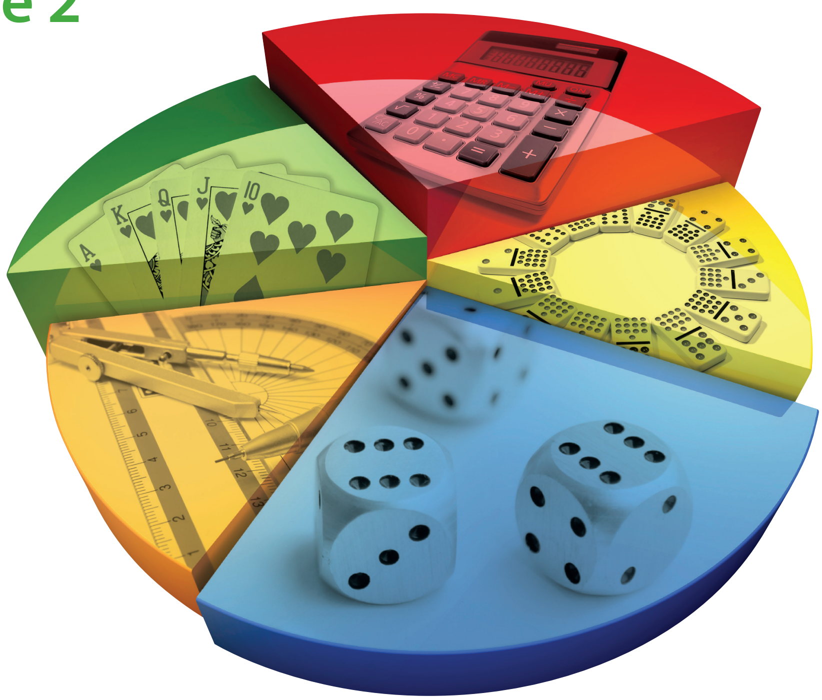
Tionscadal Mata

Téacs & Trialacha 4

Matamaitic na hArdteistiméireachta, an tArdleibhéal

Snáithe 2



O. D. Morris · Paul Cooke · Paul Behan

An Gúm
Baile Átha Cliath

Is aistriúchán é seo ar:
Texts & Tests 4, Leaving Certificate Higher Level Maths, Strand 2

Aistritheoirí: Bairbre Ní Ógáin, Diarmuid Clifford

ISBN 978-1-85791-943-1

Dearadh agus leagan amach Tech-Set Ltd agus An Gúm

PB Print a chlóbhuail in Éirinn

Á fhoilsiú i gcomhar leis an gComhairle um Oideachas Gaeltachta agus Gaelscolaíochta (COGG)

Foilseacháin an Ghúim a cheannach

Siopaí
An Siopa Leabhar (01) 478 3814
An Siopa Gaeilge (074) 973 0500
An Ceathrú Póilí (028) 90 322 811

Ar líne
www.litriocht.com
www.siopagaeilge.ie
www.cnagsiopa.com
www.siopa.ie
www.cic.ie
www.iesltd.ie

Téarmaí: www.tearma.ie

An Gúm, Foras na Gaeilge, 63-66 Sráid Amiens, Baile Átha Cliath 1

Clár

TIONSCADAL MATA – SNÁITHE 2

Réamhrá

Cuireadh an leabhar seo i dtoll a chéile le haghaidh ***Tionscadal Mata – Snáithe 2*** de Chúrsa Ardleibhéil na hArdteistiméireachta do dhaltaí a bheidh ag gabháil don scrúdú sin ón mbliain 2013 ar aghaidh. Léiríonn an leabhar an cur chuige ginearálta i leith theagasc na matamaice mar atá beartaithe i d*Tionscadal Mata*. Spreagann sé ní hamháin forbairt ar eolas agus scileanna matamaiticiúla na ndaltaí, ach forbairt ar an tuiscint a theastaíonn chun na scileanna sin a chur i bhfeidhm.

Tá réimse sármhaith ceisteanna ar gach topaic ar fáil, ceisteanna atá scríofa le samhlaíocht agus a thabharfaidh dúshlán na ndaltaí. Cabhróidh na ceisteanna leis na daltaí chun an méid atá siad a dhéanamh a thuiscint agus chun a gcuid scileanna i réiteach fadhbhanna a fhorbairt. Tá dóthain ceisteanna a chuimsíonn gach pointe ar an scála deacrachta curtha ar fáil chun riachtanais beagnach gach dalta ag an leibhéal seo a shásamh.

An dearadh spreagúil lándaite, mar aon leis an méid mór léaráidí dea-thógtha, ba cheart go gcabhróidís le tuiscint na ndaltaí ar an topaic a bhfuil siad ag déanamh staidéar uirthi. Ag tús gach caibidle tá liosta dar teideal ***Focail Thábhachtacha***. Beifear ag súil leis go mbeidh na focail sin ar eolas ag na daltaí agus tuiscint acu orthu faoin am a mbíonn an chaibidil críochnaithe. I ngach caibidil tá mír dar teideal ***Cuir triail ort féin*** ina ndéantar comhdhlúthú agus athbhreithniú cuimsitheach ar ábhar na caibidle. Cabhróidh an mhír ***Achoimre ar na Príomhphointí*** atá i ndeireadh gach caibidle na bunfhíricí agus na foirmlí tábhachtacha a mheabhrú do dhaltaí.

O. D. Morris
Paul Cooke
Paul Behan

An Chéimseata Chomhordanáideach: An Líne

caibidil 1

Focail thábhachtacha

cothromóid bunphointe ingearach comhthreomhar idirlíne
aistriú achar comhlíneach foirm na fána is an trasphointe roinnt inmheánach
roinnt sheachtrach cóimheas meánlár imlár ingearlár gaol líneach

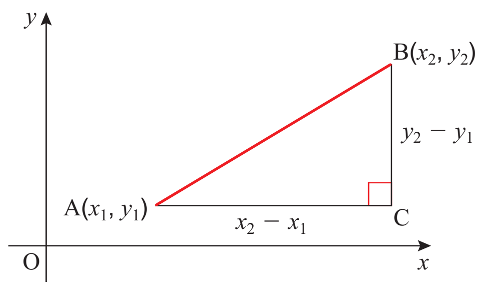
Mír 1.1 Súil siar ar na foirmlí

Féachfaimid arís sa mhír seo ar chuid d'fhoirmlí na céimseatan comhordanáidí a bhí ar chúrsa an Teastais Shóisearaigh. Seo iad na príomhfhoirmlí a bhaineann le comhordanáidí:

1. An fad idir dhá phointe

Is é an fad idir A(x_1, y_1) agus B(x_2, y_2):

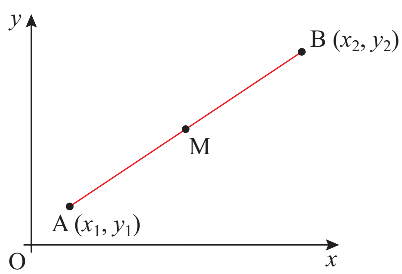
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



2. Lárphointe mírlíne

Is é lárphointe, M, na mírlíne ó A(x_1, y_1) go dtí B(x_2, y_2):

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



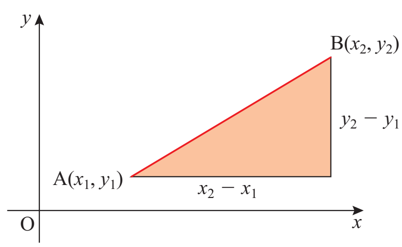
3. Fána líne

Sa léaráid ar dheis, faightear m, fána AB, ar an gcaoi seo

$$\frac{\text{athrú ceartingearach}}{\text{athrú cothrománach}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Is é fána, m, na líne trí (x_1, y_1) agus (x_2, y_2):

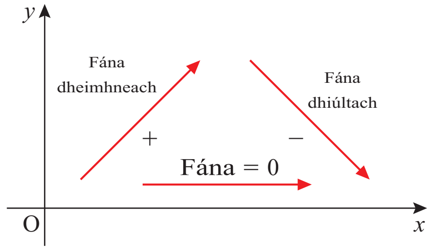
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



T&T4.indb 7 10/07/2018 17:45:07

4. Fánaí deimhneacha agus diúltacha

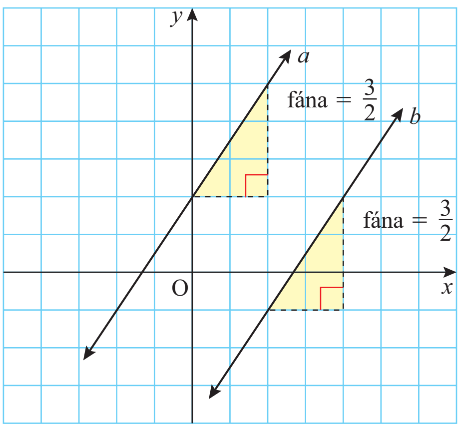
Agus tú ag dul ó chlé go deas, bíonn an fhána deimhneach má bhíonn an líne ag éirí agus bíonn an fhána diúltach má bhíonn an líne ag titim.



Is é nialas an fhána atá le líne chothrománach.

5. Línte comhthreomhara

Is é $\frac{3}{2}$ an fhána atá le líne a agus le líne b araon sa léaráid thíos.



Tá na línte sin comhthreomhar lena chéile.

Bíonn an fhána chéanna le línte comhthreomhara.

6. Línte ingearacha

Tá na línte a agus b ar dheis ingearach lena chéile.

Is é $\frac{3}{2}$ fána a.

Is é $-\frac{2}{3}$ fána b.

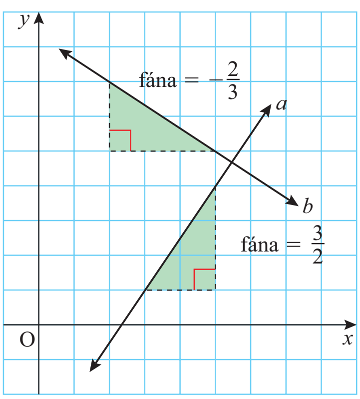
Tabhair faoi deara gurb ionann fána amháin agus deilín na fána eile, ach amháin go bhfuil siad ar mhalairt comhartha.

Tabhair faoi deara freisin gurb é -1 toradh an dá fhána, i.e.

$$-\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = -1$$

Má tá dhá líne ingearach lena chéile is é toradh a bhfánaí ná -1, i.e.

$$\boldsymbol{m_1 \times m_2 = -1}$$



Sampla 1

Is trí phointe ar an bplána iad A(3, 1), B(2, −3) agus C(−1, k).
Má tá AB ⊥ AC, faigh luach k.

A(3, 1) agus B(2, −3)

$$\text{Fána AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-1}{2-3} = \frac{-4}{-1} = 4$$

A(3, 1) agus C(−1, k)

$$\text{Fána AC} = \frac{k-1}{-1-3} = \frac{k-1}{-4}$$

Má tá AB ⊥ AC, is é −1 toradh a bhfánaí.

$$\Rightarrow \quad 4 \times \frac{k-1}{-4} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4(k-1)}{-4} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4(k-1)}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad k - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad k = 2$$

Cleachtadh 1.1

1. Is trí phointe iad A(−1, 3), B(3, −2) agus C(5, 2).
   Faigh (i) |AB| (ii) |BC| (iii) fána AC (iv) lárphointe [BC].

2. Faigh M, lárphointe na mírlíne ó A(1, −6) go B(−3, 4).
   Anois léirigh go bhfuil |AM| = |MB|.

3. Is é fána na líne ℓ ná $\frac{3}{4}$.
   (i) Scríobh síos fána líne ar bith atá comhthreomhar le ℓ.
   (ii) Scríobh síos fána líne ar bith atá ingearach le ℓ.

4. Is ceithre phointe ar an bplána iad A(2, 3), B(−2, 1), C(−1, −2) agus D(5, 1).
   Léirigh go bhfuil AB comhthreomhar le CD.

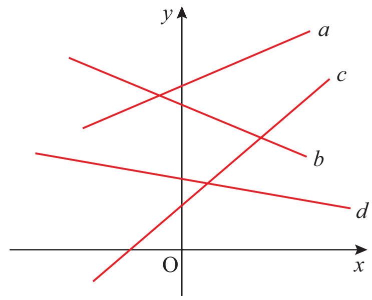
5. Léirigh go bhfuil an líne a ghabhann trí A(−1, 1) agus B(1, 3) ingearach leis an líne a ghabhann trí C(6, 2) agus D(4, 4).

6. Má tá an líne a ghabhann trí (−2, 0) agus (4, 3) comhthreomhar leis an líne a ghabhann trí (1, −1) agus (k, 1), faigh luach k.

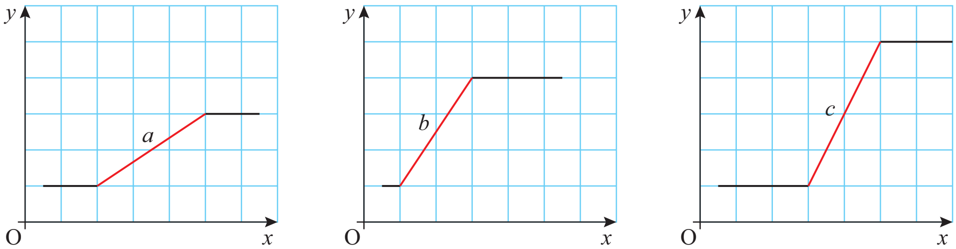
7. Is é 2 an fhána atá leis an líne dhíreach a ghabhann trí na pointí A(−1, 1) agus B(−P, 13).
   Faigh luach P.

8. Is iad comhordanáidí na bpointí A, B agus C ná (−2, 3), (2, 5) agus (4, 1) faoi seach.
   (i) Faigh grádáin na línte AB, BC agus CA.
   (ii) Bunaithe air sin nó ar chaoi éigin eile, léirigh gur triantán dronuilleach é ABC.

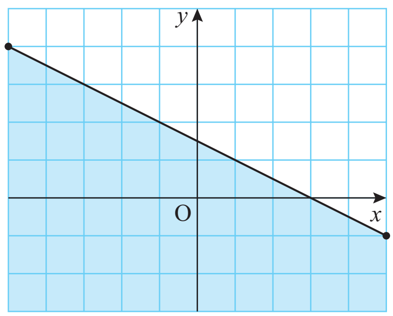
9. Tá na ceithre líne a, b, c agus d le feiceáil sa léaráid.
(i) Cé acu de na línte a bhfuil fánaí deimhneacha leo?
(ii) Cé acu de na línte a bhfuil fánaí diúltacha leo?



10. Tá na trí líne a, b agus c le feiceáil ar na greillí thíos. I gcás gach líne, scríobh síos a fána.



11. Cén fáth a ndéarfá gur fána dhiúltach atá i bhfána na líne ar dheis?
Bain úsáid as an ngreille chun fána na líne a fháil.



12. Is ceithre phointe iad P(a, 4), Q(2, 3), R(3, -1) agus S(-2, 4).
Má tá $|PQ| = |RS|$, faigh na luachanna a d'fhéadfadh a bheith ar a.

13. Is trí phointe iad P(5, 6), Q(k, 2) agus R(9, -1) sa chaoi go bhfuil PQ ingearach le QR.
Faigh an dá luach atá ar k.

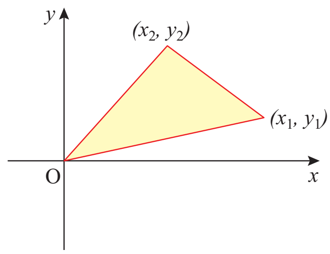
14. Is iad na pointí A(-1, -2), B(7, 2) agus C(k, 4), na reanna ar thriantán ABC, áit ar tairiseach é k. Is dronuillinn í an uillinn ABC.
(i) Faigh fána AB.
(ii) Faigh fána BC agus, bunaithe air sin, faigh luach k.
(iii) Léirigh gur féidir fad [AB] a scríobh san fhoirm $p\sqrt{5}$, nuair is slánuimhir atá le fáil í p.
(iv) Ag cur san áireamh gurb ionann achar triantáin agus leath an bhoinn méadaithe faoin airde ingearach, faigh achar beacht $\triangle$ABC.

15. Is iad P(-2, 2), Q(q, 0) agus R(5, 3) na reanna ar thriantán.
(i) Tá an slios PQ dhá oiread chomh fada leis an slios QR. Faigh na luachanna a d'fhéadfadh a bheith ar q.
(ii) Léirigh gur triantán dronuilleach é PQR nuair atá $q = 4$.

