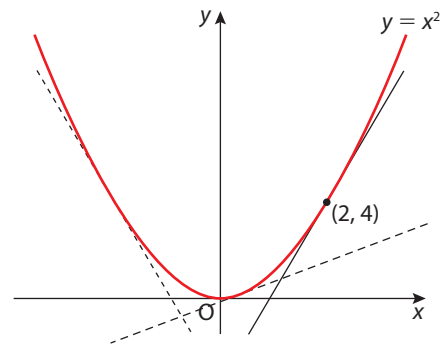
Léiríonn sé sin go n-athraíonn fána cuair de réir mar a ghluaisimid go dtí pointí difriúla ar an gcuar.

Chun fána cuair ag pointe ar leith a fháil, bheadh orainn an cuar a tharraingt agus ansin fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe sin a fháil. Ní thabharfaidh sé sin ach meastachán ar an bhfána fiú má tharraingítear an cuar agus an tadhlaí go cruinn.

Ach tá slí níos giorra ann chun fána cuair a fháil.

Sa mhír roimhe seo chonaiceamar go seasann $\frac{dy}{dx}$ d'fhána líne nuair a thugtar feidhm líneach san fhoirm $y = f(x)$.

Cén chaoi a bhfaighimid $\frac{dy}{dx}$ i gcás na feidhme $y = x^2$?



Feicfidh tú ar dheis an riail le haghaidh $\frac{dy}{dx}$ na feidhme $y = x^n$ a fháil.

Is féidir cur síos i bhfocail a dhéanamh ar an riail le haghaidh $\frac{dy}{dx}$ feidhme a fháil mar leanas:

1. Má tá $y = x^n$, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$
2. Má tá $y = ax^n$, $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$

Iolraigh comhéifeacht na hathróige faoin gcumhacht agus laghdaigh an chumhacht de 1.

Bainfidimid leas as an riail anois chun $\frac{dy}{dx}$ na feidhme $y = x^2$ a fháil.

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x, \text{ an fhána} = 2x.$$

Céard a chiallaíonn 'an fhána = 2x'?

Ciallaíonn sé gur de réir na luachanna difriúla ar x a thiocfaidh athrú ar an bhfána.

Más ionann an fhána agus $2x$, is é an fhána ag $x = 2$ ná $2(2) = 4$.

Ba leis an difreáil $\left(\frac{dy}{dx} \text{ a fháil}\right)$ mar sin a thaispeánamar gurb ionann 4 agus an fhána nuair atá $x = 2$, rud a dúradh thuas.

An **difreáil** a thugtar ar an bpróiseas a bhaineann le fána líne nó cuair a fháil ag pointe (x, y) .

Má bhíonn feidhm san fhoirm $y = f(x)$, is mar seo a chuirimid síos ar an bpróiseas a bhaineann le $\frac{dy}{dx}$ a fháil: **y a dhifreáil i leith x**.

Ós díorthaithe ó chothromóid an chuir atá $\frac{dy}{dx}$, is minic a thugtar an **fheidhm dhíorthaithe** nó **feidhm na fána** air.

Más san fhoirm $f(x) = \dots$ a bhíonn feidhm, seasann **f'(x)** don fheidhm dhíorthaithe de ghnáth.

Feidhmeanna ina bhfuil níos mó ná téarma amháin

Má bhíonn níos mó ná téarma amháin i bhfeidhm, difreálaimid gach téarma leis féin.

Mar shampla, má tá $y = 3x^2 - 5x + 4$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 5$$

Sampla 1

Difreáil gach ceann díobh seo a leanas i leith x :

$$(i) y = x^2 - 3x + 4 \quad (ii) y = 3x^2 + 9x - 5 \quad (iii) y = x^3 - 3x^2 + 6x - 7$$

$$(i) y = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

$$(ii) y = 3x^2 + 9x - 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x + 9$$

$$(iii) y = x^3 - 3x^2 + 6x - 7 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 6$$

Luach díorthaigh a fháil

Mar seo a shainítear feidhm: $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

$f'(x) = 2x - 3$; **díorthach** $f(x)$ a thugtar ar $2x - 3$.

Seasann $f'(x)$ d'fhána an tadhlaí leis an gcuar ag pointe ar bith.

Ag $x = 4$, $f'(4) = 2(4) - 3 = 5$.

Ciallaíonn sé sin gurb é 5 fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe ag a bhfuil $x = 4$.

Sampla 2

Má tá $y = 3x^2 - 2x + 4$, faigh luach $\frac{dy}{dx}$ ag $x = -2$.

$$\begin{aligned} y = 3x^2 - 2x + 4 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x - 2 \\ &= 6(-2) - 2 \text{ ag } x = -2 \\ &= -12 - 2 = -14 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -14 \text{ ag } x = -2.$$

Cleachtadh 18.2

I gcás cheisteanna **1-21** thíos, difreáil an fheidhm i leith x .

1. $y = 2x + 3$

4. $y = x^2$

7. $y = x^2 - 8x - 4$

10. $y = x^3$

13. $y = 3x^3 - 2x^2 - x$

16. $y = x^3 - 4x^2 + 9$

19. $y = -x^3 + 2x - 4$

2. $y = 3x - 4$

5. $y = 2x^2 + 6x$

8. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$

11. $y = x^3 + 2x - 3$

14. $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$

17. $y = 1 - 2x + x^2$

20. $y = 5 - x^2 + 2x^3$

3. $y = 7x - 1$

6. $y = 5x^2 - 3x + 4$

9. $y = 3x^2 - 4$

12. $y = 2x^3 - 5x^2$

15. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x$

18. $y = -5 + 2x - 3x^2$

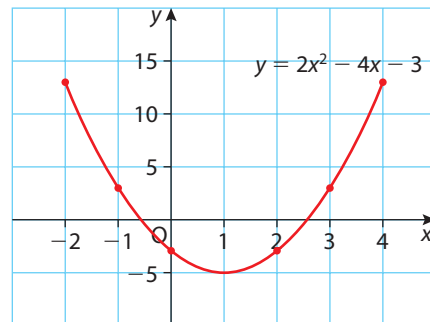
21. $y = 3x - 4x^2 + \frac{1}{3}x^3$

- 22.** Má tá $y = x^2 - 3x$, faigh luach $\frac{dy}{dx}$ nuair atá $x = 2$.
- 23.** Má tá $y = 2 - 4x + x^2$, faigh luach $\frac{dy}{dx}$ nuair atá $x = -1$.
- 24.** Má tá $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$, faigh $f'(1)$.
- 25.** Má tá $y = x^3 - x^2 - 3x + 7$, faigh luach $\frac{dy}{dx}$ nuair atá $x = 2$.
- 26.** Má tá $y = x^2 - 3x$, faigh fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe ag a bhfuil $x = 3$.
- 27.** Má tá $f(x) = 4x - 3x^2$, faigh fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe ag a bhfuil $x = -2$.
- 28.** Má tá $A = 2k^2 - 3k$, faigh luach $\frac{dA}{dk}$ nuair atá $k = 1$.
- 29.** Má tá $V = 2h^2 + h + 5$, faigh luach $\frac{dV}{dh}$ nuair atá $h = 3$.
- 30.** Má tá $F = 6 + 4t - 2t^2$, faigh luach $\frac{dF}{dt}$ nuair atá $t = 4$.

31. Seo graf na feidhme

$$y = 2x^2 - 4x - 3.$$

- (i) Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe ag a bhfuil $x = 3$.
- (ii) Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe ag a bhfuil $x = -1$.
Mínigh an fáth ar uimhir dhiúltach é an freagra a fuair tú.
- (iii) Céard é fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe ag a bhfuil $x = 1$?
Mínigh do fhreagra i gcomhthéacs an ghraif.



Mír 18.3 Tadhlaíthe agus cuair

Taispeánadh sa mhír roimhe seo gurb ionann $\frac{dy}{dx}$ agus fána an tadhlaí le cuar ag pointe ar bith ar an gcuar sin.

Más leat cothromóid tadhlaí leis an gcuar $y = f(x)$ a fháil ag an bpointe (x_1, y_1) , lean na céimeanna seo:

Is ionann $\frac{dy}{dx}$ agus fána an tadhlaí leis an gcuar ag pointe ar bith (x, y) ar an gcuar.

1. Faigh $\frac{dy}{dx}$.
2. Faigh luach $\frac{dy}{dx}$ ag an luach atá tugtha le haghaidh x .
Is é an luach sin an fhána a theastaíonn.
3. Úsáid an fhána a fuair tú in **2.** thuas agus an pointe tugtha chun cothromóid an tadhlaí a fháil agus tú ag úsáid $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Sampla 1

Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar $y = 3x^2 + 4x - 5$ ag an bpointe $(1, 2)$.

Faigh uaithi sin cothromóid an tadhlaí ag an bpointe sin.

Is ionann fána an tadhlaí agus $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 4$$

$$= 6(1) + 4 \quad \dots x = 1 \text{ ag an bpointe } (1, 2)$$

$$= 10$$

\therefore fána an tadhlaí = 10.

Cothromóid an tadhlaí: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = 10(x - 1) \quad \dots (x_1, y_1) = (1, 2)$$

$$\Rightarrow y - 2 = 10x - 10$$

$$\Rightarrow 10x - y - 8 = 0 \text{ cothromóid an tadhlaí.}$$

Sampla 2

Faigh comhordanáidí an phointe ar an gcuar $y = x^2 + 2x + 1$ arb ionann fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe sin agus 4.

Ó tá fána an tadhlaí = 4, tá $\frac{dy}{dx} = 4$.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

$$\Rightarrow 2x + 2 = 4$$

$$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Gheobhaimid y -luach an phointe ach 1 a chur in áit x sa chothromóid a thugtar.

$$x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 + 2(1) + 1$$

$$\Rightarrow y = 4$$

\therefore is é $(1, 4)$ an pointe ar an gcuar.

Sampla 3

Comhthreomhar le $y = 3x + 4$ atá an tadhlaí leis an gcuar $y = x^2 - 3x + 7$ ag pointe áirithe. Faigh comhordanáidí an phointe sin.

Is ionann 3 agus fána na líne $y = 3x + 4$.

⇒ Is ionann 3 chomh maith agus fána an tadhlaí leis an gcuar.

Is ionann $\frac{dy}{dx}$ agus fána an chuir.

$$y = x^2 - 3x + 7 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

$$\text{Fána} = 3 \Rightarrow 2x - 3 = 3$$

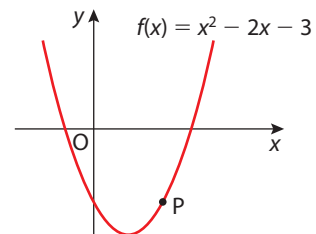
$$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Nuair atá } x = 3, y = (3)^2 - 3(3) + 7 \text{ i.e. } y = 7$$

∴ is é (3, 7) an pointe ar an gcuar.

Cleachtadh 18.3

1. Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe a thugtar i ngach ceann de na feidhmeanna seo a leanas:
 - (i) $y = x^2 - 2$ ag (2, 2)
 - (ii) $y = x^2 - 2x + 3$ ag (2, 3)
 - (iii) $y = x^2 - 2x$ ag (2, 0)
 - (iv) $y = x^2 - 4x + 5$ ag (3, 2)
 - (v) $y = 3x^2 - 24x + 48$ ag (3, -1)
 - (vi) $y = x^3 - 4x + 7$ ag (1, 4)
2. Faigh fána an tadhlaí le gach ceann de na cuair seo a leanas ag an bpointe a thugtar, agus cothromóid gach tadhlaí díobh dá réir:
 - (i) $y = x^2 - 3x + 2$ ag (3, 2)
 - (ii) $y = x^2 + 6x + 5$ ag (-1, 0)
 - (iii) $y = x^2 - 3x + 2$ ag (0, 2)
 - (iv) $y = 6 + x - x^2$ ag (2, 4)
 - (v) $y = 3x^2 + x - 7$ ag (-2, 3)
 - (vi) $y = 2x^2 - 3x + 4$ ag (1, 3)
3. Is ionann 6 agus fána an tadhlaí leis an gcuar $y = 8 + 2x - x^2$ ag pointe áirithe. Faigh luach x ag an bpointe sin.
4. Is ionann 1 agus fána an tadhlaí leis an gcuar $y = x^2 - x$ ag pointe áirithe. Cén pointe é?
5. Is ionann 3 agus fána an tadhlaí leis an gcuar $y = 2x^2 - x - 4$ ag pointe áirithe. Faigh an pointe.
6. Is é an cuar ar dheis graf na feidhme $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
Más ionann 2 agus luach $f'(x)$ ag an bpointe P, faigh a chomhordanáidí.



7. Is ionann 0 agus fána an tadhlaí leis an gcuar $y = x^2 - 2x - 15$ ag pointe áirithe. Faigh an pointe.
8. Is ionann 1 agus fána an tadhlaí leis an gcuar $y = 2x^2 - 3x + 1$ ag pointe áirithe. Faigh an pointe.
9. Faigh luach a más ionann 3 agus fána an tadhlaí leis an gcuar $y = x^2 + ax$ ag an bpointe ag a bhfuil $x = -1$.
10. Taispeáin gur comhthreomhar leis an x -ais atá an tadhlaí leis an gcuar $y = x^2 - 3x + 4$ ag an bpointe ag a bhfuil $x = 1\frac{1}{2}$.

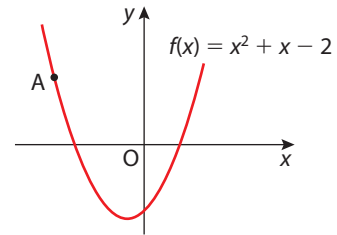
11. Tá graf na feidhme

$$f(x) = x^2 + x - 2 \text{ le feiceáil ar dheis.}$$

Is ionann cothromóid an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe A agus

$$y = -5x - 11.$$

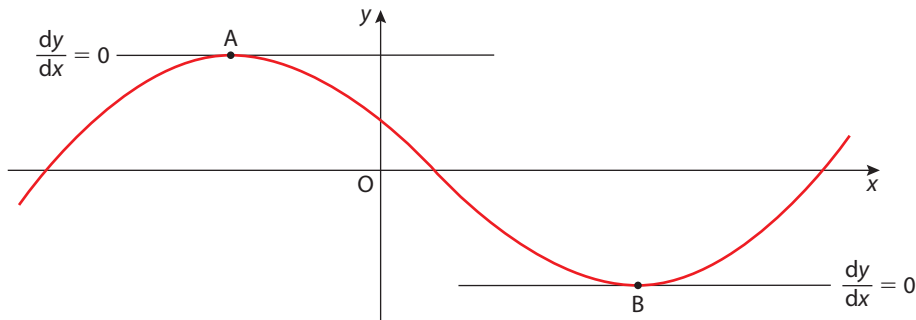
Bain leas as fána an tadhlaí chun comhordanáidí A a fháil.



12. Is ionann 6 agus fána an tadhlaí leis an gcuar $y = 2x^2 - 2x + 3$ ag pointe áirithe ar an gcuar. Faigh an pointe. Faigh uaidh sin cothromóid an tadhlaí ag an bpointe sin.
13. Comhthreomhar leis an líne $4x - y + 2 = 0$ atá an tadhlaí leis an gcuar $y = 2x^2 - 8x + 3$ ag pointe ar an gcuar. Faigh an pointe.
14. Tá pointe ar an gcuar $y = x^2 - 3x + 7$ ag a bhfuil an tadhlaí leis an gcuar comhthreomhar leis an líne $y = 3x + 4$. Faigh comhordanáidí an phointe sin.
15. Más ionann 3 agus fána an tadhlaí leis an gcuar $y = kx^3 - 2x^2 - x + 7$ ag an bpointe ag a bhfuil $x = 2$, faigh luach k .

Mír 18.4 Uasphointí casaidh agus íospointí casaidh —

Ag A agus B atá **pointí casaidh** an chuair thíos.



Tabhair faoi deara gur comhthreomhar leis an x -ais atá na tadhlaithle leis an gcuair ag A agus ag B. Mar sin is ionann nialas agus fána gach tadhlaí díobh.

Ós ionann $\frac{dy}{dx}$ agus fána an tadhlaí le cuair, $\frac{dy}{dx} = 0$ ag na pointí A agus B.

Cuimhnigh
air seo

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ ag pointí casaidh cuair.}$$

Uasphointe casaidh atá againn ag an bpointe A.

Uasphointe logánta is gnách a thabhairt air sin.

Íospointe casaidh (nó **íospointe logánta**) atá againn ag an bpointe B.

Pointe/pointí casaidh cuair a fháil

Seo an bealach le pointe (pointí) casaidh cuair a fháil:

1. Faigh $\frac{dy}{dx}$.
2. Bíodh $\frac{dy}{dx} = 0$, agus réitigh an chothromóid go bhfaighidh tú luach(anna) x .
3. Cuir isteach an luach / na luachanna sin ar x san fheidhm a thugtar go bhfaighidh tú an luach / na luachanna comhfhreagrach(a) ar y .
4. Más dhá phointe casaidh a bhíonn ann, is é an t-uasphointe casaidh an pointe is uachtaraí (i.e. an pointe is mó y -luach). Is é an pointe eile an t-íospointe casaidh.

Nóta: Aon phointe casaidh amháin a bhíonn i bhfeidhmeanna cearnacha.

Maidir leis an bhfeidhm $y = ax^2 + bx + c$,

- (i) íospointe casaidh a bhíonn inti má bhíonn $a > 0$.
- (ii) uasphointe casaidh a bhíonn inti má bhíonn $a < 0$.

Uasphointe casaidh

$a < 0$

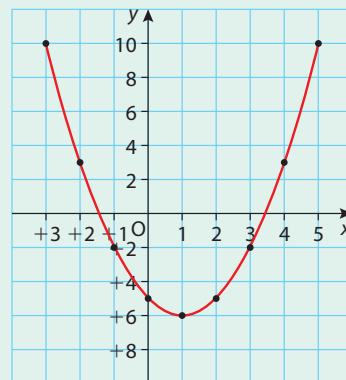
$a > 0$

Íospointe casaidh

Sampla 1

Tá graf na feidhme $f(x) = x^2 - 2x - 5$ le feiceáil ar dheis.

- (i) Bain úsáid as an ngraf chun comhordanáidí an íospointe casaidh a scríobh síos.
- (ii) Anois bain úsáid as an gcalcalas chun do fhreagra a fhíorú.



- (i) Is é $(1, -6)$ an t-íosphointe casaidh.
 (ii) Anois bainimid úsáid as an gcalcalas chun an pointe casaidh a fháil:

$$f(x) = x^2 - 2x - 5$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Nuair atá } x = 1, y = (1)^2 - 2(1) - 5 = 1 - 2 - 5 = -6$$

\therefore is é $(1, -6)$ an t-íosphointe casaidh, mar a fuairamar thuas.

Sampla 2

Faigh na comhordanáidí ag uasphointe logánta agus ag íosphointe logánta an chuir $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 2$.

1. Faigh $\frac{dy}{dx}$

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 15$$

2. Nuair atá $\frac{dy}{dx} = 0$, $3x^2 - 18x + 15 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \dots \text{ roinn gach téarma ar 3}$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ agus } x = 5.$$

$$x = 1 \Rightarrow y = (1)^3 - 9(1)^2 + 15(1) + 2 = 9$$

$$x = 5 \Rightarrow y = (5)^3 - 9(5)^2 + 15(5) + 2 = -23$$

\Rightarrow is pointí casaidh iad $(1, 9)$ agus $(5, -23)$.

Ó tá $(1, 9)$ níos uachtaraí ar an ngraf ná $(5, -23)$,

is é $(1, 9)$ an t-uasphointe casaidh

agus is é $(5, -23)$ an t-íosphointe casaidh.

An dara díorthach

I gcás feidhm ar bith $y = f(x)$, is é $\frac{dy}{dx}$ nó $f'(x)$.

Ach an fheidhm a thagann as sin a dhíorthú, faighimid an **dara díorthach**.

Mar seo a chuirtear an dara díorthach in iúl: $\frac{d^2y}{dx^2}$ nó $f''(x)$.

Mar seo a deirtear $\frac{d^2y}{dx^2}$ 'd a dó y , dx cearnaithe'.

Sampla 3

(i) Má tá $y = 3x^2 - 5x + 2$, faigh $\frac{dy}{dx}$ agus $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(ii) Má tá $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 5$, faigh $f''(x)$ agus, uaidh sin, $f''(-2)$.

$$(i) \quad y = 3x^2 - 5x + 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x - 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6.$$

$$(ii) \quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

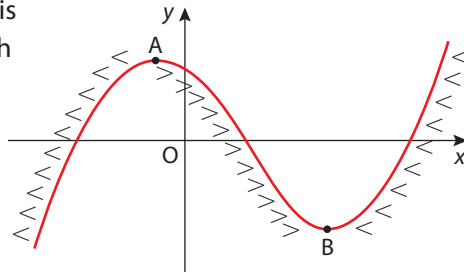
$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(-2) = 6(-2) - 4 = -12 - 4 = -16$$

$$\therefore f''(-2) = -16$$

Úsáid a bhaint as an dara díorthach le déanamh amach cé acu uaspointe nó íospointe a bhíonn i bpointe casaidh

Is iad na comharthaí deimhneacha sa léaráid ar dheis a insíonn dúinn cá bhfuil fána an chuair deimhneach (i.e. $\frac{dy}{dx} > 0$), agus is iad na comharthaí diúltacha a insíonn dúinn cá bhfuil fána an chuair diúltach.