Mír 1.2 Achar triantáin

Is é achar an triantáin a bhfuil na reanna $(0, 0)$, (x_1, y_1) agus (x_2, y_2) air:

$$\text{Achar} = \tfrac{1}{2}\,|x_1 y_2 - x_2 y_1|$$



Sampla 1

Faigh achar an triantáin a bhfuil na reanna $(0, 0)$, $(-2, 1)$ agus $(3, 4)$ air.

$$\begin{aligned} \text{Achar} &= \tfrac{1}{2}\,|x_1 y_2 - x_2 y_1| \\ &= \tfrac{1}{2}\,|(-2)(4) - (3)(1)| \\ &= \tfrac{1}{2}\,|-8 - 3| \\ &= \tfrac{1}{2}\,|-11| \\ &= 5\tfrac{1}{2} \text{ aonad cearnach} \end{aligned}$$

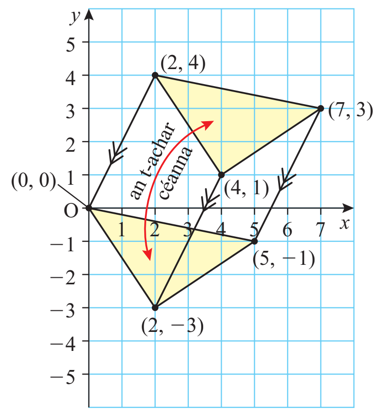
$$(x_1, y_1) \to (-2, 1) \qquad (x_2, y_2) \to (3, 4)$$

Cuireann siombail an mhodail, $|\;|$, in iúl go nglacfaimid le luach deimhneach an fhreagra amháin.

Nóta: Mura bhfuil ceann ar bith de reanna an triantáin ag an mbunphointe, faighimid íomhá an triantáin faoi aistriú sa chaoi gur $(0, 0)$ ceann de na reanna.

Bíodh $(2, 4) \to (0, 0)$
$(7, 3) \to (5, -1)$
$(4, 1) \to (2, -3)$

Bainimid 2 de gach x-luach agus 4 de gach y-luach i gcás gach ceann de na pointí.



Sampla 2

Faigh achar an triantáin a bhfuil na reanna $(1, 5)$, $(-3, 1)$ agus $(3, -5)$ air.

Bíodh $(1, 5) \to (0, 0)$
$(-3, 1) \to (-4, -4)$
$(3, -5) \to (2, -10)$

Bainimid 1 de gach x-luach agus 5 de gach y-luach.

$$\begin{aligned} \text{Achar an triantáin} &= \tfrac{1}{2}\,|x_1 y_2 - x_2 y_1| \\ &= \tfrac{1}{2}\,|(-4)(-10) - (2)(-4)| \\ &= \tfrac{1}{2}\,|40 + 8| \\ &= \tfrac{1}{2}\,|48| \\ &= 24 \text{ aonad cearnach} \end{aligned}$$

$$(x_1, y_1) \to (-4, -4) \qquad (x_2, y_2) \to (2, -10)$$

Nóta: Chun achar ceathairshleasáin a fháil, roinn ina dhá thriantán é.

T&T4.indb 11 10/07/2018 17:45:09

Cleachtadh 1.2

1. Faigh achar an triantáin a bhfuil na reanna seo air:

(i) $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$
(ii) $(0, 0)$, $(5, 1)$, $(3, 6)$
(iii) $(0, 0)$, $(-2, 3)$, $(1, -4)$
(iv) $(0, 0)$, $(3, 4)$, $(-2, -6)$

2. Is iad $A(2, 3)$, $B(-5, 1)$ agus $C(3, 1)$ na reanna ar thriantán.
Bain úsáid as an aistriú $A(2, 3) \rightarrow (0, 0)$, agus faigh íomhánna B agus C de réir an aistrithe sin.
Bunaithe air sin faigh achar an triantáin ABC.

3. I gcás gach ceann de na triantáin seo, aistrigh ceann de na reanna go $(0, 0)$.
Ansin faigh achar an triantáin.

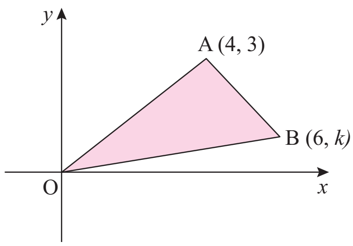
(i) $(2, 3)$, $(5, 1)$ agus $(2, 0)$
(ii) $(-2, 3)$, $(4, 0)$ agus $(1, -4)$

4. Is iad $A(0, 0)$, $B(4, 1)$, $C(2, 3)$ agus $D(2, 4)$ na reanna ar cheathairshleasán. Roinn é ina dhá thriantán, ABC agus ACD, agus, bunaithe air sin, faigh achar an cheathairshleasáin.

5. Is iad $A(0, 0)$, $B(1, 6)$ agus $C(-1, k + 1)$ na reanna ar thriantán.
Más é 7 n-aonad chearnacha achar an triantáin faigh dhá luach le haghaidh k.

6. Is iad $A(4, 1)$, $B(-1, -3)$ agus $C(3, k)$ na reanna ar thriantán.
Más é 12 aonad chearnacha achar an triantáin faigh an dá luach ar k.

7. Faigh luachanna k más é 7 n-aonad chearnacha achar an triantáin ar dheis.



8. Faigh achar an triantáin a bhfuil na reanna $(0, 0)$, $(1, 3)$ agus $(2, 6)$ air.
Cén tátal is féidir a bhaint as do fhreagra?

9. Is é achar an triantáin a bhfuil na reanna $(-2, -1)$, $(1, 2)$ agus $(k, 13)$ air ná 6. Faigh luachanna k.

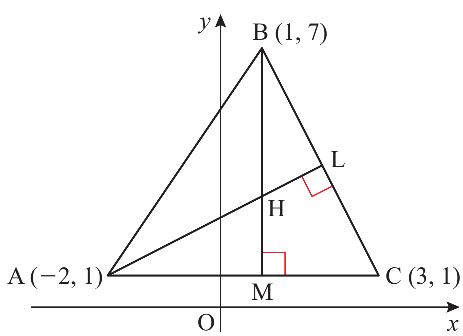
10. Is iad $A(2, 1)$, $B(b, 3)$ agus $C(5, 5)$ comhordanáidí triantáin, áit a bhfuil $b > 3$.
Má tá $|\angle ABC| = 90°$, faigh luach b. Bunaithe air sin faigh achar an triantáin ABC.

11. Is trí phointe chomhlíneacha iad $P(2, -1)$, $Q(8, k)$ agus $R(11, 2)$.
Trí achar an 'triantáin' PQR a fháil, nó ar chaoi éigin eile, faigh luach k.

Bíonn pointí comhlíneacha ar an líne dhíreach chéanna.

12. Triantán a bhfuil na reanna $A(-2, 1)$, $B(1, 7)$ agus $C(3, 1)$ air atá sa léaráid ar dheis.
Is é an pointe L bun an ingir ó A go BC, agus is é M bun an ingir ó B go AC.

(i) Agus [AC] mar bhonn agat, scríobh síos achar $\triangle ABC$.
(ii) Faigh $|BC|$.
(iii) Bain úsáid as do chuid freagraí ar (i) agus (ii) chun fad [AL] a fháil.



Mír 1.3 Cothromóid líne

San fhoirm a leanas is gnách cothromóid líne a thabhairt: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, e.g., $2x + 3y - 12 = 0$.
An fhoirm ghinearálta ar chothromóid líne a thugtar uirthi sin.

De ghnáth, is gá eolas áirithe a bheith againn le cothromóid líne a fháil:
(i) **pointe** ar an líne
(ii) **fána** na líne.

Má tá (x_1, y_1) ina phointe ar an líne, agus más é m an fhána atá léi, tá cothromóid na líne le fáil ach leas a bhaint as $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$.

Más é m fána na líne, agus má tá (x_1, y_1) ina phointe ar an líne, is é cothromóid na líne

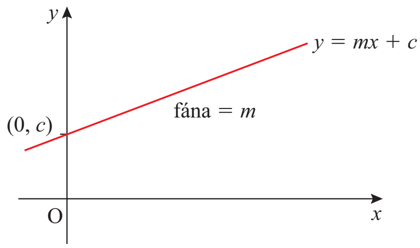
$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

An chothromóid $y = mx + c$

Más san fhoirm $\boldsymbol{y = mx + c}$

atá cothromóid líne, ansin
(i) is é m an fhána
(ii) trasnaíonn an líne an y-ais ag $(0, c)$.

An **y-thrasphointe** a thugtar ar an bpointe $(0, c)$.



Foirm na fána is an trasphointe ar chothromóid na líne a thugtar ar an gcothromóid $\boldsymbol{y = mx + c}$ de ghnáth.

Más san fhoirm $2x + 3y - 7 = 0$ atá cothromóid líne, is san fhoirm $y = mx + c$ a scríobhaimid í.
Is é m an fhána.

Cuir i gcás, má tá $3x - 4y + 3 = 0$, tá

$$-4y = -3x - 3$$

$$\Rightarrow \quad 4y = 3x + 3 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

Nóta: Is é an sainmhíniú ar fhána líne ná tangant na huillinne a dhéanann an líne le treo deimhneach na x-aise.

1. Má tá an uillinn níos lú ná 90°, is fána dheimhneach í an fhána.

2. Más idir 90° agus 180° atá an uillinn, is fána dhiúltach í an fhána.

3. $\tan 45° = 1$; $\tan 135° = -1$

Sampla 1

Faigh cothromóid na líne a ghabhann tríd an bpointe $(-2, 3)$ agus atá ingearach leis an líne $2x - y + 5 = 0$.

Chun fána $2x - y + 5 = 0$ a fháil, scríobhaimid san fhoirm $y = mx + c$ é.

$2x - y + 5 = 0$
$\Rightarrow \quad -y = -2x - 5$
$\Rightarrow \quad y = 2x + 5\ldots$ iolraigh gach téarma faoi -1
$\Rightarrow$ is é 2 an fhána.

Is é fána na líne atá ingearach leis an líne seo ná $-\frac{1}{2}$.

Is é cothromóid na líne trí $(-2, 3)$ a bhfuil fána $-\frac{1}{2}$ léi ná:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (x_1, y_1) = (-2, 3)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2) \qquad m = -\frac{1}{2}$$

$$y - 3 = \frac{-x}{2} - 1$$

$\Rightarrow \quad 2y - 6 = -x - 2 \ldots$ iolraigh gach téarma faoi 2

$\Rightarrow \quad$ Is é $x + 2y - 4 = 0$ an chothromóid.

Fadhbanna níos casta

Is gnách go mbíonn dhá mhír eolais ag teastáil le cothromóid líne (nó línte) a fháil.

Tharlódh sé in amanna nár leor an t-eolas atá tugtha chun pointe ar an líne ná fána na líne a fháil láithreach. Is fearr an cur chuige seo a leanas agus fadhbanna casta á réiteach.

1. Is é an chothromóid le haghaidh líne ar bith tríd an bpointe (3, 4), mar shampla, ná $y - \mathbf{4} = m(x - \mathbf{3})$,
i.e. $mx - y - 3m + 4 = 0$.
Ba cheart go mbeifí in ann luach nó luachanna m a fháil ach mír amháin eile eolais a bheith againn.

2. Is é an chothromóid le haghaidh líne ar bith atá comhthreomhar le $\mathbf{2}x - \mathbf{3}y + 8 = 0$ ná $\mathbf{2}x - \mathbf{3}y + c = 0$.
Is é an chothromóid le haghaidh líne ar bith atá ingearach le $2x - 3y + 8 = 0$ ná $3x + 2y + k = 0$.

Is é cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le $ax + by + c = 0$ ná $ax + by + k = 0$.
Is é cothromóid líne ar bith atá ingearach le $ax + by + c = 0$ ná $bx - ay + k = 0$.

An pointe ag a dtrasnaíonn líne an dá ais

Chun an pointe a fháil ag a dtrasnaíonn líne
(i) an x-ais: bíodh $y = 0$ agus faigh an x-luach
(ii) an y-ais: bíodh $x = 0$ agus faigh an y-luach.

Sampla 2

Faigh luach k má tá na línte $2x + ky + 5 = 0$ agus $(k + 6)x + 2y - 9 = 0$ ingearach lena chéile.

$2x + ky + 5 = 0 \Rightarrow$ an fhána $m_1 = \frac{-2}{k}$

$(k + 6)x + 2y - 9 = 0 \Rightarrow$ an fhána $m_2 = \frac{-(k + 6)}{2}$

Tá na línte ingearach lena chéile, $m_1 \times m_2 = -1$.

$$\Rightarrow \quad \frac{-(k+6)}{2}\left(\frac{-2}{k}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2(k+6)}{2k} = -1$$

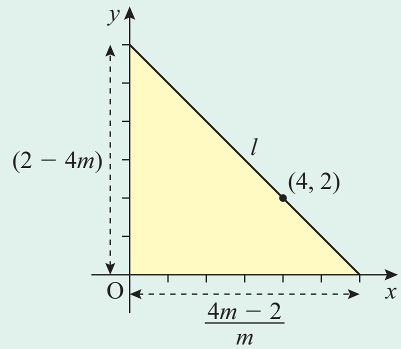
$$\Rightarrow \quad k + 6 = -k$$

$$\Rightarrow \quad 2k = -6$$

$$\Rightarrow \quad k = -3$$

Sampla 3

Faigh cothromóidí na líne l tríd an bpointe (4, 2), sa chaoi gurb ionann agus 25 aonad cearnach achar an triantáin a dhéantar de l agus den x-ais dheimhneach agus den y-ais dheimhneach.



Cothromóid líne ar bith trí (4, 2):

$$y - 2 = m(x - 4)$$

i.e. $mx - y + 2 - 4m = 0$

Trasnaíonn l an x-ais ag $y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4m - 2}{m}$

$x = 0 \Rightarrow y = 2 - 4m$

Achar an $\triangle$ scáthaithe $= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4m - 2}{m}\right)(2 - 4m)$

Achar $= 25 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4m - 2}{m}\right)(2 - 4m) = 25$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (4m - 2)(2 - 4m) &&= 50m\\
&\Rightarrow 8m - 16m^2 - 4 + 8m &&= 50m\\
&\Rightarrow 16m^2 + 34m + 4 &&= 0\\
&\Rightarrow (16m + 2)(m + 2) &&= 0\\
&\Rightarrow m = -\tfrac{1}{8} \text{ nó } m &&= -2
\end{aligned}$$

$\therefore$ is iad seo cothromóidí na líne l:

(i) $y - 2 = -\frac{1}{8}(x - 4)$ nó (ii) $y - 2 = -2(x - 4)$

(i) $\Rightarrow 8y - 16 = -x + 4$
$\Rightarrow x + 8y - 20 = 0$

(ii) $\Rightarrow y - 2 = -2x + 8$
$\Rightarrow 2x + y - 10 = 0$

$\therefore$ is iad $x + 8y - 20 = 0$ agus $2x + y - 10 = 0$ an dá chothromóid.

Nóta: Le deimhniú go bhfuil pointe ar líne áirithe, cuirimid comhordanáidí x agus y isteach i gcothromóid na líne. Má shásaíonn na comhordanáidí an chothromóid, tá an pointe ar an líne.

Mar shampla, tá an pointe $(-3, 2) \in 2x - 4y + 14 = 0$, mar go bhfuil

$$\begin{aligned}
&2(-3) - 4(2) + 14\\
&= -6 - 8 + 14\\
&= 0
\end{aligned}$$

Cleachtadh 1.3

1. Faigh cothromóid an dá líne seo:
(i) An líne trí $(4, -1)$ a bhfuil fána 3 léi (ii) An líne trí $(-5, -2)$ a bhfuil fána -2 léi.

2. Faigh cothromóid na líne a ghabhann trí $(-3, 1)$ a bhfuil fána $\frac{2}{3}$ léi.

3. Is í an líne l an líne $x - 3y + 4 = 0$
(i) Scríobh síos fána l.
(ii) Faigh cothromóid na líne trí $(3, -4)$ atá comhthreomhar le l.

4. Trí phointe ar an bplána iad A(3, -1), B(4, 5) agus C(-2, 1).
Faigh (i) fána AB
(ii) cothromóid na líne a ghabhann trí C atá ingearach le AB.

5. Má tá an líne $2x - 3y + 5 = 0$ ingearach leis an líne $3x + ky - 8 = 0$, faigh luach k.

6. Faigh luach t má tá na línte $3x + 4y = 7$ agus $2y - tx - 6 = 0$ ingearach lena chéile.

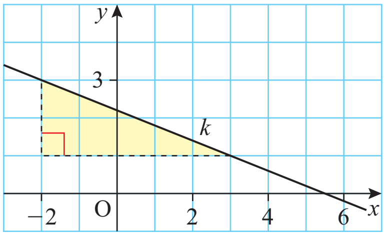
7. Faigh luach k má tá an pointe (3, 1) ar an líne $2x + ky - 8 = 0$.

8. Scríobh síos comhordanáidí na bpointí ag a dtrasnaíonn an líne $x - 3y - 6 = 0$ an x-ais agus an y-ais.

9. Tá na pointí (6, -2) agus (-4, 10) ar an líne h.
Is é $ax + 6y + 12 = 0$ cothromóid na líne k agus tá k ingearach le h.
Faigh an réaduimhir a.

10. Trasnaíonn an líne $2x - 3y + 6 = 0$ an x-ais ag an bpointe C.
(i) Faigh comhordanáidí C.
(ii) Anois faigh cothromóid na líne ar a bhfuil an pointe C agus atá ingearach le $2x - 3y + 6 = 0$.