De réir mar a dhruidtear ón taobh clé leis an bpointe A, is deimhneach atá fána an chuair ach í a bheith ag dul i laghad. Is ionann an fhána agus nialas ag A féin, agus diúltach atá an fhána ar dheis A. Mar sin, de réir mar a ghluaistear tríd an bpointe A, athraíonn fána an chuair ón deimhneach go dtí an diúltach (i.e. is ag dul i laghad atá an cuair). Mar sin, diúltach atá ráta athraithe $\frac{dy}{dx}$, i.e. $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Taispeánann sé sin gur diúltach a bhíonn $\frac{d^2y}{dx^2}$ ag uaspointe casaidh.

Ar an gcaoi chéanna, deimhneach a bhíonn $\frac{d^2y}{dx^2}$ ag an íospointe casaidh.

Tástáil an dara díorthach le haghaidh pointí casaidh

Ag uaspointe casaidh, $\frac{dy}{dx} = 0$ agus $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, i.e. diúltach.

Ag íospointe casaidh, $\frac{dy}{dx} = 0$ agus $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, i.e. deimhneach.

Sampla 4

Faigh comhordanáidí phointí casaidh an chuir $y = x^3 - 3x^2 + 5$.

Bain úsáid as tástáil an dara díorthach le déanamh amach cé acu uasphointe nó íospointe atá i ngach pointe casaidh.

$$y = x^3 - 3x^2 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ nó } x = 2.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 - 3(0) + 5 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow \text{is pointe casaidh é } (0, 5).$$

$$x = 2 \Rightarrow y = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{is pointe casaidh eile é } (2, 1).$$

Anois faighimid luach $\frac{d^2y}{dx^2}$ ag $x = 0$ agus ag $x = 2$.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6.$$

$$\text{Ag } x = 0, \frac{d^2y}{dx^2} = 6(0) - 6 = -6 \text{ (diúltach)}$$

Ós diúltach atá $\frac{d^2y}{dx^2}$ is uasphointe casaidh é $(0, 5)$.

$$\text{Ag } x = 2, \frac{d^2y}{dx^2} = 6(2) - 6 = 6 \text{ (deimhneach)}$$

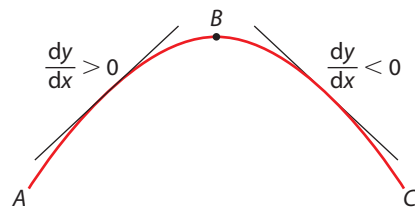
Ós deimhneach atá $\frac{d^2y}{dx^2}$, is íospointe casaidh é $(2, 1)$.

Méadaitheach agus laghdaitheach

Ach an cuar ar dheis a scrúdú ó chlé go deas, feicimid gur ag éirí (nó méadaitheach) atá sé ó A go B agus laghdaitheach ó B go C.

Deimhneach atá fána an tadhlaí (i.e. $\frac{dy}{dx}$) ó A go B.

Diúltach atá fána an tadhlaí ó B go C.



Cuimhnigh
air seo

$$\frac{dy}{dx} > 0, \text{ agus an cuar méadaitheach.}$$

$$\frac{dy}{dx} < 0, \text{ agus an cuar laghdaitheach.}$$

Sampla 5

Cé na luachanna ar x a fhágann gur méadaitheach atá an cuar $y = 2x^2 + 8x - 5$?

Más méadaitheach atá an cuar, $\frac{dy}{dx} > 0$.

$$y = 2x^2 + 8x - 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x + 8$$

$$\frac{dy}{dx} > 0 \Rightarrow 4x + 8 > 0$$

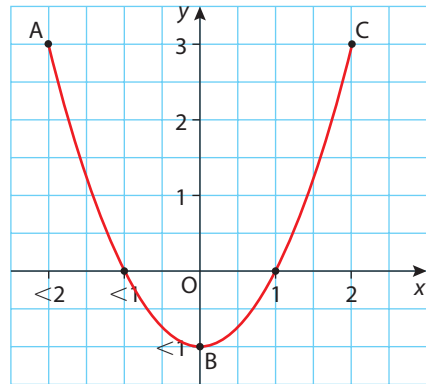
$$\Rightarrow 4x > -8 \Rightarrow x > -2$$

\therefore méadaitheach atá an cuar i gcás $x > -2$.

Cleachtadh 18.4

1. Tá graf na feidhme $y = x^2 - 1$ le feiceáil ar dheis. Is trí phointe ar an gcuar iad A, B agus C.

- Céard é fána an chuir ag an bpointe B?
Mínigh do fhreagra.
- Céard a thugtar ar an bpointe B?
- Bain úsáid as an ngraf chun comhordanáidí an íospointe casaidh a scríobh síos.
- Anois bain úsáid as an gcalcalas chun do fhreagra a fhíorú.
- Cóipeáil agus críochnaigh an abairt seo a leanas: "Maidir le feidhm chearnach, nuair a bhíonn comhéifeacht x^2 ..., íospointe casaidh a bhíonn sa cuar."



2. Faigh an pointe casaidh i ngach ceann de na feidhmeanna cearnacha seo a leanas, agus bain leas as comhéifeacht x^2 go ndéarfaidh tú cé acu uasphointe nó íospointe é an pointe casaidh.

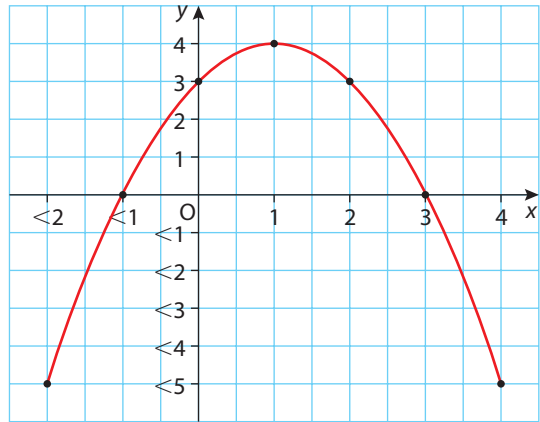
- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (i) $y = x^2 + 2x - 1$ | (ii) $y = 3x^2 - 6x + 4$ | (iii) $y = x^2 - 4x + 9$ |
| (iv) $y = 4 + 8x - 2x^2$ | (v) $y = 5 + 6x - x^2$ | (vi) $y = x^2 - x + 4$ |

Faigh comhordanáidí an dá phointe casaidh sna feidhmeanna in (3–8) agus abair cé acu uasphointe logánta nó íospointe logánta gach pointe casaidh díobh.

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| 3. $y = x^3 - 3x^2$ | 4. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$ |
| 5. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ | 6. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ |
| 7. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ | 8. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ |

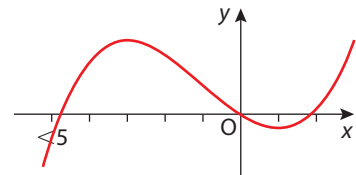
9. I gcás an chuir $y = x^2 - 4x + 4$,
- abair cé acu uasphointe casaidh nó íospointe casaidh atá sa chuar
 - faigh an pointe casaidh sin
 - faigh an luach ar x a fhágann gurb ionann 2 agus fána an chuir.
10. Faigh comhordanáidí na bpointí ar an gcuair $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$ ag a bhfuil na tadhlaíthe leis an gcuair comhthreomhar leis an x -ais.
11. Tugtar duit an fheidhm $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.
- Faigh (i) $\frac{dy}{dx}$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$
12. Faigh an dara díorthach, $\frac{d^2y}{dx^2}$, i gcás gach ceann de na feidhmeanna seo:
- $y = 3x^2 - 4x + 2$
 - $y = x^3 - 4x^2 + 6$
 - $y = \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 3x$

13. Tá graf na feidhme $y = 3 + 2x - x^2$ le feiceáil ar dheis.
- Faigh comhordanáidí pointe casaidh an chuir seo.
 - Faigh luach $\frac{d^2y}{dx^2}$ ag an bpointe casaidh sin.
 - Cén chaoi a dtugann an freagra a fuair tú ar (ii) le fios cé acu uasphointe nó íospointe atá sa pointe casaidh?



14. Faigh pointe casaidh na feidhme $y = x^2 - 4x + 5$.
- Faigh comhartha $\frac{d^2y}{dx^2}$ agus, uaidh sin, abair cé acu uasphointe nó íospointe é an pointe casaidh.

15. Tá graf na feidhme $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ ar dheis.
- Taispeáin go bhfuil pointe casaidh ag $(1, -5)$ agus faigh comhordanáidí an phointe casaidh eile.
 - Faigh $\frac{d^2y}{dx^2}$.
 - Bain úsáid as tástáil an dara díorthach le déanamh amach cé acu uasphointe nó íospointe atá i ngach pointe casaidh.



- 16.** Bíodh $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
- Faigh $f'(x)$, díorthach $f(x)$.
 - Faigh uaidh sin comhordanáidí uasphointe logánta agus íospointe logánta $f(x)$ trí leas a bhaint as tástáil an dara díorthach.
- 17.** Faigh comhordanáidí an uasphointe logánta ar an gcuar $y = 6x^2 - x^3$, má tá íospointe logánta ar an gcuar ag $(0, 0)$.
- 18.** Bíodh $f(x) = x^3 - ax + 7$ i gcás gach $x \in \mathbb{R}$ agus i gcás $a \in \mathbb{R}$.
- Is ionann -9 agus fána an tadhlaí leis an gcuar $y = f(x)$ ag $x = 1$.
Faigh luach a .
 - Faigh uaidh sin comhordanáidí an uasphointe logánta agus an íospointe logánta ar an gcuar $y = f(x)$.
- 19.** Faigh comhordanáidí an uasphointe logánta ar an gcuar $y = 12x - x^3$.
Fóraigh gur diúltach atá $\frac{d^2y}{dx^2}$ ag an bpointe sin.
- 20.** Bíodh $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 1$, $a, x \in \mathbb{R}$.
Tá pointe casaidh ar $f(x)$ ag $x = -1$.
- Faigh luach a .
 - Faigh comhordanáidí an dá phointe casaidh ar $f(x)$, agus abair cé acu uasphointe logánta nó íospointe logánta é gach aon phointe díobh.
- 21.** Cé na luachanna ar x a fhágann gur méadaitheach atá an cuar $f(x) = x^2 - 6x - 7$?
- 22.** Cé na luachanna ar x a fhágann gur laghdaitheach atá an cuar $f(x) = 14 - 8x - x^2$?

Mír 18.5 Léiriú grafach ar fheidhm na fána

Is é an cuar ar dheis graf na feidhme

$$y = x^2 - 2x - 3.$$

Is ionann $\frac{dy}{dx}$ don fheidhm seo agus $2x - 2$.

Is é $y = 2x - 2$ an **fheidhm dhíorthaithe** nó **feidhm na fána**.

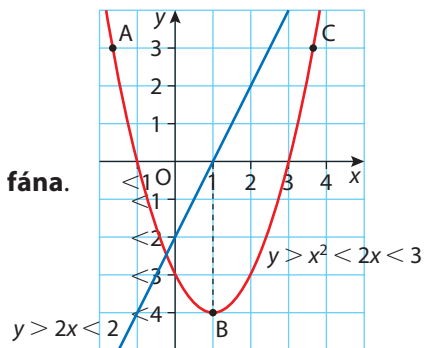
Seasann an líne ghorm d'fheidhm seo na fána.

Tá an méid seo le tabhairt faoi deara ón dá ghráf:

- Ó A go B ar an gcuar, diúltach atá an fhána.

Don x -eatramh seo, diúltach atá feidhm na fána

(an líne ghorm) freisin, i.e. tá an líne ghorm faoi bhun na x -aise.



- (ii) Ó B go C ar an gcuar, deimhneach atá an fhána.
Don x -eatramh seo, deimhneach atá feidhm na fána (an líne ghorm) freisin, i.e. tá an líne ghorm os cionn na x -aise.
- (iii) Is ionann fána an chuir ag an bpointe B agus nialas, i.e. $\frac{dy}{dx} = 0$.
Ag an bpointe B, $x = 1$. Tabhair faoi deara gurb ionann feidhm na fána agus nialas freisin ag an bpointe ag a bhfuil $x = 1$.
Léiríonn sé sin gurb ionann $\frac{dy}{dx}$ (feidhm na fána) agus nialas ag pointe casaidh.

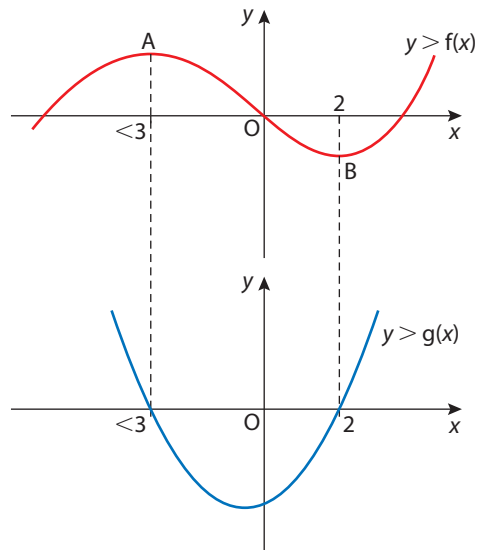
Feidhm na fána i gcás feidhm chiúbach

Is graf d'feidhm chiúbach, $y = f(x)$, é an cuar dearg ar dheis.

Is é an cuar gorm graf feidhm na fána, $g(x)$.

Ar na gnéithe a bhaineann leis na cuir seo tá:

- ▶ San feidhm $y = f(x)$, i gcás $x < -3$, deimhneach atá an fhána.
Léirítear é sin i bhfeidhm na fána $y = g(x)$, áit ar deimhneach atá $g(x)$ i gcás $x < -3$.
- ▶ Diúltach atá fána an chuir ó A go B.
Is é sin, ó $x > -3$ agus $x < 2$, diúltach atá an fhána.
Is léir gur diúltach atá feidhm na fána ó $-3 < x < 2$.
- ▶ Ag $x = -3$ agus $x = 2$, is ionann fána na feidhme ciúbaí agus nialas.
Ag an dá x -luach sin, is ionann feidhm na fána agus nialas freisin.
- ▶ I gcás $x > 2$, deimhneach atá fána na feidhme ciúbaí.
I gcás $x > 2$, léiríonn feidhm na fána é sin, ós deimhneach atá sí sin freisin i gcás $x > 2$.



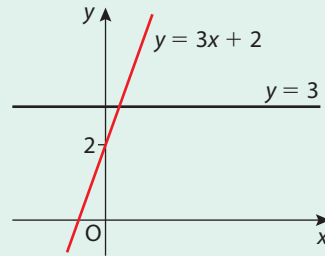
Sampla 1

Taispeántar an líne $y = 3x + 2$ sa léaráid ar dheis. Cóipeáil an léaráid agus tarraing feidhm na fána.

$$y = 3x + 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3$$

Is ionann feidhm na fána agus $y = 3$.

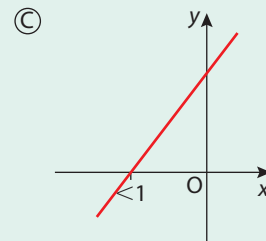
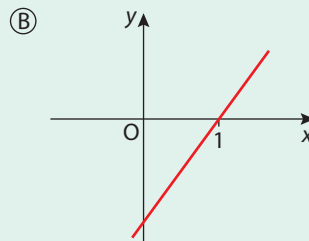
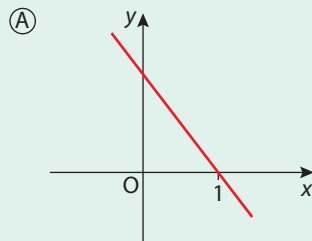
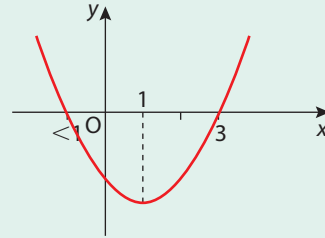
Taispeántar ar an léaráid an líne (nó feidhm na fána) $y = 3$.



Sampla 2

Is graf d'fheidhm chearnach é an cuar ar dheis.

Cé acu ceann de na línte thíos a sheasann d'fheidhm na fána i gcás an chuair sin? Mínigh do fhreagra.



Is í líne Ⓑ a sheasann d'fheidhm na fána ar na cúiseanna seo:

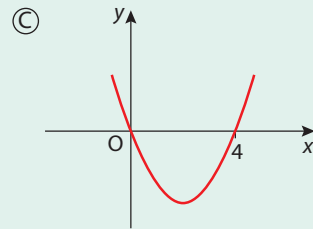
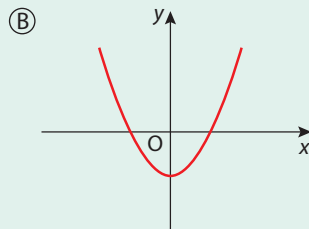
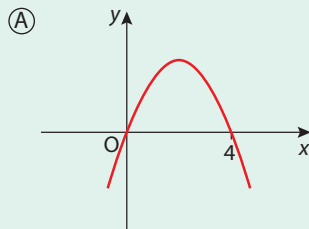
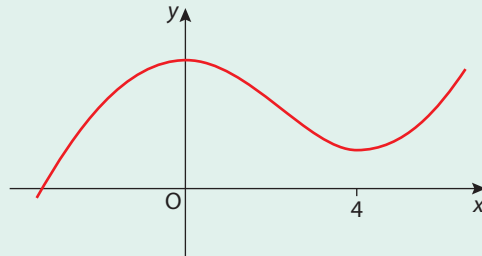
- (i) I gcás $x > 1$, deimhneach atá fána an chuair. Deimhneach atá y -luach na líne freisin i gcás $x > 1$.
- (ii) I gcás $x < 1$, diúltach atá fána an chuair. Diúltach atá y -luach na líne freisin i gcás $x < 1$.
- (iii) Ag $x = 1$, is ionann fána an chuair agus nialas. Is ionann y -luach na líne agus nialas freisin ag $x = 1$.

Sampla 3

Is graf d'fheidhm chiúbach é an cuar ar dheis.

Cé acu ceann de na trí ghráf thíos a sheasann d'fheidhm na fána i gcás na feidhme ciúbaí sin?

Mínigh do fhreagra.



Seasann Graf (C) d'fheidhm na fána i gcás na feidhme ciúbaí a thugtar.

Seo iad na cúiseanna:

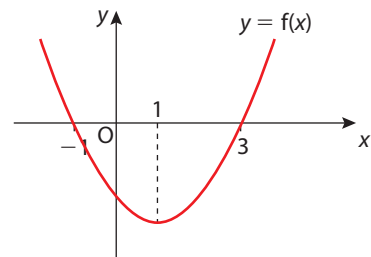
- (i) Ag $x = 0$, is ionann fána na feidhme ciúbaí agus nialas, agus is ionann feidhm na fána agus nialas ag $x = 0$.
- (ii) I gcás $x < 0$, deimhneach atá fána na feidhme ciúbaí.
I gcás $x < 0$, deimhneach atá cuar (C) ifreisin.
- (iii) I gcás $x > 0$ agus < 4 , diúltach atá fána na feidhme ciúbaí.
Idir an dá x -luach sin, diúltach atá feidhm na fána freisin.

Mar sin is é graf (C) feidhm na fána i gcás na feidhme ciúbaí a thugtar.

Cleachtadh 18.5

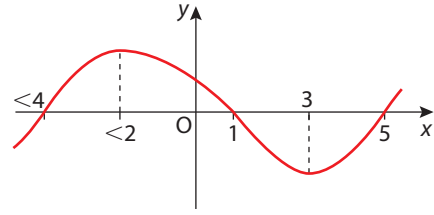
1. Tá graf na feidhme $y = f(x)$ le feiceáil ar dheis.

- (i) Cén luach ar x a fhágann gurb ionann fána an chuair agus nialas?
- (ii) Cén raon luachanna ar x a fhágann gur deimhneach atá fána an chuair?
- (iii) Cén raon luachanna ar x a fhágann gur diúltach atá fána an chuair?

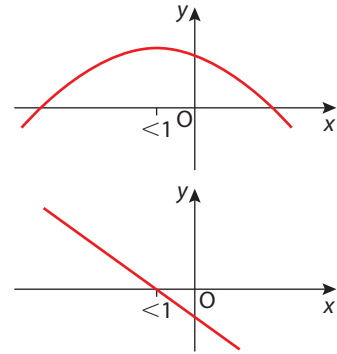


2. Tá graf na feidhme $y = f(x)$ le feiceáil ar dheis.

- (i) Mínigh céard is ciall le $f'(x) > 0$.
- (ii) Cén raon luachanna ar x a fhágann go bhfuil $f'(x) > 0$?
- (iii) Cén raon luachanna ar x a fhágann go bhfuil $f'(x) < 0$?
- (iv) Cé na luachanna ar x a fhágann go bhfuil $f'(x) = 0$?