11. Scríobh síos fána na líne k sa léaráid ar dheis.
Anois faigh cothromóid na líne k san fhoirm $ax + by + c = 0$.



12. Faigh fánaí na bpéirí línte seo a leanas agus, uaidh sin, scríobh síos cé acu atá siad comhthreomhar lena chéile, ingearach lena chéile, nó nach bhfuil siad comhthreomhar ná ingearach lena chéile.

(i)	$y = 3x$	$x = 3y$
(ii)	$2x + y = 1$	$x - 2y = 1$
(iii)	$2x + 3y = 4$	$2y = 3x - 2$
(iv)	$x + 2y - 1 = 0$	$x + 2y + 1 = 0$
(v)	$y = 2x - 1$	$2x - y + 3 = 0$
(vi)	$x + 3y - 2 = 0$	$y = 3x + 2$

13. Bain úsáid as cothromóidí comhuaineacha chun teacht ar phointe trasnaithe na línte $x + 2y = 1$ agus $2x + 3y = 4$.

14. Faigh pointe trasnaithe na línte $x + y = 5$ agus $2x - y = 1$.
Anois faigh cothromóid na líne a bhfuil an pointe trasnaithe seo uirthi agus a bhfuil fána $\frac{2}{3}$ léi.

15. Faigh cothromóid na líne atá comhthreomhar leis an líne $3x - y + 4 = 0$ agus a bhfuil pointe trasnaithe na línte $2x + 3y = 12$ agus $3x - 4y = 1$ uirthi.

16. (i) Deimhnigh go bhfuil (2, 6) ar an líne $x - 2y + 10 = 0$.
(ii) Má tá an pointe (3, 2) ar an líne $2x + ky - 12 = 0$, faigh luach k.

17. Trasnaíonn an líne ℓ_1: $3x - 2y + 7 = 0$ agus an líne ℓ_2: $5x + y + 3 = 0$ a chéile ag an bpointe P.
Faigh cothromóid na líne trí P atá ingearach le ℓ_2.

18. Faigh i dtéarmaí k comhordanáidí na bpointí ag a dtrasnaíonn an líne $3x + 4y = k$ an x-ais agus an y-ais.
Más é 24 aonad cearnach atá sa triantán a shainítear le $3x + 4y = k$, leis an x-ais dheimhneach agus leis an y-ais dheimhneach, faigh luach k.

19. Scríobh síos cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le $2x - 3y + 8 = 0$.
Má tá an pointe $(4, 2)$ ar cheann áirithe de na línte comhthreomhara, faigh cothromóid na líne sin.

20. Scríobh síos cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le ℓ: $4x + y = 6$.
Faigh dá réir sin, cothromóid na líne atá comhthreomhar le ℓ a shaineodh triantán 18 n-aonad chearnacha sa chéad cheathrú.

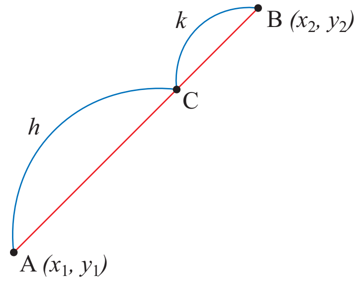
Mír 1.4 Líne a roinnt i gcóimheas ar leith

Roinnt inmheánach

Sa léaráid ar dheis, is sa chóimheas $h : k$ a roinneann an pointe C an mhírlíne [AB].
San fhoirmle seo a thugtar comhordanáidí C:

$$C = \left(\frac{hx_2 + kx_1}{h + k}, \frac{hy_2 + ky_1}{h + k}\right)$$

Roinnteoir inmheánach

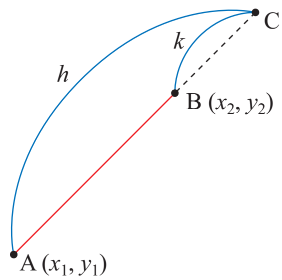


Roinnt sheachtrach

Sa léaráid ar dheis, is sa chóimheas $h : k$ a roinneann an pointe C an mhírlíne [AB] **go seachtrach**.
San fhoirmle seo a thugtar comhordanáidí C:

$$C = \left(\frac{hx_2 - kx_1}{h - k}, \frac{hy_2 - ky_1}{h - k}\right)$$

Roinnteoir seachtrach



Sampla 1

Faigh comhordanáidí an phointe a dhéanann roinnt sa chóimheas 2 : 1 ar an mírlíne A$(-1, 3)$ agus B$(4, -2)$
(i) go hinmheánach (ii) go seachtrach.

$$A(-1, 3) \to (x_1, y_1) \qquad B(4, -2) \to (x_2, y_2) \qquad h : k = 2 : 1$$

(i) Roinnteoir inmheánach

$$= \left(\frac{hx_2 + kx_1}{h + k}, \frac{hy_2 + ky_1}{h + k}\right)$$

$$= \left(\frac{(2)(4) + (1)(-1)}{2 + 1}, \frac{(2)(-2) + (1)(3)}{2 + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

T&T4.indb 17 10/07/2018 17:45:11

(ii) Roinnteoir seachtrach $= \left(\dfrac{hx_2 - kx_1}{h - k}, \dfrac{hy_2 - ky_1}{h - k}\right)$

$= \left(\dfrac{(2)(4) - (1)(-1)}{2 - 1}, \dfrac{(2)(-2) - (1)(3)}{2 - 1}\right)$

$= (9, -7)$

Cleachtadh 1.4

1. Faigh comhordanáidí an phointe a roinneann an mhírlíne trí A$(-3, 4)$ agus B$(5, -4)$ go hinmheánach sa chóimheas $4 : 1$.

2. Faigh comhordanáidí an phointe P a roinneann an mhírlíne trí X$(-5, 8)$ agus Y$(3, -8)$ go hinmheánach sa chóimheas $3 : 1$.

3. Faigh comhordanáidí an phointe a roinneann an mhírlíne trí $(2, -3)$ agus $(4, 6)$ go seachtrach sa chóimheas $5 : 2$.

4. Gabhann mírlíne trí A$(5, 0)$ agus B$(1, -2)$.
Faigh comhordanáidí an phointe a roinneann [AB] sa chóimheas $3 : 2$
(i) go hinmheánach
(ii) go seachtrach.

5. Is iad A$(2, 3)$ agus B$(5, 7)$ na foircinn ar mhírlíne.
Faigh an pointe (x, y) a roinneann [AB] sa chóimheas $3 : 1$
(i) go hinmheánach
(ii) go seachtrach.

6. Má leantar an mhírlíne A$(-2, -1)$ agus B$(3, 4)$ chomh fada le C, beidh $|AC| : |CB| = 4 : 1$.
Faigh comhordanáidí C.

7. Dhá phointe ar an bplána iad A$(2, -3)$ agus B(x, y).
Roineann an pointe P$(6, 1)$ [AB] go hinmheánach sa chóimheas $2 : 1$.
Faigh luach x agus luach y.

8. Sa chóimheas $1 : 3$ a roinneann an pointe P$(-6, y)$ an mhírlíne trí A$(-10, 7)$ agus B$(x, -5)$ go hinmheánach.
Faigh luach x agus luach y.

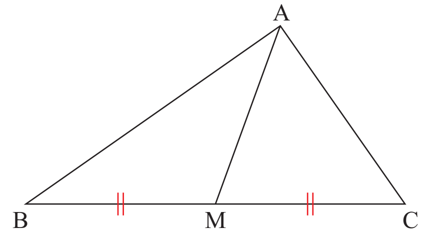
9. Dhá phointe ar an bplána iad A$(x, 0)$ agus B$(0, y)$.
Roinneann an pointe C$(9, -8)$ [AB] go hinmheánach sa chóimheas $4 : 3$.
Faigh luach x agus luach y.

10. Is iad A$(4, -3)$ agus B$(-2, 0)$ na foircinn ar mhírlíne.
Roinneann an pointe P$(2, -2)$ [AB] go hinmheánach sa chóimheas $h : k$.
Faigh an cóimheas $h : k$.

Mír 1.5 Comhchumarachtaí triantáin

An **mheánlíne** a thugtar ar líne a cheanglaíonn rinn triantáin le lárphointe an tsleasa urchomhairigh.

Is meánlíne é [AM] sa triantán ar dheis.



1. An Meánlár

Sa triantán ar dheis léirítear na trí mheánlíne [AE], [BF] agus [CD] agus iad ag trasnú a chéile ag an bpointe G.

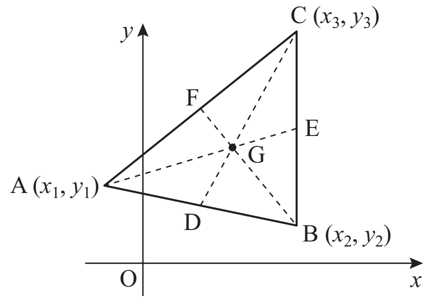
Meánlár an triantáin a thugtar ar G.

Roinneann meánlínte triantáin a chéile sa chóimheas 2 : 1.

Sa triantán ar dheis,

$|AG| : |GE| = 2 : 1$; $|BG| : |GF| = 2 : 1$ agus

$|CG| : |GD| = 2 : 1$.



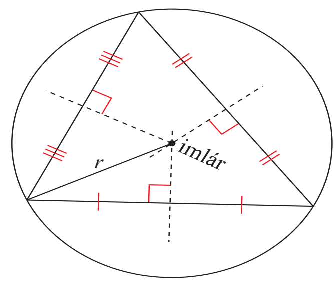
Más iad $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ agus $C(x_3, y_3)$ na reanna ar thriantán áirithe, is iad comhordanáidí an mheánláir, G:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

2. An tImlár

Is ionann imlár triantáin agus an pointe ag a dtrasnaíonn **meáningir** an triantáin sin a chéile (is iad na meáningir déroinnteoirí ingearacha na sleasa).

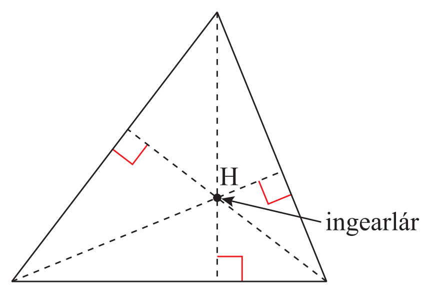
Is ionann an mhírlíne ó rinn triantáin go dtí an t-imlár agus ga an imchiorcail.
Tá r ag freagairt dó sin anseo.



3. An tIngearlár

Is ionann ingearlár triantáin agus an pointe ag a dtrasnaíonn na hingir ó reanna an triantáin go dtí sleasa urchomhaireacha an triantáin a chéile.

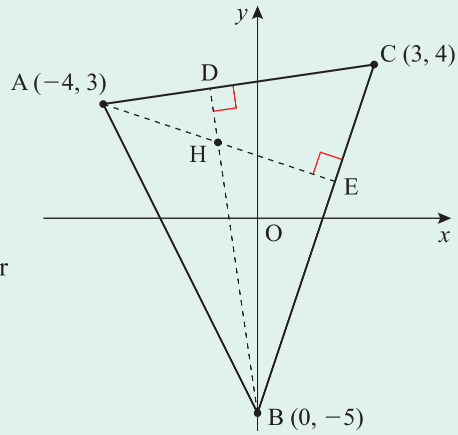
Is é H an t-ingearlár sa triantán ar dheis.



Sampla 1

Is iad A(−4, 3), B(0, −5) agus C(3, 4) na reanna ar thriantán áirithe.
Faigh comhordanáidí na bpointí seo:
(i) meánlár an triantáin (ii) ingearlár an triantáin.

(i) $$\text{Meánlár} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{-4 + 3 + 0}{3}, \frac{3 + 4 + (-5)}{3}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$



(ii) Is é an t-ingearlár pointe trasnaithe na n-ingear ó na reanna go dtí na sleasa urchomhaireacha, mar a léirítear ar dheis.
(Is leor dhá ingear.)

$$\text{Fána BC} = \frac{4+5}{3-0} = \frac{9}{3} = 3$$
$$\Rightarrow \quad \text{fána AE} = -\frac{1}{3}$$

Cothromóid AE: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $(x, y_1) = (-4, 3)$
$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x + 4)$$
$$\Rightarrow \quad 3y - 9 = -x - 4$$
$$\Rightarrow \quad x + 3y - 5 = 0 \ldots ①$$

$$\text{Fána AC: } \frac{4-3}{3+4} = \frac{1}{7}$$
$$\Rightarrow \quad \text{fána BD} = -7$$

Cothromóid BD: $y + 5 = -7(x - 0)$ $B = (0, -5)$
$$\Rightarrow \quad 7x + y + 5 = 0 \ldots ②$$

Réitítear cothromóid ① agus cothromóid ②: $x + 3y = 5 \ldots ①$
$7x + y = -5 \ldots ②$

① $x + 3y = 5$
② × 3: $21x + 3y = -15$
$-20x = 20 \Rightarrow x = -1$ agus $y = 2$

∴ is iad comhordanáidí an ingearláir ná (−1, 2)

Cleachtadh 1.5

1. Faigh comhordanáidí an mheánláir sna triantáin seo
   (i) triantán a bhfuil na reanna (2, −3), (4, 0) agus (−3, 9) air
   (ii) triantán a bhfuil na reanna (1, 3), (6, 2) agus (5, −2) air.

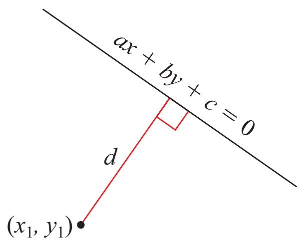
2. Faigh comhordanáidí an imláir i dtriantán a bhfuil na reanna (0, 0), (4, 0) agus (1, 3) air. (Éascófar do chuid oibre má tharraingíonn tú sceitse.)

3. Faigh comhordanáidí an imláir i dtriantán a bhfuil na reanna (8, −2), (6, 2) agus (3, −7) air.
4. Faigh comhordanáidí an ingearláir i dtriantán a bhfuil na reanna A(4, 2), B(−2, 5) agus C(−1, −3) air.
5. Faigh comhordanáidí an ingearláir i dtriantán a bhfuil na reanna O(0, 0), A(4, −2) agus B(4, 4) air.
6. Léirigh gurb é (1, −2) imlár an triantáin a bhfuil na reanna (−2, 2), (−4, −2) agus (5, −5) air.
7. Is iad A(4, 6), B(−2, 7) agus C(k, −4) na reanna ar thriantán.
Más iad (−1, 3), comhordanáidí an mheánláir, faigh luach k.

Mír 1.6 An fad ingearach ó phointe go dtí líne

Faightear an fad ingearach, d, ón bpointe (x_1, y_1) go dtí an líne $ax + by + c = 0$ leis an bhfoirmle:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Sampla 1

(i) Faigh an fad ingearach ón bpointe (1, −4) go dtí an líne $3x - y - 2 = 0$.

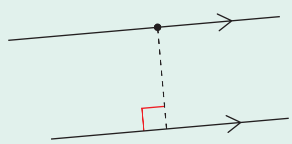
(ii) Faigh an fad idir an dá líne chomhthreomhara $3x - 4y + 12 = 0$ agus $3x - 4y - 1 = 0$.

(i) An fad ingearach $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ldots \left\{ \begin{array}{c} ax + by + c = 3x - y - 2 \\ (x_1, y_1) = (1, -4) \end{array} \right\}$

$$= \frac{|3(1) + (-1)(-4) + (-2)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

(ii) Mar seo a fhaightear an fad idir dhá líne chomhthreomhara: pointe a fháil ar cheann de na línte agus an fad idir an pointe sin agus an líne eile a fháil ansin.
Is pointe é (0, 3) ar an líne $3x - 4y + 12 = 0$.



Is é an fad ingearach ó (0, 3) go dtí $3x - 4y - 1 = 0$ ná:

$$d = \frac{|3(0) + (-4)(3) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-12 - 1|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{|-13|}{5} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Suíomh pointí i dtaca le líne ar leith

Bíonn an comhartha atá ar an bhfad ingearach ó phointe go dtí líne an-úsáideach agus scrúdú á dhéanamh againn ar cé acu ar an taobh céanna de líne nó ar an taobh contrártha di atá pointí áirithe.

1. Bíonn an comhartha céanna ar na hingir le líne ó phointí atá ar an taobh céanna den líne.
2. Bíonn comharthaí éagsúla ar na hingir le líne ó phointí atá ar an dá thaobh chontrártha den líne.

Sampla 2

Fiosraigh an ar an taobh céanna den líne $5x - 4y - 30 = 0$ atá na pointí $(5, -2)$ agus $(3, -3)$.

Is é an fad ingearach ó $(5, -2)$ go dtí an líne $5x - 4y - 30 = 0$ ná:

$$\text{Fad} = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{5(5) + (-4)(-2) - 30}{\sqrt{5^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{25 + 8 - 30}{\sqrt{41}} = \frac{3}{\sqrt{41}} \text{ …deimhneach}$$

Níl na barraí modail $|\,|$ in úsáid anseo mar go bhfuil freagra deimhneach nó diúltach ag teastáil uainn.