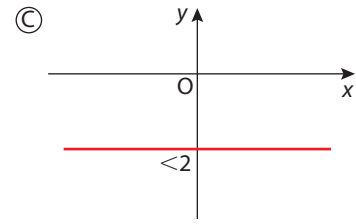
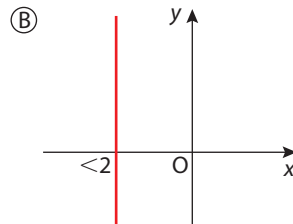
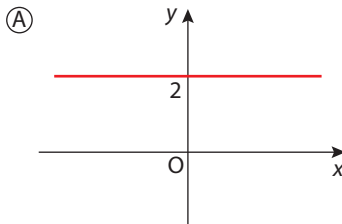
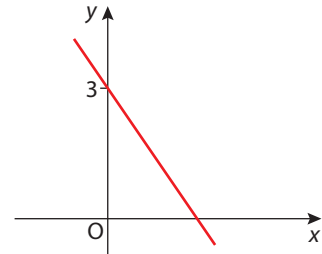


Féach ar an gcuar agus ar an líne ar dheis. Tabhair trí chúis go seasann an líne d'fheidhm fána an chuar.



4. Tá graf $y = -2x + 3$ le feiceáil ar dheis.

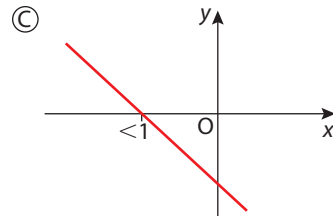
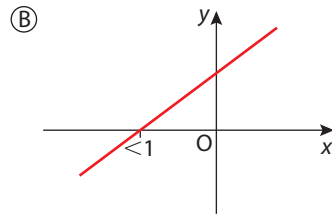
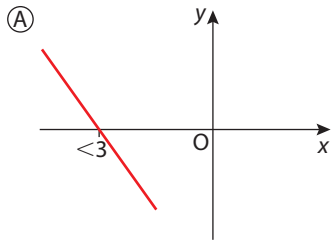
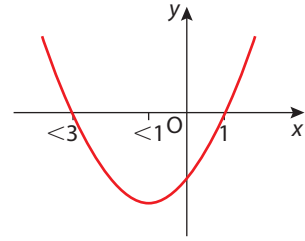
Cé acu de na trí líne thíos a sheasann d'fheidhm fána na líne sin? Mínigh do fhreagra.



5. Tá graf na feidhme $y = f(x)$ le feiceáil ar dheis.

Cé acu de na trí líne thíos a sheasann do ghráf na feidhme $y = f'(x)$? $y = f'(x)$?

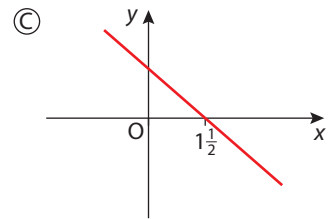
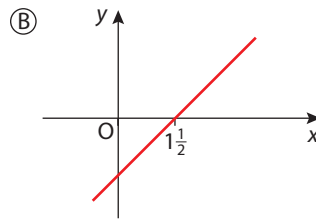
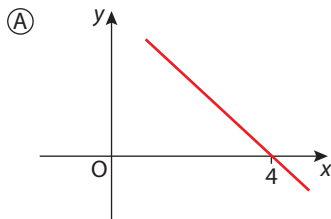
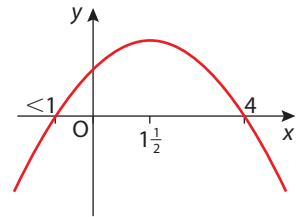
Tabhair cúis le do fhreagra.



6. Is í an léaráid ar dheis graf na feidhme $y = f(x)$.

Cé acu de na trí ghráf thíos a sheasann do ghráf fheidhm na fána $y = f'(x)$?

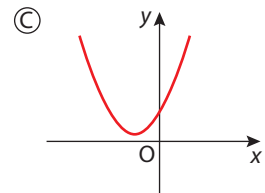
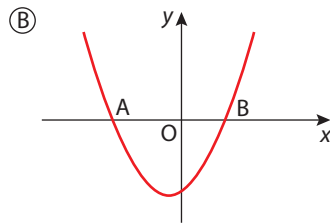
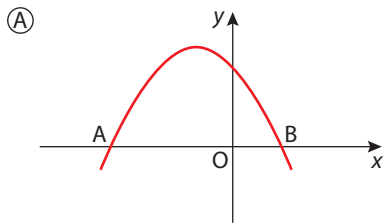
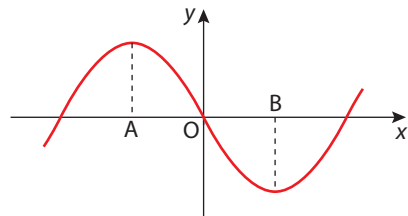
Mínigh do fhreagra.



7. Tá graf na feidhme $y = f(x)$ le feiceáil ar dheis.

Cé acu de na trí ghráf thíos a sheasann d'fheidhm na fána i gcás an chuir sin?

Mínigh do fhreagra.



Mír 18.6 Rátaí athraithe

Tá sé feicthe againn i míreanna roimhe seo gurb ionann $\frac{dy}{dx}$ agus ráta athraithe y i leith x .

Má tá $\frac{dy}{dx} = 2$, ciallaíonn sé sin go dtagann méadú 2 aonad ar y gach uair a thagann méadú aonad amháin ar x .

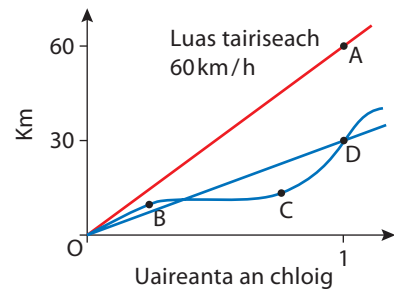
Tá sé feicthe againn freisin go mbíonn ráta an athraithe tairiseach i gcás feidhm líneach, agus go dtugann ráta sin an athraithe fána na líne.

Más ar luas tairiseach a ghluaiseann carr, tairiseach a bhíonn ráta athraithe an fhaid slí i leith an ama freisin. Ní ar luas tairiseach a ghluaiseann an chuid is mó de rudaí, áfach. Má bhíonn luas cairr ag athrú, beidh ráta athraithe an fhaid slí i leith an ama ag athrú an t-am ar fad.

Cuir i gcás na graif faid agus ama ar dheis.

Taispeánann an líne dhíreach trí A luas tairiseach 60 km/h.

Ar an lámh eile, taispeánann an graf trí na pointí B, C agus D go bhfuil an tiománaí ag taisteal ar luasanna éagsúla.



Cé nach bhfuil an luas a bhí faoin gcarr seo ag aon am ar leith ar eolas againn, is féidir linn meánluas an chairr, agus í ag taisteal ar feadh uair an chloig, a oibriú amach.

Is ionann an meánluas agus $\frac{\text{fad slí}}{\text{am}} = \frac{30}{1} = 30 \text{ km/h}$.

Is é an meánluas sin fána na líne OD.

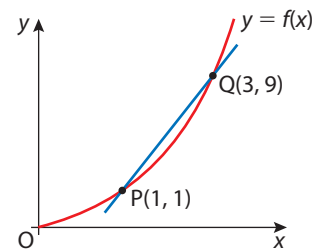
Má bhíonn meánluas an chairr idir na pointí B agus C ag teastáil uainn, faighimid fána na mírlíne [BC].

An riail ghinearálta: Is ionann **meánráta an athraithe** idir dhá phointe ar ghráf feidhme agus fána na líne a cheanglaíonn na pointí sin.

Mar shampla, is í fána [PQ] a thugann meánráta athraithe y i leith x idir na pointí P agus Q.

$$\text{Fána} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$$

Faightear fána an tadhláil leis an gcuair ag an bpointe sonrach P ach $\frac{dy}{dx}$ a fháil agus ansin a luach a fháil nuair atá $x = 1$.



Ráta meandrach an athraithe a thugtar ar ráta an athraithe ag pointe sonrach.

Rátaí athraithe a chur i bhfeidhm

Tá sé feicthe againn cheana féin gurb ionann $\frac{dy}{dx}$ agus ráta athraithe y i leith x i gcás feidhm ar bith $y = f(x)$.

Ar an gcaoi chéanna, is ionann $\frac{dV}{dr}$ agus ráta athraithe V i leith r ,

agus is ionann $\frac{dS}{dt}$ agus ráta athraithe S i leith t .

Sampla 1

Tá uisce á bhailú in umar uisce.

$V = 3t^2 + 4t + 2$ a thugann toirt an uisce (V méadar chiúbacha) san umar i gceann t nóiméad.

Faigh ráta athraithe na toirte i leith an ama nuair atá $t = 2$.

$$V = 3t^2 + 4t + 2$$

$$\frac{dV}{dt} = 6t + 4 \dots \text{is ionann } \frac{dV}{dt} \text{ agus ráta athraithe na toirte i leith } t$$

$$= 6(2) + 4 \dots \text{nuair atá } t = 2$$

$$= 16$$

$$= 16 \text{ m}^3/\text{nóim.}$$

Díláithriú, treoluas agus luasghéarú

Ceann de na príomhshlite ina gcuirtear rátaí athraithe i bhfeidhm ná an staidéar ar ghluaisne cáithnín.

Más i líne dhíreach a bhíonn rud ag gluaiseacht, is le macasamhail na foirmle seo a leanas a fhaightear an fad a ghabhtar, s méadar, in imeacht t soicind:

$$s = 3 - 6t + t^3.$$

Dhá ráta athraithe a bhíonn ann agus rud ag gluaiseacht:

(i) an **luas**, is é sin an ráta ar a n-athraíonn an fad a ghabhtar i leith an ama a ghlacann sé.

Is ionann $\frac{ds}{dt}$ agus an t-athrú sin, i.e. $\frac{ds}{dt} = \text{luas (nó treoluas)}$.

Más deimhneach a bhíonn $\frac{ds}{dt}$, is ag gluaiseacht amach ó phointe fosaithe P a bhíonn an cáithnín.

Más diúltach a bhíonn $\frac{ds}{dt}$, is ag gluaiseacht i dtreo P a bhíonn an cáithnín.

(ii) an **luasghéarú**, is é sin ráta athraithe an luais (v) i leith an ama a ghlacann sé.

Is ionann $\frac{dv}{dt}$ agus an t-athrú sin, i.e. $\frac{dv}{dt} = \text{luasghéarú}$.

Don luasghéarú a sheasann $\frac{dv}{dt}$ agus $\frac{d^2s}{dt^2}$ araon.

Gheofar $\frac{d^2s}{dt^2}$ ach $\frac{ds}{dt}$ a dhifreáil.

Mar sin, má tá $s = 3t^3 - t^2 + 4t$,

$$\frac{ds}{dt} = 9t^2 - 2t + 4$$

agus $\frac{d^2s}{dt^2} = 18t - 2$.

*Cuimhnigh
air seo*

Más ionann $s = 3 - 6t + t^3$ agus an fad (ina mhéadair) a ghabh rud in t (soicind),

(i) $\frac{ds}{dt} =$ an luas (ina m/s) i gceann t soicind

(ii) $\frac{d^2s}{dt^2} =$ an luasghéarú (ina m/s²) i gceann t soicind

Nóta: ➤ Ina mhéadair sa soicind sa soicind a thugtar an luasghéarú; m/s² a scríobhtar.

➤ Más diúltach a bhíonn $\frac{d^2s}{dt^2}$, is ag dul i laghad a bhíonn an luas.

Sampla 2

Ina líne dhíreach a ghluaiseann réad áirithe agus is mar seo a chuirtear in iúl cá fhad a ghluaiseann sé ina mhéadair ó phointe fosaithe ar an líne in imeacht t soicind:

$$s = 3t^3 - 4t + 6.$$

Faigh (i) an luas i gceann t soicind

(ii) an luas i gceann 2 shoicind

(iii) an méid soicindí go dtí go mbeidh an réad ina stad

(iv) an luasghéarú i gceann 3 shoicind.

(i) Is ionann an luas agus $\frac{ds}{dt}$.

$$s = 3t^3 - 4t + 6$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = 9t^2 - 4$$

\therefore is ionann an luas agus $(9t^2 - 4)$ m/s.

(ii) Cuir 2 isteach in áit t in $\frac{ds}{dt}$ go bhfaighidh tú an luas i gceann 2 shoicind.

$$\begin{aligned}\text{Nuair atá } t = 2, 9t^2 - 4 &= 9(2)^2 - 4 \\ &= 9(4) - 4 = 32 \text{ m/s.}\end{aligned}$$

(iii) Luas nialais a bhíonn faoin réad nuair a bhíonn sé ina stad.

$$\text{Luas} = 0 \Rightarrow 9t^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 9t^2 = 4$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

\therefore i gceann $\frac{2}{3}$ de shoicind a bheidh an réad ina stad.

(iv) Is ionann an luasghéarú agus $\frac{d^2s}{dt^2}$.

$$\frac{ds}{dt} = 9t^2 - 4 \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = 18t$$

$$\text{Nuair atá } t = 3, 18t = 18(3) = 54 \text{ m/s}^2.$$

Sampla 3

Go ceartingearach in airde a theilgtear roicéad áirithe.

h méadar an airde a bhaineann sé amach i gceann t soicind, agus is leis an bhfoirmle seo a chuirtear í sin in iúl: $h = 100t - 5t^2$.

Faigh (i) airde an roicéid os cionn talún i gceann 2 shoicind

(ii) an treoluas faoin roicéad i gceann 3 shoicind

(iii) an méid soicindí go dtí go mbeidh an roicéad ina stad ar feadh meandair

(iv) an uasairde os cionn talún a bhainfidh an roicéad amach.

(i) Cuirimid 2 in áit t san fhoirmle a thugtar go bhfaighimid airde an roicéid os cionn talún i gceann 2 shoicind.

$$h = 100t - 5t^2$$

$$\text{Ag } t = 2, h = 100(2) - 5(2)^2$$

$$= 200 - 20 = 180 \text{ méadar}$$

\therefore an airde = 180 méadar i gceann 2 shoicind.

(ii) Treoluas = $\frac{dh}{dt}$.

$$h = 100t - 5t^2 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 100 - 10t$$
$$= 100 - 10(3) \text{ i gceann 3 shoicind}$$
$$\Rightarrow \text{an treoluas} = 70 \text{ m/s i gceann 3 shoicind.}$$

(iii) Luas nialais a bhíonn faoin roicéad nuair a bhíonn sé ina stad.

$$\text{Luas} = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow 100 - 10t = 0$$
$$\Rightarrow 10t = 100 \Rightarrow t = 10$$

\therefore i gceann 10 soicind a bheidh an roicéad ina stad ar feadh meandair.

(iv) I gceann 10 soicind a bhainfear an uasairde os cionn talún amach, i.e. nuair a bheidh an roicéad ina stad.

$$\text{Nuair atá } t = 10, \quad h = 100(10) - 5(10)^2$$
$$= 1000 - 500$$
$$= 500 \text{ méadar}$$

\therefore 500 méadar an uasairde os cionn talún a bhainfear amach.

Cleachtadh 18.6

1. s méadar a ghluaiseann réad in t soicind sa chaoi go bhfuil $s = 2t^2 - 4t + 4$.

Faigh (i) an fad a ghabhtar in 4 shoicind.

(ii) an fad a ghabhtar in 6 shoicind.

(iii) Céard is ciall le $\frac{ds}{dt}$?

(iv) Cén luas atá faoin réad i gceann 5 shoicind?

(v) Céard is ciall le $\frac{ds}{dt} = 0$?

(vi) Cé mhéad soicind go stadfaidh an réad?

2. Luasghéaraíonn gluaisrothaí i líne dhíreach amach ó phointe tosaigh P .

$s = t^2$ a thugann an fad slí a ghabhann sé, s (ina mhéadair), i gceann t soicind.

(i) Faigh an fad a ghabhann sé in 2 shoicind.

(ii) Faigh an fad a ghabhann sé in 6 shoicind.

(iii) Faigh an meánluas atá faoi, ina mhéadair sa soicind, idir $t = 2$ agus $t = 6$.

(iv) Faigh an luas atá faoi i gceann 5 shoicind.

3. Tá $t = 0$ nuair a mhúsclaítear carr. s méadar a ghluaiseann sí in t soicind, áit a bhfuil

$$s = 30t - \frac{9}{4}t^2.$$

- (i) Faigh an fad a ghabhtar sa chéad 4 shoicind.
 - (ii) Faigh luas an chairr i gceann 2 shoicind.
 - (iii) Cé mhéad soicind go dtí gurb ionann an luas faoin gcarr agus nialas?
 - (iv) Faigh an fad a ghluaiseann an carr go dtí gurb ionann an luas fúithi agus nialas.
4. Ceartingearach in airde a chaitear cáithnín, agus bíonn sé h méadar os cionn talún i gceann t soicind. Leis an bhfoirmle seo a chuirtear é sin in iúl: $h = 50t - 2t^2$.
- (i) Faigh airde an cháithnín os cionn talún i gceann 2 shoicind.
 - (ii) Faigh an luas faoin gcáithnín i gceann 3 shoicind.
 - (iii) Céard a chiallaíonn $\frac{dh}{dt} = 0$ i gcomhthéacs na cothromóide?
 - (iv) Cé mhéad soicind go stadfaidh an cáithnín de bheith ag éirí?

5. Má tá $s = t^3 - 3t^2 + 9t + 4$, faigh

- (i) luach $\frac{ds}{dt}$ nuair atá $t = 2$
- (ii) luach $\frac{d^2s}{dt^2}$ nuair atá $t = 3$.

6. Ceartingearach in airde a chaitear cloch, agus is leis an bhfoirmle $h = 50t - 5t^2$ a chuirtear in iúl an airde, h méadar, a bhaintear amach i gceann t soicind.

- Faigh (i) an luas faoin gcloch i gceann 3 shoicind
(ii) an méid soicindí go dtí gurb ionann an luas fúithi agus nialas
(iii) an airde is mó a bhaineann an chloch amach.

7. Leis an bhfoirmle seo a leanas a chuirtear in iúl an fad, s méadar, a ghluaiseann rud áirithe in t soicind:

$$s = t^3 - 2t^2 + 3t.$$

- (i) Faigh an fad a ghabhann sé in 2 shoicind.
 - (ii) Faigh an luas faoin rud i gceann 3 shoicind.
 - (iii) Faigh $\frac{d^2s}{dt^2}$.
 - (iv) Céard a léiríonn $\frac{d^2s}{dt^2}$?
 - (v) Faigh an luasghéarú i gceann 4 shoicind.
8. Leis an bhfoirmle $s = 3t^3 - 4t + 6$ a chuirtear in iúl an fad, s , ina mhéadair a ghabhann rud in t soicind.
- Faigh (i) an luas faoin rud i gceann 1 soicind amháin
(ii) an luasghéarú i gceann 3 shoicind
(iii) an méid soicindí go dtí gurb ionann an luas fúithi agus nialas.

9. Ceartingearach in airde a chaitear teilgeán, agus bíonn sé h méadar os cionn talún i gceann t soicind. Leis an bhfoirmle seo a chuirtear é sin in iúl:

$$h = 48t - 2t^2.$$

- Faigh (i) airde an teilgeáin os cionn talún i gceann 3 shoicind
(ii) an luas faoi i gceann 3 shoicind
(iii) an luasghéarú air
(iv) an méid soicindí go dtí go mbeidh an teilgeán ina stad ar feadh meandair
(v) an uasairde os cionn talún a bhainfidh an teilgeán amach.

10. Ag gluaiseacht ar mhótarbhealach atá leoraí áirithe. Cuirtear air na coscáin go tobann. Tá $t = 0$ soicind nuair a chuirtear air na coscáin, agus an fad ina mhéadair a ghluaiseann an leoraí ina dhiaidh sin, is mar seo a thugtar é:

$$s = 30t - \frac{t^2}{4}.$$

- (i) Cén luas atá faoin leoraí ag an bpointe a gcuirtear air na coscáin?
(ii) Cé mhéad soicind go stadfaidh an leoraí?
(iii) Cén fad a ghluaiseann an leoraí i gcaitheamh an ama sin?

11. Leis an bhfoirmle seo a chuirtear in iúl achar (A) ciorcail ar ga dó r :

$$A = \pi r^2.$$

Faigh, i dtéarmaí π , ráta athraithe A de réir mar a athraíonn r nuair atá

- (i) $r = 2$ (ii) $r = 6$.