Is é an fad ingearach ó $(3, -3)$ go dtí an líne $5x - 4y - 30 = 0$ ná:

$$\text{Fad} = \frac{5(3) + (-4)(-3) - 30}{\sqrt{5^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{15 + 12 - 30}{\sqrt{41}} = \frac{-3}{\sqrt{41}} \text{ …diúltach}$$

Ó tá malairt comharthaí ar na faid ingearacha, ní ar an taobh céanna den líne atá na pointí.

Sampla 3

Faigh comhordanáidí an dá líne atá comhthreomhar leis an líne $3x - 4y - 1 = 0$ agus atá fad 3 aonad uaithi.

Cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le $3x - 4y - 1 = 0$, is san fhoirm $3x - 4y + k = 0$ atá sí. Is pointe é $(0, -\frac{1}{4})$ ar an líne $3x - 4y - 1 = 0$.

Fad 3 aonad atá an pointe $(0, -\frac{1}{4})$ ón líne $3x - 4y + k = 0$.

$$\Rightarrow \frac{|3(0) - 4(-\frac{1}{4}) + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{|1 + k|}{5} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1 + k}{5} = \pm 3 \quad \Rightarrow 1 + k = 15 \text{ nó } 1 + k = -15$$

$$\Rightarrow k = 14 \text{ nó } k = -16$$

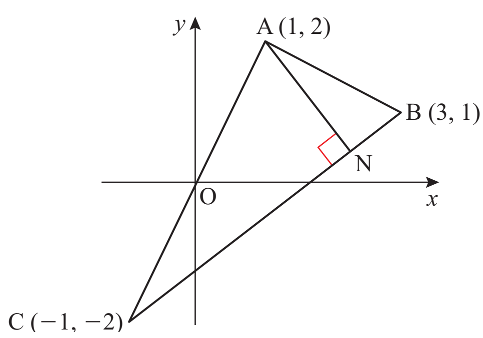
$|x| = 3$
$\Rightarrow x = \pm 3$

Is iad cothromóidí na línte:

$3x - 4y + 14 = 0$ nó $3x - 4y - 16 = 0$.

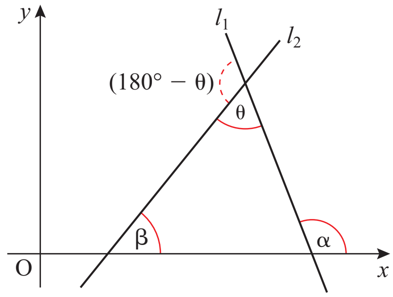
Cleachtadh 1.6

1. Faigh an fad ingearach ó $(2, -4)$ go dtí $3x - 4y - 17 = 0$.
2. Léirigh go bhfuil an pointe $(1, 1)$ ar comhfhad ó na línte $3x + 4y - 12 = 0$ agus $5x - 12y + 20 = 0$.
3. Léirigh gurb é $\sqrt{34}$ an fad ingearach ón bpointe $(6, 2)$ go dtí an líne $5x - 3y + 10 = 0$.
4. Fíoraigh go bhfuil an pointe $(5, -5)$ ar comhfhad ó na línte $x - 2y + 10 = 0$ agus $2x + y - 30 = 0$.
5. Faigh na luachanna ar c más ionann 5 agus an fad ingearach ó $(3, 1)$ go dtí an líne $4x + 3y + c = 0$.
6. Fíoraigh go bhfuil an pointe $(2, 2)$ ar an líne $3x - y - 4 = 0$.
   Faigh, bunaithe air sin, an fad is giorra idir na línte comhthreomhara $3x - y - 4 = 0$ agus $6x - 2y + 7 = 0$.
7. Féach an bhfuil an pointe $(1, 1)$ ar comhfhad ó na línte $x + 7y - 3 = 0$ agus $x - y + 1 = 0$.
8. Faigh na luachanna ar a más ionann $\sqrt{10}$ agus an fad ingearach ón bpointe $(-2, 3)$ go dtí an líne $ax + y - 7 = 0$.
9. Má tá an pointe $(-2, a)$ ar comhfhad ó na línte $4x + 3y - 3 = 0$ agus $12x + 5y - 13 = 0$, faigh luach a, $a \in Z$.
10. Léirigh gur ar an taobh céanna den líne $3x + 2y - 7 = 0$ atá $(-2, 6)$ agus an bunphointe.
11. Léirigh nach ar an taobh céanna den líne $3x + 4y - 36 = 0$ atá na pointí $(3, 4)$ agus $(9, 3)$.
12. An ar an taobh céanna den líne $2x - 3y + 7 = 0$ atá na pointí $(-3, 1)$ agus $(3, -4)$?
13. Scríobh síos cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le $4x + 3y + 1 = 0$.
    Bunaithe air sin faigh cothromóidí an dá líne atá comhthreomhar leis an líne $4x + 3y + 1 = 0$ agus atá fad dhá aonad uaithi.
14. Scríobh síos cothromóid líne ar bith atá ingearach leis an líne $3x - 4y + 5 = 0$.
    Anois faigh cothromóidí an dá líne atá ingearach leis an líne $3x - 4y + 5 = 0$, más 4 aonad an fad ingearach ón bpointe $(1, 1)$ go dtí gach líne díobh.
15. Scríobh síos cothromóid líne ar bith tríd an bpointe $(-4, 2)$.
    Bunait sin faigh cothromóidí an dá líne tríd an bpointe $(-4, 2)$ arbh é 2 aonad a bhfad ingearach ón mbunphointe.
16. 5 aonad ar fad atá an t-ingear ón mbunphointe go dtí líne áirithe.
    Gabhann an líne tríd an bpointe $(3, 5)$.
    Faigh cothromóidí dhá líne den chineál sin.
17. Is iad na pointí $A(1, 2)$, $B(3, 1)$ agus $C(-1, -2)$ na reanna atá ar thriantán.
    (i) Faigh fad an ingir ó A go BC, i.e., faigh $|AN|$.
    (ii) Bunaithe air sin faigh achar an triantáin ABC.



Mír 1.7 An uillinn idir dhá líne

Tá an dá líne l_1 agus l_2 le feiceáil sa léaráid ar dheis.



Bíodh fána $l_1 = m_1$.

$\Rightarrow m_1 = \tan\alpha$

Bíodh fána $l_2 = m_2$.

$\Rightarrow m_2 = \tan\beta$

Is é θ, an uillinn idir na línte:

$$\theta = \alpha - \beta$$

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Is é $(180° - \theta)$ an dara huillinn idir l_1 agus l_2.

$$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$$

$$= -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Ós rud é gur féidir leis an uillinn idir l_1, agus l_2 a bheith ina géaruillinn nó ina maoluillinn, is gnách an uillinn a shainiú mar atá léirithe ar dheis.

$$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Nóta: Is gnách go n-úsáidimid $\tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ chun an ghéaruillinn, θ, idir dhá líne a fháil.

Faightear an mhaoluillinn trí $180° - \theta$ a fháil.

Sampla 1

Faigh an ghéaruillinn idir na línte $y = 2x + 5$ agus $3x + y = 7$.

Más é m_1 fána na líne $y = 2x + 5 \Rightarrow m_1 = 2$

Más é m_2 fána na líne $3x + y = 7 \Rightarrow m_2 = -3$

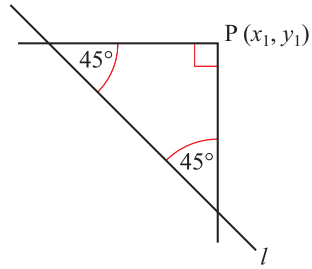
Is é θ an uillinn idir na línte.

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)} = \frac{2 + 3}{1 - 6} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$\tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = 135°$$

$\therefore$ is í an ghéaruillinn: $180° - 135° = 45°$

Fadhbanna níos casta



Fadhb coitianta go leor sa chéimseata chomhordanáideach is ea cothromóidí dhá líne a fháil trí phointe ar leith agus uillinn 45°, mar shampla, á déanamh acu le líne áirithe eile.

Feicimid sa léaráid ar dheis an dá líne trí P a dhéanann uillinn 45° leis an líne l.

Le teacht ar chothromóidí na línte atá uainn, ní mór tosú leis an bhfoirmle:

$$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2},$$

Is é θ an uillinn idir an líne atá uainn agus an líne a thugtar, agus is é m_1 fána na líne a thugtar.

Leis na comharthaí $\pm$ a réitítear an chothromóid, agus is dhá luach ar m_2 a fhaightear.

Sampla 2

Faigh cothromóidí an dá líne tríd an bpointe (2, 3) a dhéanann uillinn 45° leis an líne $x - 2y = 1$.

Seasadh m_1 d'fhána na líne a thugtar, $x - 2y = 1$.

$$\Rightarrow m_1 = \tfrac{1}{2}$$

Seasadh m_2 d'fhána na líne a theastaíonn.

Uillinn 45° atá idir an dá líne.

De réir na foirmle $\tan\theta = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, mar sin

$$\tan 45^\circ = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow\quad 1 = \pm\frac{\frac{1}{2} - m_2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)m_2} \quad\Rightarrow\quad 1 = \pm\frac{1 - 2m_2}{2 + m_2}$$

$$\Rightarrow\quad 2 + m_2 = \pm(1 - 2m_2)$$

$$\Rightarrow\quad 2 + m_2 = 1 - 2m_2 \quad \text{nó} \quad 2 + m_2 = -(1 - 2m_2)$$

$$\Rightarrow\quad 3m_2 = -1 \quad \text{nó} \quad 2 + m_2 = -1 + 2m_2$$

$$\Rightarrow\quad m_2 = -\tfrac{1}{3} \qquad \Rightarrow\quad m_2 = 3$$

Ach an dá luach sin ar an bhfána agus an pointe (2, 3) a úsáid, faightear na cothromóidí:

$\mathbf{m_2 = -\frac{1}{3}}$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = -\tfrac{1}{3}(x - 2)$$
$$3y - 9 = -x + 2$$
i.e. $x + 3y - 11 = 0$

$\mathbf{m_2 = 3}$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = 3(x - 2)$$
i.e $3x - y - 3 = 0$

$\therefore$ is iad $x + 3y - 11 = 0$ agus $3x - y - 3 = 0$ na línte atá uainn.

Cleachtadh 1.7

1. Faigh tangant na géaruillinne idir gach ceann de na péirí línte seo a leanas:
   (i) $x + 2y + 4 = 0$ agus $x - 3y + 2 = 0$
   (ii) $2x + 3y - 1 = 0$ agus $x - 2y + 3 = 0$
   (iii) $2x + y - 6 = 0$ agus $2x - 3y + 5 = 0$.

2. Faigh an ghéaruillinn idir na línte $y = 2x + 5$ agus $3x + y = 7$.

3. Faigh an mhaoluillinn idir na línte $x - 2y - 1 = 0$ agus $3x - y + 2 = 0$.

4. Faigh, ceart go dtí an chéim is gaire, an uillinn is lú idir na línte $x - 3y + 4 = 0$ agus $2x + y - 5 = 0$.

5. Faigh méid na maoluillinne idir na línte $x - 2y + 7 = 0$ agus $3x - y + 2 = 0$.

6. Faigh méid na géaruillinne idir na línte $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ agus $\sqrt{3}x - y - 7 = 0$.

7. Faigh fánaí na línte a dhéanann uillinn 45° leis an líne $2x - 3y + 1 = 0$.

8. Faigh cothromóidí an dá líne tríd an mbunphointe a dhéanann uillinn 45° leis an líne $2x + 3y - 4 = 0$.

9. Faigh cothromóidí an dá líne tríd an bpointe $(-1, 1)$ a dhéanann uillinn 45° leis an líne $2x + y - 2 = 0$.

10. Faigh cothromóidí an dá líne tríd an bpointe $(4, 2)$ a dhéanann uillinn $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ leis an líne $x + y - 2 = 0$.

11. Faigh cothromóid na líne a ndéanann an x-ais déroinnt ar an uillinn atá idir í agus an líne $2x - 3y - 6 = 0$.

12. Is é ℓ an líne $tx + y - 7 = 0$.
    (i) Scríobh síos fána ℓ.
    (ii) Más uillinn 45° atá idir ℓ agus an líne $y = 2x + 5$, faigh dhá luach fhéideartha ar t.

Mír 1.8 Gaolmhaireacht líneach a úsáid chun fadhbanna a réiteach

Sa mhír seo léireoimid an tábhacht a bhaineann leis an líne dhíreach nuair a bhíonn an gaol idir dhá athróg á bhreacadh ar ghraf. I dturgnaimh eolaíochta, nuair a léirítear an gaol idir dhá thacar sonraí ar ghraf, is minic a bhíonn na pointí ar líne dhíreach, nó an-ghar dá leithéid.

An **líne is fearr oiriúint** a thugtar ar an líne sin de ghnáth.
Déanfaimid tuilleadh staidéir ar an líne sin i gcuid eile den chúrsa.

Sa mhír seo ní bheimid ach ag plé le graif dhronlíneacha (graif ar a bhfuil líne dhíreach) agus léireoimid cé chomh húsáideach agus a bhíonn siad i gcúrsaí eolaíochta agus gnó.

Sampla 1

10 cm ar fad a bhíonn lingeán nuair nach bhfuil sé sínte. Nuair a chrochtar é agus ualach 80 g ceangailte de, is é an fad sínte ná 28 cm. Ag glacadh leis go bhfuil síneadh an lingeáin i gcomhréir leis an ualach,

(i) tarraing graf den síneadh E i gcoinne an ualaigh L.
(Cuir an t-ualach, L, ar an ais chothrománach.)

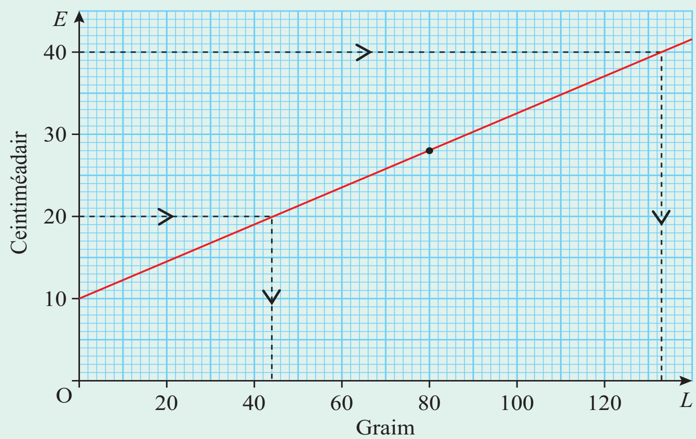
(ii) faigh cothromóid na líne atá tarraingthe agat i dtéarmaí L agus E.

(iii) bain úsáid as do ghraf le teacht ar an ualach a theastódh chun an lingeán a shíneadh go dtí fad 20 cm.

Baineann an lingeán áirithe seo a theorainn leaisteach amach nuair a shíntear é go dtí ceithre oiread a bhunfhaid. (Ciallaíonn sé sin nach bhfillfidh sé ar a bhunfhad má shíntear níos mó ná sin é.)

iv) Faigh an t-ualach a theastódh le go dtarlódh sé sin.

(i) Dhá phointe ar an líne iad (0, 10) agus (80, 28).



(ii) Tá na pointí (0, 10) agus (80, 28) ar an líne.

Fána $= \dfrac{28-10}{80-0} = \dfrac{18}{80} = \dfrac{9}{40}$

Cothromóid na líne: $y - y_1 \quad = m(x - x_1)$

$$E - 10 = \frac{9}{40}(L - 0)$$

Anseo cuirtear L in ionad x agus cuirtear E in ionad y.

$\Rightarrow \quad 40E - 400 = 9L$

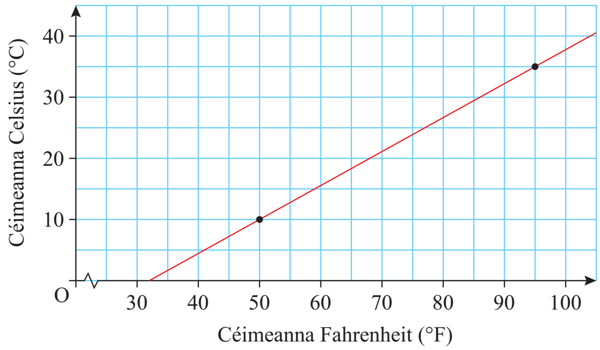
$\Rightarrow \quad 9L - 40E + 400 = 0$ an chothromóid atá uainn

(iii) Ón ngraf feicimid go dteastaíonn ualach 44 gram chun an lingeán a shíneadh go dtí fad 20 cm.

(iv) Ualach 133 gram a theastaíonn chun an teorainn leaisteach 40 cm a bhaint amach.

Cleachtadh 1.8

1. Léiríonn an graf líneach thíos an gaol idir céimeanna Celsius agus céimeanna Fahrenheit.



(i) Bain úsáid as an ngraf chun na coinbhéartuithe a leanas a dhéanamh (garmheastacháin):
(a) 35°C go Fahrenheit
(b) 15°C go Fahrenheit
(c) 50°F go Celsius
(d) 100°F go Celsius.

(ii) Bain úsáid as an dá phointe atá marcáilte ar an ngraf chun cothromóid na líne a fháil san fhoirm $ax + by + c = 0$.

(iii) Bain úsáid as an gcothromóid chun 95°C a choinbhéartú go céimeanna Fahrenheit.