12. Ligtear do mhirlín titim ó bharr foirgnimh atá 45 méadar ar airde.

Leis an bhfoirmle seo a leanas a thugtar airde an mhirlín os cionn talún, ina méadair, i gceann t soicind:

$$h = 45 - 5t^2.$$

- (i) Cé mhéad soicind go dtí go mbuaileann an mirlín an talamh?
(ii) Faigh an luas atá faoin mirlín nuair a bhuaileann sé an talamh
(a) ina mhéadair sa soicind
(b) ina chiliméadair san uair.

13. Is leis an bhfoirmle seo a leanas a thugtar an luas, v , ina mhéadair sa soicind, faoi rud áirithe i gceann t soicind:

$$v = 12t - 3t^2.$$

- (i) Cé na luachanna ar t a fhágann gur 9 méadar sa soicind an luas faoin rud?
(ii) Céard a chiallaíonn $\frac{dv}{dt}$ i gcomhthéacs na cothromóide?
(iii) Cathain is ionann an luasghéarú agus nialas?
(iv) Faigh an luas nuair is ionann nialas agus an luasghéarú air.
(v) Faigh an luasghéarú ag an dá phointe ama nuair atá an rud ag gluaiseacht ar luas 9 méadar sa soicind.

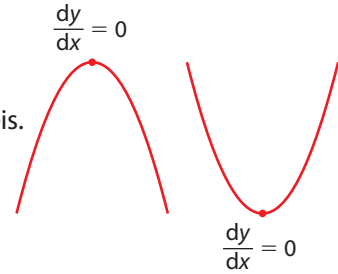
Mír 18.7 Uasluachanna

D'fhoghlaimíomar níos luaithe sa chaibidil seo go mbíonn $\frac{dy}{dx} = 0$ ag an uasphointe casaidh agus ag an íospointe casaidh i gcás feidhm ar bith $y = f(x)$. Taispeántar é sin sna fíoracha ar dheis.

Is féidir an-leas a bhaint as an toradh go bhfuil $\frac{dy}{dx} = 0$ ag

uasphointe casaidh nó ag íospointe casaidh agus muid ag plé le fadhbanna ón bhfíorshaol nuair a bhíonn orainn feidhmeanna a

uasmhéadú (nó a íosmhéadú). Samplaí de seo ná feidhmeanna a shainíonn achar nó brabús.



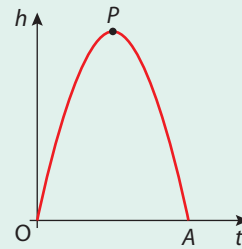
Sampla 1

Sa léaráid ar dheis taispeántar conair roicéid a theilgtear san aer.

Leis an bhfoirmle seo a leanas a thugtar airde an roicéid (h méadar) i gceann t soicind:

$$h(t) = -2t^2 + 28t.$$

- Cé mhéad soicind a bhfuil an roicéad san aer?
- Céard é an uasairde os cionn talún a bhaineann an roicéad amach?



- Tá an roicéad san aer ar feadh an méid ama a léirítear ar an x -ais idir an bunphointe agus an pointe A , i.e. na pointí ag arb ionann an airde agus nialas. Chun an pointe A a fháil, réitimid an chothromóid $-2t^2 + 28t = 0$.

$$\begin{aligned} -2t^2 + 28t = 0 &\Rightarrow 2t^2 - 28t = 0 \\ &\Rightarrow t^2 - 14t = 0 \\ &\Rightarrow t(t - 14) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ nó } t = 14 \end{aligned}$$

Is é $(14, 0)$ an pointe A .

\therefore tá an roicéad san aer ar feadh 14 shoicind.

- Ag an bpointe casaidh P a bhaintear an uasairde amach.

Ag P , $\frac{dh}{dt} = 0$.

$$h = -2t^2 + 28t$$

$$\frac{dh}{dt} = -4t + 28$$

$$-4t + 28 = 0 \Rightarrow 4t = 28 \Rightarrow t = 7$$

Nuair atá $t = 7$ a bhaintear an uasairde amach.
Gheobhaimid an uasairde a baineadh amach ach 7 a chur in áit t sa chothromóid a thugtar.

$$\begin{aligned} h &= -2t^2 + 28t \\ &= -2(7)^2 + 28(7) \text{ nuair atá } t = 7 \\ h &= 98 \end{aligned}$$

\therefore 98 méadar an uasairde os cionn talún a bhaineann an roicéad amach.

Cleachtadh 18.7

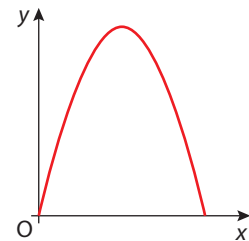
1. Caitear liathróid suas san aer.

Taispeánann an fhoirmle $y = 20x - 4x^2$ airde na liathróide i gceann x soicind agus í y méadar os cionn talún.

Léiríonn an graf ar dheis eitilt na liathróide.

Seasann gach aonad ar an x -ais do 5 mhéadar.

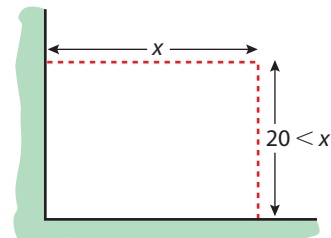
- Cá fhad a bhí an liathróid san aer?
- Nuair a bhuail an liathróid an talamh, cén fad ón áit ar caitheadh í a bhí sí?
- Bain úsáid as $\frac{dy}{dx}$ chun luach x nuair a bhain an liathróid a huasairde amach a fháil.
- Anois faigh an uasairde os cionn talún a bhain an liathróid amach.



2. 20 méadar d'fhálú atá ag feirmeoir áirithe.

Tá sé i gceist aige é a úsáid chun cró dronuilleogach a dhéanamh i gcúinne garraí, mar a léirítear sa léaráid.

- Taispeáin gurb í an fhoirmle $A = 20x - x^2$ a thugann achar an chró.
- Cén luach ar x a fhágann go bhfuil achar an chró chomh mór agus is féidir leis a bheith?
- Faigh an t-uasachar sin.



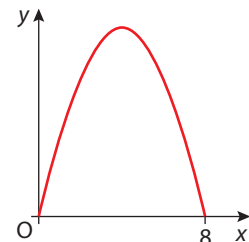
3. Seo cothromóid na feidhme a bhfuil a graf le feiceáil ar dheis:

$$y = 8x - x^2.$$

Is é a thaispeánann an fheidhm ná líon na dtacsaithe (y) ag stad tacsaithe ar feadh ocht n-uair a chloig as a chéile.

Seasann $x = 0$ do mheán lae agus seasann $x = 8$ do 8 p.m.

- Cén t-am a bhfuil an líon is mó tacsaithe ag an stad?
- Faigh uaidh sin an t-uaslíon tacsaithe ag an stad i gcaitheamh na tréimhse ocht n-uair an chloig seo.

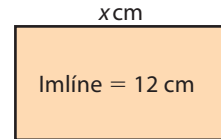


4. Léiríonn an fheidhmn $f: x \rightarrow 12x - x^2$ an airde, ina méadair, a bhain liathróid ghailf amach ón am ar buaileadh í ($x = 0$) go dtí an t-am ar bhuail sí an talamh ($x = 12$). Ina shoicindí a thomhaistear an t-am.

- (i) Cé mhéad soicind a bhí caite nuair a bhain an liathróid a huasairde amach?
- (ii) Bain úsáid as an bhfreagra a fuair tú chun uasairde na liathróide gailf a fháil.

5. x cm fad na dronuilleoige ar dheis agus 12 cm a himlíne.

- (i) Taispeáin gurb ionann achar (A) na dronuilleoige agus $A = 6x - x^2$.
- (ii) Cén luach ar x a fhágann go bhfuil achar na dronuilleoige chomh mór agus is féidir leis a bheith?
- (iii) Faigh an t-uasachar sin.



6. An chothromóid $h = 15t - 5t^2$ a thugann airde liathróide (ina méadair) agus í ag gluaiseacht tríd an aer, t soicind tar éis di a bheith teilgte aníos ón talamh ag meaisín.

- (i) Cá fhad a thógann sé ar an liathróid a huasairde a bhaint amach?
- (ii) Faigh an uasairde a bhaintear amach.

7. Tá feirmeoir ag cur cruithneacht gheimhridh. Braitheann an méid cruithneachta a gheobhaidh sé in aghaidh an heicteáir ar an méid leasachán nítrigine a úsáideann sé, i measc rudaí eile. I gcás na feirme seo, is ar an gcaoi seo a leanas a bhraitheann an méid cruithneachta ar an nítrigin:

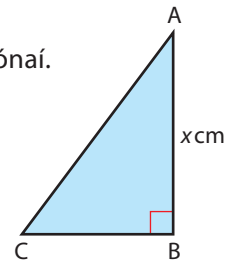
$$Y = 7000 + 32N - 0.1N^2,$$

áit arb é Y an méid cruithneachta a tháirgtear, ina kg in aghaidh an heicteáir, agus N an méid nítrigine a chuirtear léi, ina kg in aghaidh an heicteáir.

- (i) Cé mhéad cruithneachta a gheobhaidh sé in aghaidh an heicteáir má úsáideann sé 100 kg de nítrigin in aghaidh an heicteáir?
- (ii) Faigh an méid nítrigine a chaithfidh sé a úsáid d'fhonn an méid is mó cruithneachta a tháirgeadh.
- (iii) Céard é an t-uasmhéid cruithneachta is féidir a tháirgeadh in aghaidh an heicteáir?
- (iv) Is ionann an costas iomlán ar an bhfeirmeoir chun an chruithneacht a tháirgeadh agus €1300 in aghaidh an heicteáir. Is féidir leis an chruithneacht a dhíol ar €160 in aghaidh an tona. Ina theannta sin, is féidir leis €75 in aghaidh an heicteáir a fháil ar an tuí a bheidh fágtha. Má éiríonn leis an t-uasmhéid cruithneachta a tháirgeadh, cén brabús in aghaidh an heicteáir a dhéanfaidh sé?

8. Tá an dá shlios $[AB]$ agus $[BC]$ ar an triantán dronuilleach ar dheis inathraithe sa chaoi gurb ionann suim an dá shlios agus 12 cm i gcónaí.

- (i) Más x cm ar fad atá $[AB]$, scríobh fad $[BC]$ i dtéarmaí x .
- (ii) Sloinn achar an triantáin san fhoirm $A = f(x)$.
- (iii) Cén luach ar x a fhágann go bhfuil achar an triantáin chomh mór agus is féidir leis a bheith?
- (iv) Ríomh an t-uasachar sin.