2. Bunaíonn fear glanta cairpéad a tháille €C ar an bhfoirmle $C =$ €$(20 + 4M)$, áit arb é M líon na méadar cearnach de chairpéid a ghlantar.
Tarraing graf dronlíneach den ghaolmhaireacht seo, ag breacadh M ar an ais chothrománach le haghaidh $0 \leqslant M \leqslant 80$. Bain úsáid as do ghraf chun iad seo a leanas a fháil:

(i) an costas ar 75 m^2 de chairpéad a ghlanadh
(ii) an méid méadar cearnacha de chairpéad is féidir a ghlanadh ar €200.

Agus leas á bhaint agat as an bhfoirmle, faigh
(iii) an costas ar 105 m^2 de chairpéad a ghlanadh.

3. Infheistítear suim €5000 agus íoctar ús simplí ag ráta 8%.

(i) Ríomh an t-ús a fhaightear tar éis 1, 2 agus 3 bliana, agus, bunaithe air sin, tarraing sceitse de ghraf an úis (U) i gcoinne an ama (A). Bíodh an t-am ar an ais chothrománach agat.

(ii) Faigh cothromóid na líne atá tarraingthe agat, agus na hathróga U agus A á n-úsáid agat, áit a bhfuil $U =$ ús agus $A =$ am.

(iii) Bain úsáid as an gcothromóid le teacht ar an bhfad ama a chaithfear an t-airgead a infheistiú chun ús iomlán de €3500 a ghnóthú.

Tá méid na hinfheistíochta tar éis tréimhse ama le fáil ach an t-ús a shuimiú leis an tsuim atá infheistithe.

(iv) Faigh an chothromóid líneach le haghaidh mhéid na hinfheistíochta i gcoinne an ama, ag baint leas as na hathróga M agus A.

4. Tá gnólacht in ann 100 seaicéad a dhéanamh in aghaidh an lae, ach ní féidir leis iad sin ar fad a dhíol ach sa chás nach ngearrtar níos mó ná €60 in aghaidh an tseaicéid. Os a choinne sin, ní féidir ach 50 seaicéad sa lá a dhíol ag an bpraghas atá ar sheaicéad faoi láthair, €100. Ag glacadh leis gur líne dhíreach é an graf den phraghas, P, i gcoinne líon na seaicéad a dhíoltar in aghaidh an lae,

(i) tarraing graf, ag cur líon na seaicéad a dhíoltar in aghaidh an lae ar an ais cheartingearach
(ii) faigh cothromóid na líne atá tarraingthe agat, agus na hathróga P agus L á n-úsáid agat.

Bain úsáid as an gcothromóid chun iad seo a fháil:

(iii) an praghas ar a bhféadfaí 88 seaicéad in aghaidh an lae a dhíol

(iv) líon na seaicéad ba chóir a dhéanamh dá mbeidís le díol ar €72 an ceann.

5. Tá dhá ghnólacht tacsaithe in iomaíocht le chéile. Tá na struchtúir seo a leanas acu maidir le táillí:

Gnólacht A: táille sheasta €5 móide €2 in aghaidh an chiliméadair

Gnólacht B: gan aon táille sheasta agus €2.20 in aghaidh an chiliméadair

(i) Sceitseáil an graf de phraghas (ais cheartingearach) i gcoinne an fhaid a taistealaíodh (ais chothrománach) don dá ghnólacht (ar na haiseanna céanna).

(ii) Faigh cothromóid an dá líne, agus úsáid á baint as P le haghaidh praghais agus F le haghaidh an fhaid a taistealaíodh.

(iii) Úsáid do ghraf le fáil amach cad é an fad ar a ngearrann an dá ghnólacht an táille chéanna.

(iv) Cé acu gnólacht a d'úsáidfeá dá mbeadh turas 12 km le déanamh agat?

6. Nuair a thagann athrú ar phraghas margaidh €p earra a dhíoltar ar shaormhargadh, tagann athrú freisin ar an éileamh ar an earra, D, agus ar an líon den earra a sholáthraítear, S.
I mí áirithe, $D = 20 + 0.2p$ agus $S = -12 + p$.

(i) Sceitseáil an dá líne sin ar an ngraf céanna.

Tá cothromaíocht sa mhargadh nuair is ionann an t-éileamh agus an soláthar.

(ii) Faigh an praghas cothromaíochta agus an líon a cheannaítear agus a dhíoltar nuair a bhíonn an margadh i gcothromaíocht.

Cuir triail ort féin 1

Ceisteanna A

1. Is é $3x - 2y + 6 = 0$ cothromóid na líne ℓ.
Faigh cothromóid na líne atá ingearach le ℓ ar a bhfuil an pointe $(-1, 4)$.

2. Faigh achar an triantáin a bhfuil na reanna $(0, 0)$, $(3, -2)$ agus $(-2, 4)$ air.

3. Tá na pointí $(3, -2)$ agus $(1, 6)$ ar an líne ℓ.
Má tá an líne $2x + ay + 7 = 0$ ingearach le ℓ faigh luach a.

4. $\frac{1}{3}$ an fhána atá leis an líne trí na pointí $(6, a)$ agus $(-3, 6)$.
Cad é luach a?

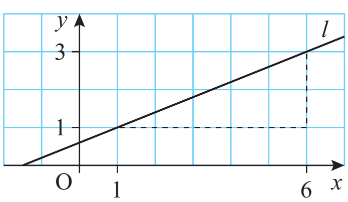
5. Trasnaíonn an líne $y = \frac{3}{2}x - 2$ an x-ais ag an bpointe P agus an y-ais ag an bpointe Q.

(i) Scríobh síos fána na líne.

(ii) Faigh comhordanáidí P agus Q.

(iii) Ríomh achar an triantáin OPQ, más é O an bunphointe.

6. Scríobh síos fána na líne ar dheis, l.
Bunaithe air sin faigh cothromóid l.



7. Línte díreacha atá ingearach lena chéile iad $y = k^2x + 12$ agus $2ky = 4x + 5$, $k \;\; 0$.
(i) Faigh luach k.
(ii) Faigh pointe trasnaithe an dá líne.

8. Faigh amach cé acu de na péirí línte seo a leanas atá ingearach lena chéile:
(a) $2x + y = 3$ agus $x - 2y + 4 = 0$
(b) $y = 3x + 2$ agus $x + 3y - 2 = 0$
(c) $y + 2x + 1 = 0$ agus $x = 2y - 4$
(d) $x + 3y = 6$ agus $3x + y + 2 = 0$

9. Faigh cothromóid na líne tríd an bpointe (5, 2) atá ingearach leis an líne $x + 2y - 3 = 0$.

10. Déroinnteoir ingearach na líne trí na pointí (1, 2) agus (5, 4) buaileann sé leis an y-ais ag an bpointe $(0, k)$.
Faigh k.

Ceisteanna B

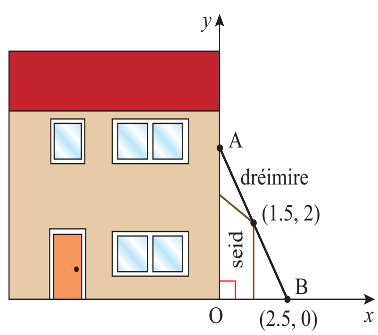
1. (i) Ríomh an fad ingearach ón bpointe $(-1, -5)$ go dtí an líne $3x - 4y - 2 = 0$.
(ii) An fad céanna atá an pointe $(-1, -5)$ ó na línte $3x - 4y - 2 = 0$ agus $3x - 4y + k = 0$, $k \;\; -2$. Faigh luach k.

2. (i) Dhá phointe iad A$(-7, 3)$ agus B$(8, -2)$.
Sa chóimheas 2 : 3 a dhéanann pointe áirithe [AB] a roinnt. Faigh comhordanáidí an phointe sin.
(ii) Is é ℓ an líne $2x + ky = 6$.
(a) Faigh, i dtéarmaí k, na pointí ag a dtrasnaíonn ℓ an x-ais agus an y-ais.
(b) Más é k aonad cearnach achar an triantáin a dhéantar le ℓ, leis an x-ais agus leis an y-ais, faigh luach k.

3. (i) Faigh cothromóid na líne atá comhthreomhar leis an líne $2x + y = 5$ agus a ghabhann tríd an bpointe (2, 5).
(ii) (a) Faigh cothromóid na líne ℓ atá ingearach leis an líne $2x + y = 5$ agus a ghabhann tríd an bpointe $(1, k)$, áit ar tairiseach é k.
(b) Bunaithe air sin faigh an luach ar k má ghabhann an líne ℓ tríd an mbunphointe.

4. Is iad A(4, 2), B$(-1, 7)$ agus C(h, k) na reanna ar thriantán.
Más iad (2, 4) comhordanáidí mheánlár an triantáin ABC, faigh luachanna h agus k.

5. Chun an fhuinneog thuas staighre ar thaobh tí a ghlanadh, ní mór an dréimire a shocrú sa chaoi is nach dteagmhaíonn sé ach le himeall na seide, mar atá le feiceáil sa léaráid. Seasann na comhordanáidí do na faid ó O ina méadair, sna treonna x agus y, mar atá léirithe.
(i) Faigh cothromóid líne an dréimire.
(ii) Faigh airde an phointe A a bhfuil barr an dréimire leagtha ina choinne
(iii) Faigh fad an dréimire, ceart go dtí an ceintiméadar is gaire.



6. Faigh comhordanáidí an ingearláir i dtriantán a bhfuil na reanna $(1, 8)$, $(1, -2)$ agus $(7, 1)$ air.

7. Gabhann an líne k tríd an bpointe $(-4, 6)$ agus tá fána m léi, áit a bhfuil $m > 0$.
(i) Scríobh síos cothromóid k i dtéarmaí m.
(ii) Faigh, i dtéarmaí m, comhordanáidí na bpointí ag a dtrasnaíonn k na haiseanna.
(iii) Is é 54 aonad cearnach achar an triantáin a dhéantar le k, leis an x-ais agus leis an y-ais. Faigh na luachanna féideartha ar m.

8. (i) Faigh luach k más ionann 6 aonad agus an fad ón bpointe $(3, k)$ go dtí an líne $3x - 4y + 7 = 0$ agus má tá $k < 0$.
(ii) Bain úsáid as an luach sin ar k chun cothromóid na líne a ghabhann trí $(3, k)$ atá comhthreomhar leis an líne $3x - 4y + 7 = 0$ a fháil.

9. Tá an pointe $(2, 5)$ ar an líne ℓ agus tá fána m léi.
(i) Faigh cothromóid ℓ i dtéarmaí m.
(ii) Faigh, i dtéarmaí m, comhordanáidí na bpointí ag a dtrasnaíonn ℓ an x-ais agus an y-ais.
(iii) Faigh luachanna m más é 36 aonad cearnach achar an triantáin a dhéantar le ℓ, leis an x-ais dheimhneach agus an y-ais dheimhneach.

10. Is dronuilleog é ABCD, áit arb iad A, B agus C na pointí $(3, 4)$, $(1, k)$ agus $(4, -3)$ faoi seach.
(i) Faigh grádán na líne AB. Tabhair do fhreagra i dtéarmaí k.
(ii) Faigh an dá luach fhéideartha ar k.
(iii) Faigh achar na dronuilleoige ABCD sa chás go bhfuil k deimhneach.

Ceisteanna C

1. (i) Tá fána dheimhneach leis an líne k agus gabhann sí tríd an bpointe P $(2, -9)$. Trasnaíonn k an x-ais ag Q agus an y-ais ag R agus $|PQ| : |PR| = 3 : 1$. Faigh comhordanáidí Q agus comhordanáidí R.
(ii) Trasnaíonn an líne $3x + 2y = c$ an x-ais ag P agus an y-ais ag Q. Más é 24 aonad cearnach achar an triantáin OPQ, faigh luachanna c.

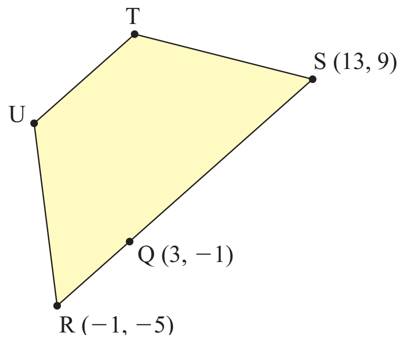
2. Faigh cothromóidí an dá líne atá comhthreomhar le $4x - 3y + 8 = 0$ más ionann 4 agus an fad ingearach ón mbunphointe go dtí an dá líne.

3. Is iad $(0, -9)$, $(-3, 6)$ agus $(8, 3)$ na reanna ar thriantán.
(i) Faigh comhordanáidí imlár an triantáin.
(ii) Faigh fad gha an imchiorcail.
(iii) Faigh achar an chiorcail i dtéarmaí π.

4. Tá O, an bunphointe, ina rinn sa chomhthreomharán OABC, agus is ionann B agus an pointe $(2, 3)$. Is é $x = 4y$ cothromóid OA agus is ionann fána OC agus -1.
(i) Tarraing sceitse garbh den chomhthreomharán agus ansin faigh cothromóid BC.
(ii) Faigh comhordanáidí na bpointí A agus C.

5. Faigh cothromóidí na línte tríd an bpointe $(2, 4)$ a dhéanann uillinn 45° leis an líne $x - 2y - 6 = 0$.

6. Is ceathairshleasán é RSTU áit a bhfuil R = $(-1, -5)$ agus S = $(13, 9)$.
Tá Q$(3, -1)$ ar an líne RS.



(i) Is iad $(-2k, 3k)$, comhordanáidí U, áit a bhfuil $k \in R$ agus $k > 0$.
28 aonad cearnach atá in achar an triantáin RQU.
Faigh luach k.

(ii) $-\frac{3}{11}$ an fhána atá le TS, agus tá SR comhthreomhar le TU.
Faigh comhordanáidí T.

7. Nuair is é 7% an ráta úis i gcomhair taiscí, meallann comhar creidmheasa coigilteas de €35 milliún.
Nuair a ardaítear an ráta go dtí 8.5%, tagann méadú €2 mhilliún ar an gcoigilteas.
Ag glacadh leis gur líne dhíreach é an graf de choigilteas i gcoinne rátaí úis i gcás rátaí úis idir 5% agus 12%,

(i) tarraing sceitse den ghraf de choigilteas (€ milliún) i gcoinne rátaí úis (%) san eatramh seo, agus na rátaí úis ar an ais chothrománach

(ii) faigh cothromóid na líne.

Bain úsáid as an gcothromóid atá faighte agat chun

(iii) luach an choigiltis a mheallann ráta 11.5% a fháil

(iv) teacht ar an ráta úis a theastaíonn chun coigilteas de €40 milliún a mhealladh.

8. Tá an pointe $(2, -4)$ ar líne a bhfuil fána m léi, áit a bhfuil $m \neq 0$.
Trasnaíonn an líne an x-ais ag $(x_1, 0)$ agus an y-ais ag $(0, y_1)$.
Má tá $x_1 + y_1 = -4$, faigh na fánaí leis an dá líne a shásaíonn an coinníoll sin.
Bunaithe air sin faigh tangant na géaruillinne atá idir an dá líne sin.

9. Is ionann ℓ agus an líne $4x + 3y - 5 = 0$.

(i) Fíoraigh go bhfuil $(2, -1) \in \ell$.

(ii) Scríobh síos cothromóid líne ar bith atá comhthreomhar le ℓ.

(iii) Faigh, bunaithe air sin, cothromóidí an dá líne atá comhthreomhar le ℓ agus 2 aonad uaithi.

10. Is ionann ℓ agus an líne $tx + (t + 2)y - 11 = 0$, agus tá $t \in R$.

(i) Scríobh síos fána ℓ i dtéarmaí t.

(ii) Más uillinn 45° atá idir an líne ℓ agus an líne $x - 2y - 1 = 0$, faigh an dá luach fhéideartha ar t.

Achoimre ar na Príomhphointí

Le haghaidh aon dá phointe A(x_1, y_1) agus B(x_2, y_2):

1. Fad [AB] $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. Lárphointe [AB] $= \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

3. Fána, *m*, AB: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

4. Achar triantáin

Tá achar triantáin a bhfuil na reanna (0, 0), (x_1, y_1) agus (x_2, y_2) air le fáil leis an bhfoirmle:

$\text{Achar} = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

5. Má tá fána m_1 le líne amháin agus fána m_2 le líne eile agus más é θ an uillinn eatarthu,

$\tan\theta = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$.