9. Tugann $s(x) = -x^3 + 3x^2 + 360x + 5000$ garluach ar líon na mbradán, s , atá ag snámh in aghaidh srutha in abhainn áirithe chun sceitheadh. Seasann x do theocht 2 an uisce ina céimeanna ($^{\circ}\text{C}$).
(Ní bhíonn an fheidhm seo bailí ach amháin i gcás $6 \leq x \leq 20$.)
Faigh an teocht uisce a fhágann go mbíonn an t-uaslíon bradán ag snámh in aghaidh srutha.

10. Is leis an bhfoirmle seo a leanas a ríomhtar an brabús a dhéanann an comhlacht a fhoilsíonn irisleabhar áirithe:

$$P = 50x - 5x^2,$$

áit arb é P an brabús (ina mhílte euro) agus x praghas díola an irisleabhair (ina euro).

- Cén praghas ba chóir don chomhlacht a chur ar an irisleabhar d'fhonn an brabús is mó a dhéanamh?
- Faigh uaidh sin an t-uasmhéid brabúis is féidir leis an gcomhlacht a dhéanamh.

Cuir triail ort féin 18

1. (a) Dífreáil gach ceann de na feidhmeanna seo:

(i) $y = 3x - 4$

(ii) $y = 2x^2 - 4x$

(iii) $y = x^3$

- (b) Taispeántar sa léaráid graf na feidhme

$$y = x^2 - 2x - 3.$$

- (i) Faigh fána an chuair ag an bpointe

$$P(2, -3).$$

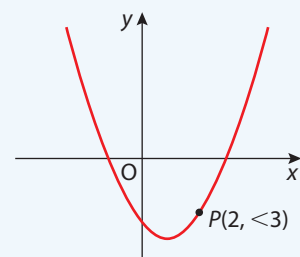
- (ii) Faigh uaidh sin cothromóid an tadhlaí leis an gcuair ag an bpointe P .

- (c) Gluaiseann cáithnín feadh líne dhíreach OA agus, i gceann t soicind, tá sé s méadar ón bpointe fosaithe

O ar an líne dhíreach. Is leis an gcothromóid seo a fhaightear an fad s :

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t + 7.$$

- Faigh an fad a ghabhann sé in 3 shoicind.
- Faigh an luas faoin gcáithnín i gceann 4 shoicind.
- Cé mhéad soicind go dtí go mbíonn an cáithnín ina stad?
- Faigh luasghéarú an cháithnín i gceann 4 shoicind.

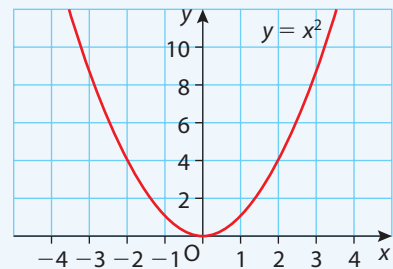


2. (a) Má tá $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, faigh $f'(-2)$.
 (b) Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar $y = 2x^2 - 5x - 2$ ag an bpointe $(1, -5)$. Faigh uaidh sin cothromóid an tadhlaí.
 (c) Mar seo a chuirtear síos ar airde balúin, h méadar, maidir leis an am, t soicind, tar éis a scaoilte:

- Faigh (i) airde an bhalúin os cionn talún i gceann 2 shoicind
 (ii) an luas faoin mbalún i gceann 1 soicind amháin
 (iii) an méid soicindí go stadfaidh an balún ar feadh meandair
 (iv) an uasairde os cionn talún a bhainfidh an balún amach.

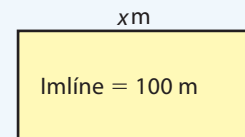
3. (a) Dífreaíl gach ceann díobh seo i leith x :
 (i) $3x + 2$ (ii) $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5$ (iii) $2x^3 - x^2 - 9x$

- (b) Tá graf an chuair $y = x^2$ le feiceáil ar dheis.

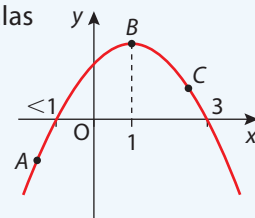


- (i) Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar seo ag an bpointe ag a bhfuil $x = 2$.
 (ii) Is ionann -2 agus fána an tadhlaí leis an gcuar ag pointe áirithe. Cén pointe é?
 (iii) Faigh comhordanáidí an phointe ar an gcuar ag a bhfuil an fhána cothrom le nialas.

- (c) Tá geacán dronuilleogach talún le himfhálú le 100 méadar de shreang chlaí.
 (i) Más ionann fad an gheadáin agus x méadar, sloinn an leithead i dtéarmaí x .
 (ii) Sloinn an t-achar, A m², i dtéarmaí x .
 (iii) Faigh an luach ar x a fhágann gur uasluach é A .
 (iv) Faigh an t-uasachar sin.



4. (a) Scríobh síos cé acu deimhneach, diúltach nó cothrom le nialas atá fána an chuair ar dheis ag na trí phointe A , B agus C .



- (b) Is ionann 1 agus fána an tadhlaí leis an gcuar $y = 4x - x^2$ ag pointe áirithe ar an gcuar. Cén pointe é?
 (c) Rolltar mirlín ar uachtar boird.

Ag $t = 0$ soicind a thosaíonn sé ag gluaiseacht.

Mar seo a chuirtear síos ar an bhfad (s cm) a ghabhann sé in t soicind:

$$s = 14t - t^2.$$

- (i) Cén fad a bheidh curtha de ag an mirlín nuair a bheidh $t = 2$ shoicind?
 (ii) Cén luas a bheidh faoin mirlín nuair a bheidh $t = 5$ shoicind?
 (iii) Cé mhéad soicind go dtí gurb ionann an luas faoin mirlín agus nialas?
 (iv) Cén fad a bheidh curtha de ag an mirlín nuair a stadfaidh sé?

5. (a) Má tá $y = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$, faigh

(i) luach $\frac{dy}{dx}$ ag $x = 1$

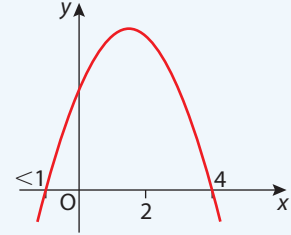
(ii) luach $\frac{d^2y}{dx^2}$ ag $x = -2$.

(b) Tá sceitse den fheidhm

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4$$

le feiceáil ar dheis.

Déan cóip gharbh den chuar seo. Ansin, agus tú ag úsáid na n-aiseanna céanna, tarraing sceitse d'fheidhm na fána.



(c) Is ar an bhfad ó lár na cathrach a bhraitheann an dlús daonra (líon na gcónaitheoirí in aghaidh an aonaid achair) i gcás a lán cathracha. I gcás cathair áirithe, tugann an fhoirmle seo a leanas garluach ar an dlús daonra P , ina mhílte duine sa chiliméadar cearnach, r ciliméadar ón lár: $P = 10 + 40r - 20r^2$.

(i) Céard é an dlús daonra i lár na cathrach?

(ii) Scríobh síos $\frac{dP}{dr}$.

Mínigh an chiall atá le $\frac{dP}{dr}$.

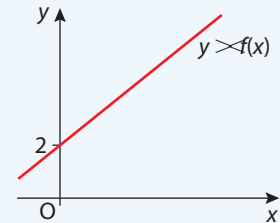
(iii) Faigh luach $\frac{dP}{dr}$ nuair atá $r = 5$.

(iv) Cén áit a bhfuil an dlús daonra is mó?

6. (a) Ní thugtar cothromóid na líne ar dheis.

Trasnaíonn sí an y -ais ag $(0, 2)$.

Má tá $\frac{dy}{dx} = 1$, scríobh cothromóid na líne san fhoirm $y = mx + c$.



(b) Is ionann cothromóid cuair agus $y = 2x^2 - 6x + 3$.

Faigh $\frac{dy}{dx}$ agus faigh uaidh sin comhordanáidí an phointe ar an gcuair ag a bhfuil an tadhlaí comhthreomhar leis an líne $y = 2x + 4$.

(c) Leis an bhfoirmle seo a leanas a chuirtear in iúl an fad, s méadar, a ghluaiseann réad áirithe in t soicind:

$$s = 3 - 6t + 2t^3.$$

(i) Cén fad a ghabhann an réad sa chéad 2 shoicind?

(ii) Cén fad a ghabhann an réad sa chéad 4 shoicind eile?

(iii) Faigh an meánluas a bhíonn faoin réad idir an dara soicind agus an séú soicind.

(iv) Faigh an luas a bhíonn faoin réad i gceann 2 shoicind.

(v) Cé mhéad soicind go stadfaidh an réad?

Achoimre ar phríomhphointí...

1. I gcás na feidhme $y = f(x)$, an **difreáil** a thugtar ar an bpróiseas a bhaineann le $\frac{dy}{dx}$ a fháil.

I gcás feidhm líneach, $\frac{dy}{dx} = \text{fána} = 1$ ú difríocht idir aschuir.

Má tá $y = mx + c$, $\frac{dy}{dx} = m = \text{fána}$.

2. Má tá $y = x^n$, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$; má tá $y = ax^n$, $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$.

I bhfocail: Iolraigh comhéifeacht na hathróige faoin gcumhacht agus laghdaigh an chumhacht de 1.

Sampla: $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 3$.

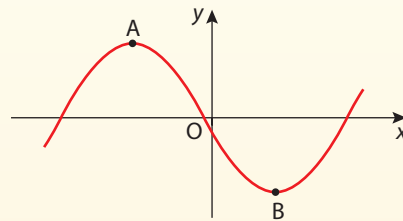
3. Má tá $y = f(x)$, is ionann $\frac{dy}{dx}$ agus **fána an tadhlaí** leis an gcuar ag pointe ar bith ar an gcuar.

4. **Uaspointe casaidh** atá againn ag an bpointe A.

Íospointe casaidh atá againn ag an bpointe B.

Ag uaspointe casaidh, $\frac{dy}{dx} = 0$ agus $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, i.e. diúltach.

Ag íospointe casaidh, $\frac{dy}{dx} = 0$ agus $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, i.e. deimhneach.



5. **Feidhmeanna méadaitheacha agus laghdaitheacha**

(i) Nuair is méadaitheach atá an cuar, $\frac{dy}{dx} > 0$.

(ii) Nuair is laghdaitheach atá an cuar, $\frac{dy}{dx} < 0$.

6. Más ionann $s = 3 - 5t + t^3$ agus an fad, s , a ghabh rud in t soicind,

(i) is ionann $\frac{ds}{dt}$ agus an **luas** i gceann t soicind

(ii) is ionann $\frac{d^2s}{dt^2}$ agus an **luasghéarú** i gceann t soicind.