6. Tá an fad ingearach ón bpointe (x_1, y_1) go dtí an líne $ax + by + c = 0$ le fáil leis an bhfoirmle a leanas:

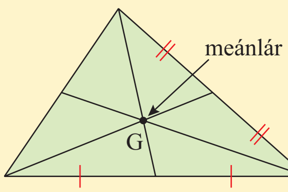
$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

7. Is é an pointe a roinneann an mhírlíne idir (x_1, y_1) agus (x_2, y_2) sa chóimheas $h : k$ ná

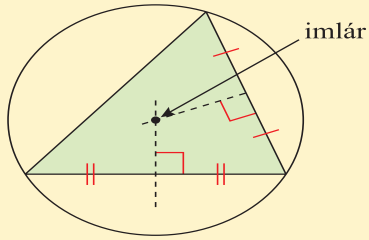
Go hinmheánach: $\left(\dfrac{hx_2 + kx_1}{h + k}, \dfrac{hy_2 + ky_1}{h + k}\right)$ **Go seachtrach:** $\left(\dfrac{hx_2 - kx_1}{h - k}, \dfrac{hy_2 - ky_1}{h - k}\right)$

8. Is ionann **meánlár** triantáin agus pointe trasnaithe na meánlínte.

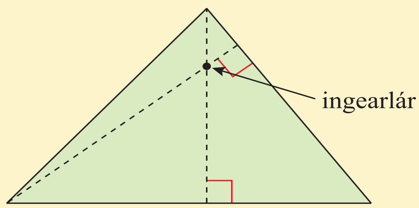
$G = \left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$



9. Is ionann **imlár** triantáin agus pointe trasnaithe dhéroinnteoirí ingearacha na sleasa.



10. Is ionann **ingearlár** triantáin agus pointe trasnaithe na n-ingear ó na reanna go dtí na sleasa urchomhaireacha.



T&T4.indb 33 10/07/2018 17:45:15

caibidil 2

An Triantánacht 1

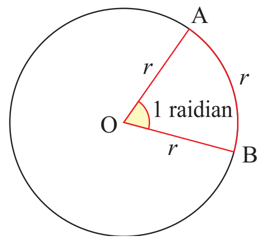
Focail thábhachtacha

tomhas ina raidiain stua teascóg feidhm thriantánachta
ciorcal an aonaid ceathrú riail an tsínis riail an chomhshínis tríthoiseach
uillinn airde uillinn ísle peiriad raon peiriadach asamtóit réiteach ginearálta

Mír 2.1 Tomhas ina raidiain

I do chuid staidéir ar an gcéimseata agus ar an triantánacht go dtí seo is le huillinneacha a bhí tomhaiste ina gcéimeanna a bhí tú ag obair. Is ionann imrothlú amháin agus 360°. Beagnach i gcónaí san ardtriantánacht agus sa chalcalas, áfach, is ina raidiain a thomhaistear na huillinneacha.

Sa léaráid ar dheis léirítear an stua AB agus é ar comhfhad leis an nga, r.



Deirtear gurb é tomhas ∠AOB ná 1 raidian amháin.

Dá mba rud é gurbh ionann $2r$ agus fad an stua AB, 2 raidiain a bheadh in $|\angle AOB|$.

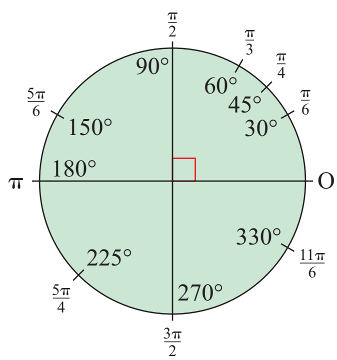
Raidian Is ionann raidian agus méid na huillinne ag lárphointe ciorcail atá á iompar ag stua atá ar comhfhad leis an nga.

Is ionann imlíne gach ciorcail agus $2\pi r$, i.e. 2π a iolrú faoin nga, agus ciallaíonn sé sin gur 2π raidian a bhíonn in imrothlú iomlán amháin.

$$\Rightarrow \quad 2\pi \text{ raidian} = 360°$$
$$\Rightarrow \quad \pi \text{ raidian} = 180°$$

Is minic a bhaintear leas as na huillinneacha seo atá tugtha ina gcéimeanna agus ina raidiain sa bhosca thíos:

Céimeanna	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Raidian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

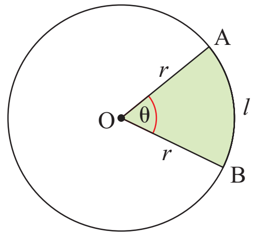


Ó tá π raidian $= 180°$ $\Rightarrow$ 1 raidian $= \dfrac{180°}{\pi} = 57.3°$

T&T4.indb 34 10/07/2018 17:45:16

Fad stua – Achar teascóige

Más ionann l agus fad stua ciorcail dar ga r, tugtar θ, an uillinn ag lárphointe an chiorcail, mar seo a leanas.



$$\theta \text{ raidian } = \frac{l}{r}$$
$$\Rightarrow \quad l = r\theta$$

Chomh maith leis sin, ós é achar an chiorcail πr^2, is é achar na teascóige AOB

$$\text{Achar} = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Achar} = \frac{\theta r^2}{2} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Fad stua $l = r\theta$
Achar teascóige $= \frac{1}{2} r^2 \theta$

Sampla 1

Scríobh (i) $\frac{2\pi}{5}$ raidian ina gcéimeanna
(ii) 210° ina raidiain.

(i) $\frac{2\pi}{5}$ raidian $= \frac{2 \times 180°}{5} = \frac{360°}{5} = 72°$

(ii) 210° a iompú ina raidiain

$$180° = \pi \text{ raidian}$$
$$\Rightarrow \quad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ raidian}$$
$$\Rightarrow \quad 210° = \frac{\pi}{180} \times \frac{210}{1} \text{ raidian} = \frac{21\pi}{18}$$
$$= \frac{7\pi}{6} \text{ raidian}$$

Sampla 2

Faigh iad seo i gcás ciorcail dar ga 8 cm

(i) an uillinn ag lárphointe an chiorcail atá á hiompar ag stua 10 cm ar fad

(ii) fad an stua más é $\frac{\pi}{4}$ an uillinn ag lárphointe an chiorcail atá á hiompar ag an stua sin.

(i) Fad an stua $l = r\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{l}{r} = \frac{10}{8} \quad \Rightarrow \quad \theta = 1\frac{1}{4}$ raidian.

(ii) Fad an stua $= r\theta$

$$= 8 \times \frac{\pi}{4}$$
$$= 2\pi \text{ cm}$$

Cleachtadh 2.1

1. Scríobh na huillinneacha seo a leanas ina raidiain, agus tabhair do fhreagraí i dtéarmaí π:
(i) 30° (ii) 45° (iii) 150° (iv) 135° (v) 36° (vi) 240° (vii) 390°

T&T4.indb 35 10/07/2018 17:45:16

2. Scríobh gach ceann de na huillinneacha seo a leanas ina gcéimeanna:

(i) π (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{5\pi}{6}$ (v) $\frac{4\pi}{9}$ (vi) $\frac{11\pi}{6}$ (vii) $\frac{5\pi}{12}$

3. I gcás ciorcail dar ga 4 cm, faigh faid na stuanna atá ag iompar na n-uillinneacha seo ag lárphointe an chiorcail:

(i) 2 raidian (ii) 4 raidian (iii) $2\frac{1}{2}$ raidian (iv) $\frac{5}{4}$ raidian

4. I gcás ciorcail dar ga 6 cm, faigh, ina raidiain, méid na n-uillinneacha ag lárphointe an chiorcail atá á n-iompar ag na stuanna de na faid seo:

(i) 6 cm (ii) 12 cm (iii) 3 cm (iv) 9 cm (v) $7\frac{1}{2}$ cm

5. Uillinn 2 raidian atá ag lárphointe ciorcail agus í á hiompar ag stua 15 cm ar fad. Faigh fad an gha.

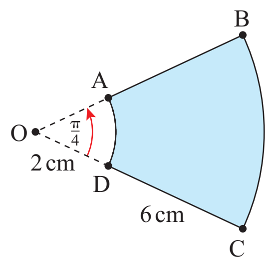
6. 5 cm atá i nga ciorcail. Faigh achar teascóige sa chiorcal más 6 cm ar fad atá stua na teascóige sin.

7. I gcás ciorcail dar ga 8 cm, 40 cm^2 atá in achar teascóige sa chiorcal. Faigh, ina raidiain, méid na huillinne sa teascóg sin.

8. 12π cm ar fad atá imlíne ciorcail áirithe. Faigh méid na huillinne i dteascóg den chiorcal, más ionann achar na teascóige agus 3π cm^2.

9. 27 cm^2 an t-achar atá i dteascóg ciorcail áirithe. 6 cm ar fad atá ga an chiorcail. Faigh, ina raidiain, méid na huillinne sa teascóg.

10. Faigh achar na coda scáthaithe ABCD a dhéanann uillinn rothlaithe $\frac{\pi}{4}$ raidian timpeall an láir O. Tabhair do fhreagra i dtéarmaí π.

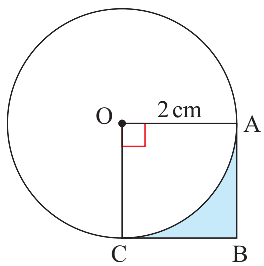


11. Tá stua ciorcail áirithe 10 cm ar fad. 4 cm ar fad atá ga an chiorcail. θ atá san uillinn ag lárphointe an chiorcail atá á hiompar ag an stua.

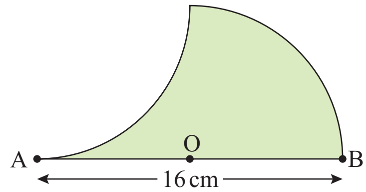
(i) Faigh θ ina raidiain.

(ii) Faigh θ ina chéimeanna, ceart go dtí an chéim is gaire.

12. Sa léaráid ar dheis, is cearnóg í OABC agus is 2 cm ar fad atá ga an chiorcail. Faigh achar na coda scáthaithe i dtéarmaí π.



13. Tá an mhírlíne [AB] agus stuanna de chuid dhá cheathrú ciorcail, a bhfuil a ngathanna ar comhfhad, le feiceáil sa léaráid ar dheis. Tá lárphointe ceann de na ciorcail ag O, lárphointe [AB]. Faigh achar na fíorach scáthaithe.

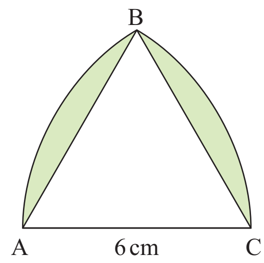


14. Feictear dhá stua, AB agus BC, sa léaráid. Is é C lárphointe an stua AB agus is é A lárphointe an stua BC. $|AC| = 6$ cm.

(i) Léirigh go bhfuil $|\angle ABC| = 60°$.

(ii) Faigh fad an stua AB.

(iii) Faigh achar an réigiúin scáthaithe.

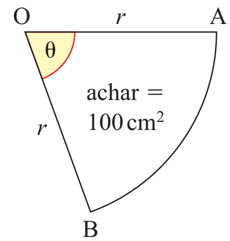


15. Píosa sreinge 40 cm ar fad, lúbtar í chun cruth na teascóige AOB, dar ga *r*, a dhéanamh. Más é 100 cm^2 achar na teascóige

(i) scríobh síos uillinn na teascóige θ i dtéarmaí r

(ii) faigh luach r

(iii) faigh luach θ.



Mír 2.2 Cóimheasa triantánachta

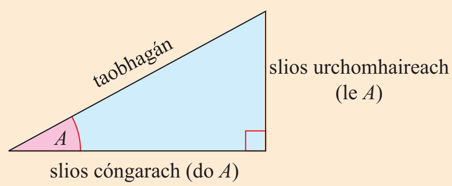
Tá taithí agat ó do chuid staidéir ar an triantánacht go dtí seo ar Theoirim Phíotagarás agus cóimheasa triantánachta a úsáid chun sleasa nó uillinneacha de thriantán dronuilleach a fháil.

Tugtar thíos na trí chóimheas bunaidh sa triantánacht:

$$\sin A = \frac{\text{slios urchomhaireach}}{\text{taobhagán}}$$

$$\cos A = \frac{\text{slios cóngarach}}{\text{taobhagán}}$$

$$\tan A = \frac{\text{slios urchomhaireach}}{\text{slios cóngarach}}$$



Tá trí chóimheas triantánachta eile is féidir a shainmhíniú ar an gcaoi seo: deilín an tsínis, deilín an chomhshínis, agus deilín an tangaint:

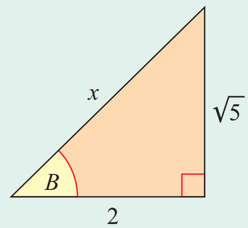
Secant $(\sec \theta) = \dfrac{1}{\cos \theta}$; **Cosecant** $(\text{cosec } \theta) = \dfrac{1}{\sin \theta}$; **Cotangent** $(\cot \theta) = \dfrac{1}{\tan \theta}$.

Sample 1

Má tá tan $B = \frac{\sqrt{5}}{2}$, faigh luach sin B agus cos B.

Má tá tan $B = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ is ionann $\sqrt{5}$ agus fad an tsleasa atá urchomhaireach le B, agus is ionann 2 agus fad an tsleasa atá cóngarach dó.

Anois tarraing sceitse garbh de thriantán dronuilleach.
Tugaimis x ar fhad an taobhagáin.



$x^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 \ldots \; (\sqrt{5})^2 = 5$

$x^2 = 4 + 5$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

De réir an triantáin, tá sin $B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ agus cos $B = \frac{2}{3}$.

Áireamhán a úsáid

Úsáidimid na heochracha $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ agus $\boxed{\text{tan}}$ ar áireamhán leictreonach chun teacht ar shíneas, comhshíneas agus tangant uillinne ar bith.
Chun sin 35° a fháil, cuir isteach $\boxed{\text{sin}}$ 35 $\boxed{=}$.

Is é an freagra ná 0.573576… = 0.5736, ceart go dtí 4 ionad de dheachúlacha.

Codanna de chéim

$1° = 60'$

Is féidir céim a roinnt ina 60 cuid.

Nóiméad a thugtar ar gach cuid, agus is mar seo a scríobhtar é: 1′.

Mar sin 34.5° = 34°30′.

Chun tan 34.5° nó 34°30′ a fháil ar d’áireamhán, is féidir ceachtar den dá mhodh seo a úsáid:

1. Le haghaidh tan 34.5°

   cuir isteach $\boxed{\text{tan}}$ 34.5 $\boxed{=}$

   Freagra = 0.6873

2. Le haghaidh tan 34°30′

   cuir isteach $\boxed{\text{tan}}$ 34 $\boxed{\circ\,{}'\,{}''}$ 30 $\boxed{\circ\,{}'\,{}''}$ $\boxed{=}$

   Freagra = 0.6873

Na heochracha $\boxed{\sin^{-1}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ agus $\boxed{\tan^{-1}}$ a úsáid

Más eol dúinn go bhfuil sin A = 0.8661, gheobhaimid an uillinn A ach an eochair $\boxed{\sin^{-1}}$ a úsáid.

Gheobhaimid an eochair $\boxed{\sin^{-1}}$ ach $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{sin}}$ a chur isteach.

Dá bhrí sin, má tá sin A = 0.8661, gheobhaimid A ach $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{sin}}$ 0.8661 $\boxed{=}$ a chur isteach.

Is é an freagra ná 60.008° = 60°.

Má tá tan B = 1.2734, gheobhaimid an uillinn B ach $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{tan}}$ 1.2734 $\boxed{=}$ a chur isteach.

Is é an freagra ná 51.86°… ceart go dtí 2 ionad de dheachúlacha.

Sampla 2

(i) Faigh cos 72°18′, ceart go dtí 4 ionad de dheachúlacha.

(ii) Má tá sin A = 0.5216, faigh A ceart go dtí an chéim is gaire.

> Tabhair faoi deara go n-úsáidtear an eochair $\boxed{{}^{\circ}{}_{\prime\prime\prime}}$ faoi dhó.

(i) Chun cos 72°18′, a fháil,
cuir isteach $\boxed{\cos}$ 72 $\boxed{{}^{\circ}{}_{\prime\prime\prime}}$ 18 $\boxed{{}^{\circ}{}_{\prime\prime\prime}}$ $\boxed{=}$

Is é an freagra ná 0.3040.

Nó tá $18' = \frac{18}{60}^{\circ} = 0.3^{\circ} \Rightarrow 72^{\circ}18' = 72.3^{\circ}$

Dá réir sin, chun 72.3° a fháil, cuir isteach $\boxed{\cos}$ 72.3 $\boxed{=}$

(ii) Má tá sin A = 0.5216, gheobhaimid A ach é seo a chur isteach

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ 0.5216 $\boxed{=}$

Is é an freagra ná 31.44°. $\Rightarrow$ A = 31°, ceart go dtí an chéim is gaire.

Nóta: Má tá a fhios agat go bhfuil sin $A = \frac{4}{7}$, is féidir an uillinn A a fháil ar an áireamhán ar an gcaoi seo:

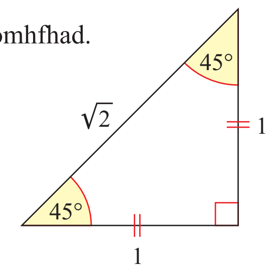
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{(}$ 4 $\boxed{\div}$ 7 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Is é an freagra ná 34.8°.

Na huillinneacha 30°, 45° agus 60°

Baintear úsáid as na huillinneacha 30°, 45° agus 60° go rímhinic sa triantánacht. Sa mhír seo bainfimid leas as triantáin chun cóimheasa an tsínis, an chomhshínis agus an tangaint a ghabhann leis na huillinneacha sin a scríobh ina gcodáin nó ina surdaí.

Is triantán comhchosach é an triantán ar dheis. 1 aonad ar fad atá na sleasa atá ar comhfhad.

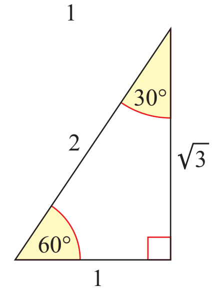


Tá an taobhagán $\sqrt{2}$ aonad ar fad. Is féidir cóimheasa an tsínis, an chomhshínis agus an tangaint a léamh ón triantán.

$\sin 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\cos 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\tan 45^{\circ} = 1$

Tá uillinn 60° agus uillinn 30° sa triantán dronuilleach ar dheis.

Is féidir linn úsáid a bhaint as an triantán sin chun cóimheasa triantánúla an dá uillinn sin a scríobh síos.



$\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$	$\tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$
$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$	$\cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Nóta: Tugtar cóimheasa an tsínis, an chomhshínis agus an tangaint le haghaidh 30°, 45° agus 60° ar leathanach 13 de *Foirmlí agus Táblaí*.

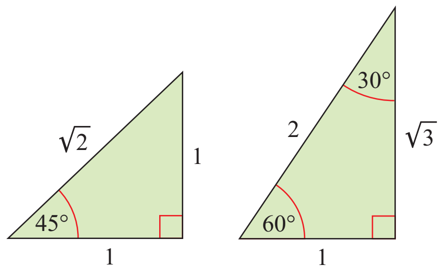
Cleachtadh 2.2

1. Bain úsáid as áireamhán le luach gach ceann de na cóimheasa seo a scríobh síos, ceart go dtí ceithre ionad de dheachúlacha:
(i) sin 48° (ii) cos 74° (iii) tan 28.4° (iv) cos 43°24′ (v) tan 30°36′

2. Bain úsáid as áireamhán chun tomhas gach ceann de na huillinneacha seo a fháil, ceart go dtí an chéim is gaire:
(i) $\sin A = 0.7453$ (ii) $\cos B = 0.3521$ (iii) $\tan C = 1.4538$
(iv) $\cos A = 0.2154$ (v) $\tan B = 0.8923$ (vi) $\sin C = 0.2132$

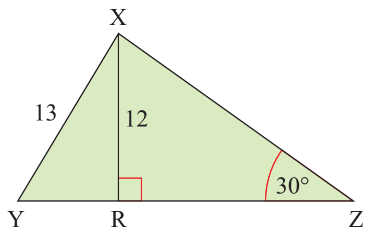
3. Faigh tomhas na huillinne θ, ceart go dtí an chéim is gaire, i ngach ceann díobh seo a leanas:
(i) $\sin\theta = \frac{2}{3}$ (ii) $\cos\theta = \frac{3}{5}$ (iii) $\tan\theta = \frac{7}{8}$ (iv) $\sin\theta = \frac{2}{5}$

4. Bain úsáid as na triantáin ar dheis le léiriú go bhfuil
(i) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$
(ii) $\sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30° = 1$
(iii) $\cos^2 60° + \cos 60° \sin 30° = \frac{1}{2}$

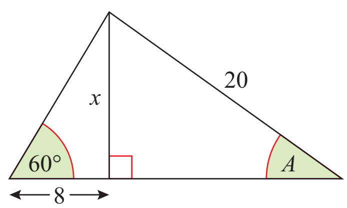


5. Léirigh go bhfuil $\sin^2\dfrac{\pi}{6} + \sin^2\dfrac{\pi}{4} + \sin^2\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$.

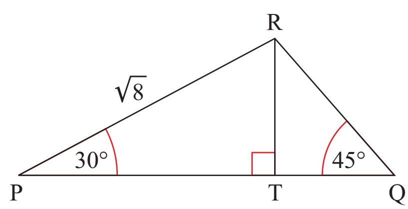
6. Faigh imlíne an triantáin XYZ san fhoirm $a + b\sqrt{c}$, áit a bhfuil a, b agus c ina slánuimhreacha.



7. Sa triantán ar dheis, faigh
(i) x, ceart go dtí 1 ionad de dheachúlacha
(ii) an uillinn A, ceart go dtí an chéim is gaire.



8. Sa triantán ar dheis tá $RT \perp PQ$, $|PR| = \sqrt{8}$, $|\angle RPT| = 30°$ agus $|\angle RQT| = 45°$.
Scríobh iad seo ina surdaí, sna téarmaí is simplí:
(i) $|RT|$ (ii) $|PT|$.
Bunaithe air sin faigh achar $\triangle RPQ$. Tabhair do fhreagra san fhoirm $a + \sqrt{b}$, áit a bhfuil $a, b \in \mathbb{N}$.



Mír 2.3 Feidhmeanna triantánachta

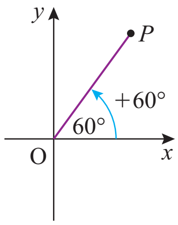
Sa mhír seo beimid ag plé le huillinneacha ó 0° go 360° agus léireofar conas síneas, comhshíneas nó tangant na n-uillinneacha sin a fháil.

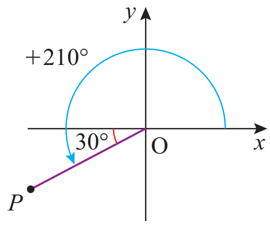
Ón x-ais dheimhneach a thomhaistear uillinneacha.

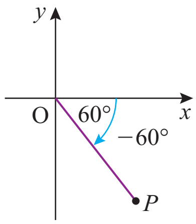
Tuathal a thomhaistear uillinneacha deimhneacha.

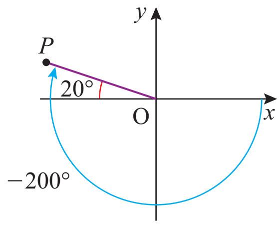
Deiseal a thomhaistear uillinneacha diúltacha.

Tá dhá uillinn dheimhneacha agus dhá uillinn dhiúltacha le feiceáil sna léaráidí thíos.









1. Ciorcal an Aonaid

Ag (0, 0) atá lárphointe an chiorcail ar dheis, agus 1 aonad ar fad atá ga an chiorcail. Ciorcal an aonaid a thugtar ar an gciorcal sin de ghnáth.

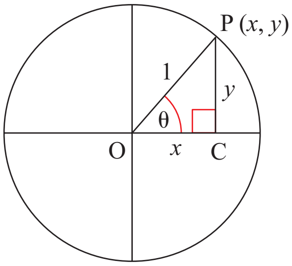
Pointe ar bith ar an gciorcal is ea P(x, y), mar atá sa léaráid.

Ón triantán OPC,

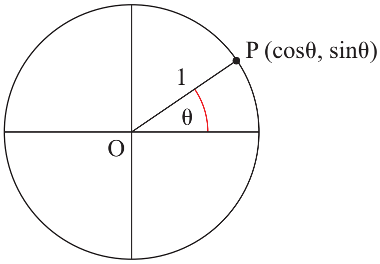
$$\frac{x}{1} = \cos\theta \qquad x = \frac{y}{1} = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad x = \cos\theta \qquad \Rightarrow \quad y = \sin\theta$$

$\therefore$ is iad comhordanáidí P ná **($\cos\theta$, $\sin\theta$)**

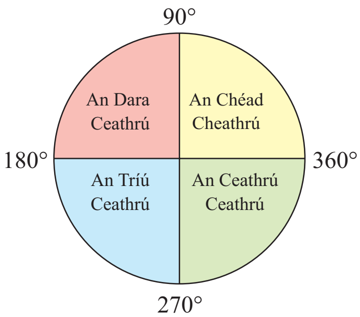


Is iad **($\cos\theta$, $\sin\theta$)** na comhordanáidí atá ag pointe ar bith ar imlíne chiorcal an aonaid.

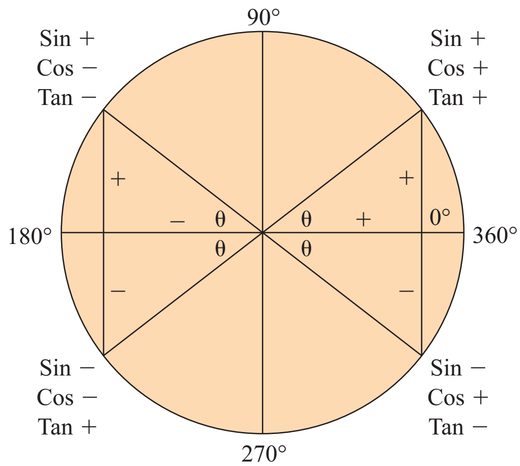


2. Na Ceithre Cheathrú

Roinneann an x-ais agus an y-ais imrothlú iomlán 360° ina cheithre cheathrú, mar atá le feiceáil ar dheis.

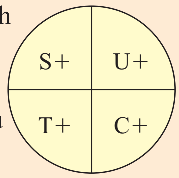


Sa léaráid seo de chiorcal an aonaid, tugtar an uillinn θ i ngach ceann de na ceithre cheathrú. Tugann na comharthaí i ngach triantán le fios cé acu deimhneach nó diúltach a bheidh na cóimheasa sa cheathrú sin.



Léirítear sa bhosca thíos na cóimheasa deimhneacha sna ceithre cheathrú.

(i) Tá siad uile (U) deimhneach sa chéad cheathrú
(ii) Sin (S) amháin atá deimhneach sa dara ceathrú
(iii) Tan (T) amháin atá deimhneach sa tríú ceathrú
(iv) Cos (C) amháin atá deimhneach sa cheathrú ceathrú



Sampla 1

Faigh i bhfoirm surda (i) sin 120° (ii) cos 225°

(i) sin 120°:

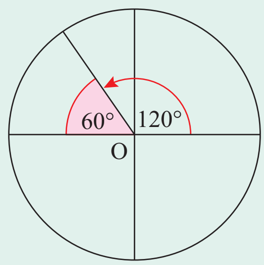
Tá 120° sa dara ceathrú

$\Rightarrow$ deimhneach atá cóimheas an tsínis

Is é an uillinn tagartha ná $180° - 120° = 60°$.

Ag úsáid leathanach 13 de *Foirmlí agus Táblaí*,

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$



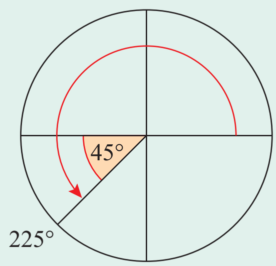
(ii) cos 225°:

Tá 225° sa tríú ceathrú

$\Rightarrow$ diúltach atá cóimheas an chomhshínis

Is é an uillinn tagartha ná $225° - 180° = 45°$.

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$



Sampla 2

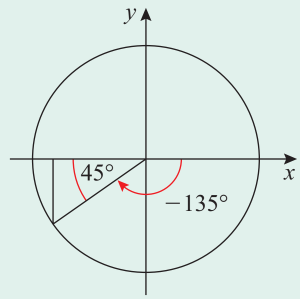
(i) Scríobh cos (−135°) i bhfoirm surda.

(ii) Má tá $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, faigh dhá luach ar x má tá $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

(i) $\cos(-135°) = \cos 45°$ sa tríú ceathrú

$= -\cos 45°$ … diúltach atá an comhshíneas sa tríú ceathrú

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

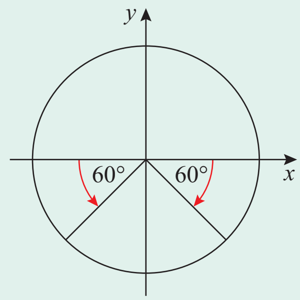


(ii) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

⇒ $x = 60°$ sa tríú nó sa cheathrú ceathrú

⇒ $x = (180° + 60°)$ nó $x = (360° - 60°)$

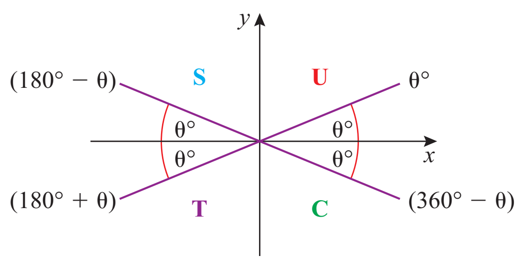
⇒ $x = 240°$ nó $x = 300°$



Léirítear sa léaráid ar dheis géaruillinn, θ i ngach ceann de na ceithre cheathrú. Léiríonn C U S T na cóimheasa deimhneacha sna ceathrúna sin.

Léirítear sa léaráid go bhfuil $\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$ mar go bhfuil an síneas diúltach sa 3ú ceathrú.

Is iad seo a leanas na torthaí le haghaidh sínis, comhshínis agus tangaint:



$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$	$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$	$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$
$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$	$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$
$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$	$\cos(360° - \theta) = \cos\theta$	$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$

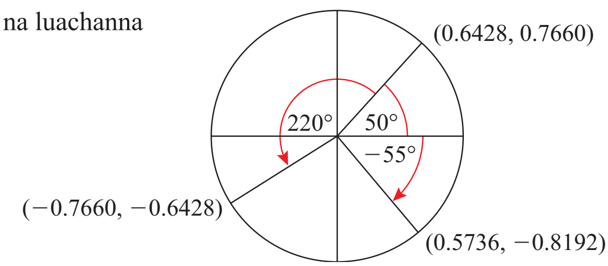
Cleachtadh 2.3

1. Bain úsáid as ciorcal an aonaid ar dheis chun na luachanna seo a scríobh síos

(i) sin 50° (ii) cos 220°

(iii) cos 50° (iv) sin 220°

(v) sin (−55°) (vi) cos (305°)



2. Scríobh síos, le cabhair áireamháin, luach gach ceann de na cóimheasa seo, ceart go dtí ceithre ionad de dheachúlacha:

(i) $\sin 138°$ (ii) $\cos 212°$ (iii) $\tan 318°$ (iv) $\cos 159°$

3. Má tá $\cos 120° = -\cos 60°$, cóipeáil agus críochnaigh iad seo a leanas ar an gcaoi chéanna:

(i) $\sin 130° = \ldots$ (ii) $\cos 115° = \ldots$ (iii) $\tan 160° = \ldots$
(iv) $\cos 220° = \ldots$ (v) $\sin 250° = \ldots$ (vi) $\tan 300° = \ldots$

4. Scríobh gach ceann díobh seo a leanas ina chodán nó ina shurda, le cabhair an eolais sa leabhar *Foirmlí agus Táblaí*:

(i) $\sin 120°$ (ii) $\cos 135°$ (iii) $\sin 240°$ (iv) $\sin 210°$
(v) $\cos 330°$ (vi) $\tan 225°$ (vii) $\cos 150°$ (viii) $\sin 300°$

5. Cén cheathrú ina bhfuil gach ceann díobh seo a leanas inti:

(i) $\cos < 0$ agus $\tan > 0$ (ii) $\cos > 0$ agus $\sin > 0$
(iii) $\tan < 0$ agus $\sin > 0$ (iv) $\tan > 0$ agus $\cos > 0$?

6. I gcás gach ceann de na huillinneacha seo a leanas, cén uillinn idir $0°$ agus $360°$ a bhfuil an síneas céanna aici leis an uillinn sin?

(i) $56°$ (ii) $112°$ (iii) $300°$ (iv) $195°$ (v) $105°$

7. Faigh, ceart go dtí an chéim is gaire, an dá luach ar A má tá $\sin A = 0.2167$ agus $0° \leqslant A \leqslant 360°$.

8. Faigh, ceart go dtí an chéim is gaire, an dá luach ar gach ceann de na huillinneacha seo sa raon $0°$ go $360°$.

(i) $\cos A = -0.8428$ (ii) $\sin B = -0.6947$ (iii) $\tan C = 0.9325$

9. Má tá $\sin \theta = \frac{1}{2}$, faigh dhá luach ar θ, má tá $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

10. Má tá $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, faigh dhá luach ar $\tan \theta$, má tá $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

11. Má tá $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, faigh dhá luach ar $\cos A$, má tá $0° \leqslant A \leqslant 360°$.

12. Má tá $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, faigh dhá luach ar $\cos \theta$ gan áireamhán a úsáid, má tá $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

13. Faigh A, ceart go dtí an chéim is gaire, má tá $\sin A = -\frac{4}{5}$ agus $\cos A = -\frac{3}{5}$ i gcás $A \leqslant 360°$.

14. Má tá $\sin B = \frac{3}{5}$ agus $\cos B = -\frac{4}{5}$, faigh luach $\tan B$ gan áireamhán a úsáid, má tá $0° \leqslant B \leqslant 360°$.

15. Má tá $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ agus $\sin B = -\frac{1}{2}$, scríobh $\cos B$ i bhfoirm surda.

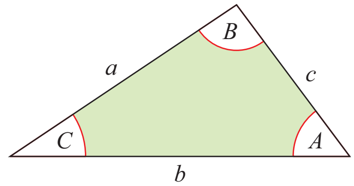
16. Má tá $\tan A = \frac{1}{2}$ agus $180° < A < 270°$, faigh $\sin A$ i bhfoirm surda.

17. Scríobh gach ceann díobh seo a leanas ina shurda nó ina chodán:

(i) $\sin 420°$ (ii) $\cos 495°$ (iii) $\tan(-120°)$

Mír 2.4 Riail an tSínis – Achar triantáin

Pléifimid sa roinn seo sleasa agus uillinneacha triantáin. Is iad na gnáthnoda A, B agus C a bheidh againn ar na huillinneacha, agus a, b agus c ar na sleasa atá urchomhaireach leis na huillinneacha sin.



Tá taithí agat ó do chuid staidéir ar an triantánacht go dtí seo ar a bheith ag úsáid Theoirim Phíotagarás chun sleasa agus uillinneacha de thriantán dronuilleach fháil.

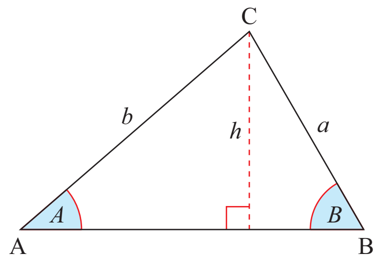
D'fhonn déileáil le triantán ar bith, tá dhá riail thábhachtacha ann maidir leis an ngaol idir uillinneacha agus sleasa an triantáin.

Riail an tsínis a thugtar ar an gcéad riail acu sin.

1. Riail an tSínis: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Cruthú

Tóg ingear h ó C go [AB].



(i) $\dfrac{h}{b} = \sin A \quad \Rightarrow \quad h = b\sin A$

(ii) $\dfrac{h}{a} = \sin B \quad \Rightarrow \quad h = a\sin B$

$\Rightarrow \quad a\sin B = b\sin A$

Roinn an dá thaobh ar $\sin A \sin B$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a\sin B}{\sin A\sin B} = \dfrac{b\sin A}{\sin A\sin B}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

Ar an gcaoi chéanna, is féidir a léiriú go bhfuil $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Riail an tSínis $\quad \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ nó $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

Nóta: Má theastaíonn uainn úsáid a bhaint as an riail chéanna chun uillinn nach bhfuil ar eolas againn a fháil, is foirm níos oiriúnaí den riail í $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$.

Leas a bhaint as riail an tsínis

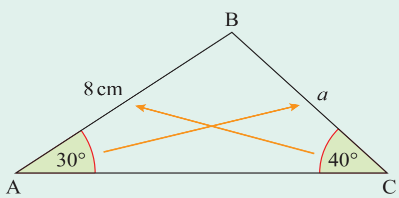
Baintear leas as riail an tsínis chun triantán a réiteach nuair a bhíonn slios amháin agus an uillinn urchomhaireach leis ar eolas againn, agus uillinn nó slios amháin eile chomh maith.

Sampla 1

I gcás an triantáin ABC, $|AB| = 8$ cm, $|\angle BAC| = 30°$ agus $|\angle BCA| = 40°$.
Faigh $|BC|$.

Tá sceitse den triantán le feiceáil ar dheis.

Tarraing léaráid den triantán i gcónaí agus cuir léi an t-eolas a thugtar duit.



Ón triantán, $|AB| = 8$, $A = 30°$ agus $C = 40°$.

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{8}{\sin 40°}$$

$$\Rightarrow \quad a \sin 40° = 8 \sin 30°$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{8 \sin 30°}{\sin 40°}$$

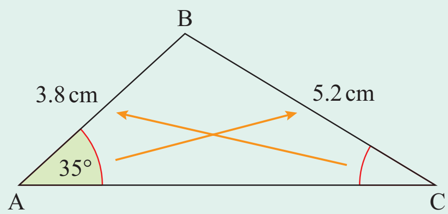
$$\Rightarrow \quad a = 6.22 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad |BC| = 6.22 \text{ cm}$$

Sampla 2

I gcás $\triangle ABC$, $|AB| = 3.8$ cm, $|BC| = 5.2$ cm agus $|\angle BAC| = 35°$. Faigh $|\angle ACB|$.

I gcás an triantáin ABC
$A = 35°$, $a = 5.2$ cm agus $c = 3.8$ cm



$$\frac{\sin C}{3.8} = \frac{\sin 35°}{5.2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin C = \frac{3.8 \sin 35°}{5.2}$$

$$= 0.4192$$

$$\Rightarrow \quad C = \sin^{-1}(0.4192)$$

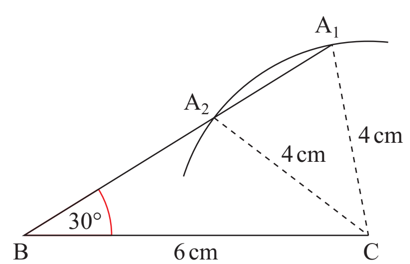
$$\Rightarrow \quad C = 24.8°$$

$$\Rightarrow \quad |\angle ACB| = 24.8°$$

Rabhadh!

I gcás $\triangle ABC$, $|AC| = 4$ cm, $|BC| = 6$ cm agus $|\angle ABC| = 30°$.

Má tharraingímid an triantán seo le rialóir agus compás, gheobhaimid an léaráid thíos.



D'fhéadfadh rinn A a bheith i gceachtar de dhá áit, A_1 nó A_2.

Is mar sin a bhíonn mura mbíonn ar eolas againn ach dhá shlios agus uillinn nach í an uillinn idir an dá shlios sin í.

Is **cás débhríoch** é nuair is féidir dhá thriantán a tharraingt de réir an eolais a thugtar.

I gcás an triantáin thuas, $|\angle BA_1C| = 48.6°$ agus $|\angle BA_2C| = 180° - 48.6°$
$= 131.4°$

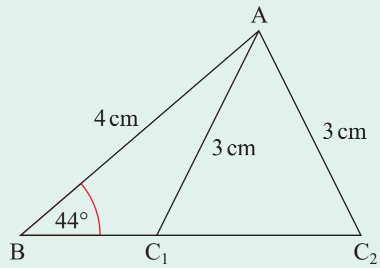
Sampla 3

I gcás an triantáin ABC, $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 3$ cm agus $|\angle ABC| = 44°$.

(i) Tarraing sceitse den dá thriantán a d'fhéadfadh a bheith ann de réir an eolais sin.

(ii) Faigh an dá luach a d'fhéadfadh a bheith ar $\angle ACB$.

(i) Tá an dá thriantán a d'fhéadfadh a bheith ann, ABC_1 agus ABC_2, le feiceáil ar dheis.



(ii) $\dfrac{\sin C}{4} = \dfrac{\sin 44°}{3}$

$\Rightarrow \quad \sin C = \dfrac{4 \times \sin 44°}{3} = 0.9262$

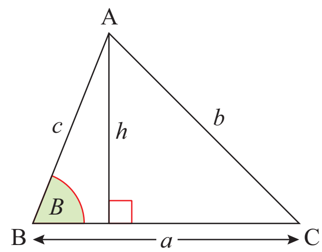
$\Rightarrow \quad C = \sin^{-1}(0.9262)$

$\Rightarrow \quad C = 67.9° \quad$ nó $\quad 180° - 67.9°$

$\Rightarrow \quad |\angle ACB| = 67.9° \quad$ nó $\quad 112.1°$

2. Achar triantáin

I gcás an triantáin ar dheis, is é h an airde ingearach, i.e. an fad ingearach ó A go dtí [BC].



$$\text{Achar } \triangle ABC = \tfrac{1}{2} \text{ an bhoinn} \times \text{an airde ingearach}$$
$$= \tfrac{1}{2}a \times h$$
$$= \tfrac{1}{2}ah$$

Ach $\dfrac{h}{c} = \sin B \quad \Rightarrow \quad h = c \sin B$

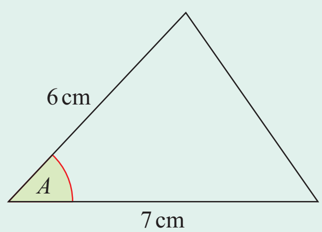
$\Rightarrow \quad$ achar $\triangle ABC = \tfrac{1}{2}ac \sin B$

Agus airdí ingearacha éagsúla á n-úsáid againn,
achar $\triangle ABC = \tfrac{1}{2}ab \sin C \quad$ nó $\quad \tfrac{1}{2}ac \sin B \quad$ nó $\quad \tfrac{1}{2}bc \sin A$

> Achar $\triangle ABC = \tfrac{1}{2}ab \sin C \quad$ nó $\quad \tfrac{1}{2}ac \sin B \quad$ nó $\quad \tfrac{1}{2}bc \sin A$
>
> I bhfocail, an t-achar = leath an toraidh ar dhá shlios ar bith a iolrú faoi shíneas na huillinne eatarthu.

Sampla 4

Más é 12 cm^2 achar an triantáin ar dheis, faigh tomhas na huillinne A, ceart go dtí an chéim is gaire.



Achar $\triangle = \tfrac{1}{2}(6)(7) \sin A$

$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}(6)(7) \sin A = 12$

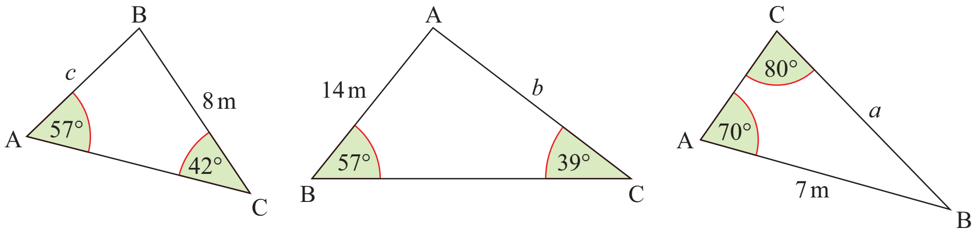
$\Rightarrow \quad \sin A = \tfrac{12}{21} = 0.5714$

$\Rightarrow \quad A = \sin^{-1}(0.5714)$

$\Rightarrow \quad A = 34.8° = 35°$, ceart go dtí an chéim is gaire.

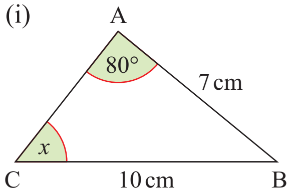
Cleachtadh 2.4

1. Faigh fad an tsleasa atá marcáilte le litir i ngach ceann de na triantáin seo.
Bíodh gach freagra ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

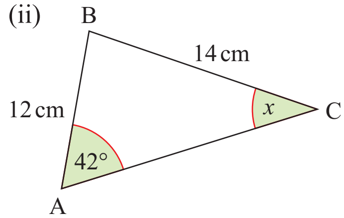


2. I gcás gach ceann de na triantáin seo a leanas, faigh luach na huillinne x ceart go dtí an uillinn is gaire:

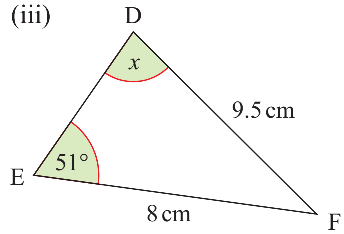
(i)



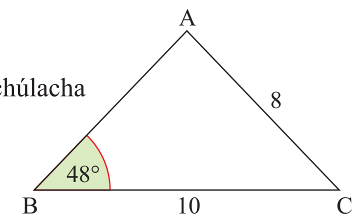
(ii)



(iii)

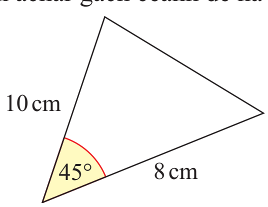


3. I gcás an triantáin ABC, $|AC| = 8$, $|BC| = 10$ agus $|\angle ABC| = 48°$.
Faigh (i) $|\angle BAC|$ (ii) $|AB|$, ceart go dtí 1 ionad de dheachúlacha
(iii) achar $\triangle ABC$, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.

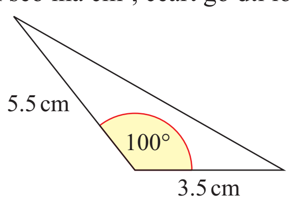


4. Faigh achar gach ceann de na triantáin seo ina cm^2, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha:

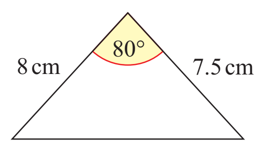
(i)



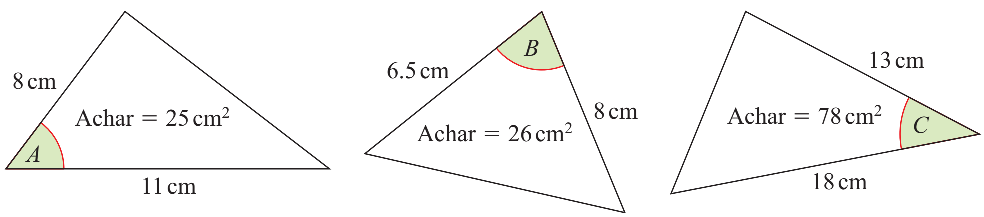
(ii)



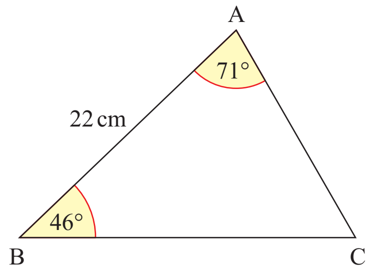
(iii)



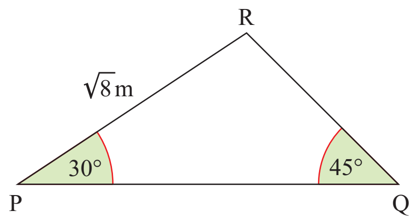
5. Faigh méid na géaruillinne atá marcáilte le litir i ngach ceann de na triantáin seo.
Bíodh gach freagra ceart go dtí an chéim is gaire.



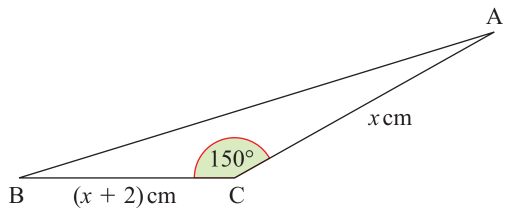
6. I gcás an triantáin ar dheis, $|AB| = 22$ cm, $|\angle ABC| = 46°$ agus $|\angle BAC| = 71°$.
Faigh, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire
(i) $|BC|$
(ii) achar $\triangle ABC$.



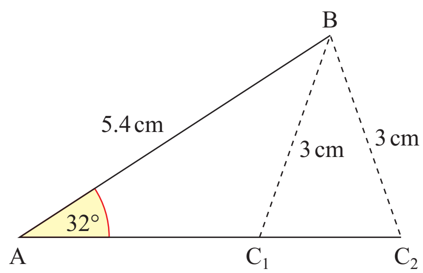
7. Sa triantán ar dheis, $|PR| = \sqrt{8}$ m, $|\angle RPQ| = 30°$ agus $|\angle RQP| = 45°$.
(i) Faigh $|RQ|$.
(ii) Bunaithe air sin léirigh gurb é 2.7 m^2 achar $\triangle PQR$, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



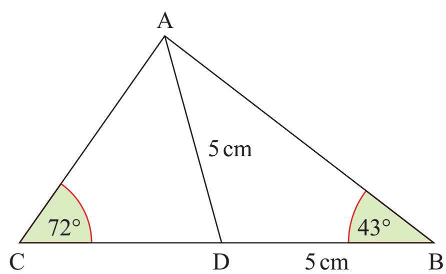
8. I gcás an triantáin ABC ar dheis, $BC = (x + 2)$ cm, $AC = x$ cm agus $|\angle BCA| = 150°$.
Más é 6 cm^2 achar an triantáin, faigh luach x.



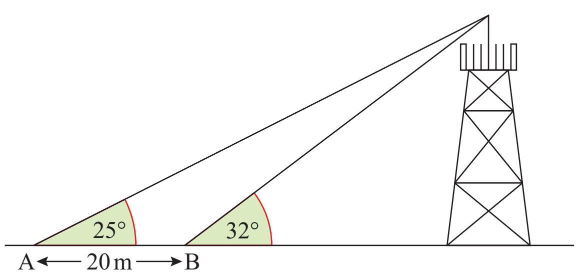
9. Tá dhá thriantán fhéideartha le $|AB| = 5.4$ cm, $|\angle BAC| = 32°$ agus $|BC| = 3$ cm le feiceáil sa léaráid. Faigh an dá luach a d'fhéadfadh a bheith ar an uillinn C, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



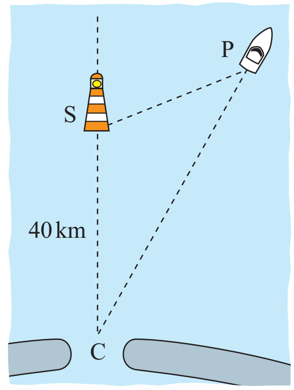
10. Sa léaráid ar dheis, $|AD| = |DB| = 5$ cm, $|\angle ABC| = 43°$ agus $|\angle ACB| = 72°$.
Faigh (i) $|AB|$ (ii) $|CD|$.
Bíodh gach freagra ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



11. Is é 25° an uillinn airde go dtí barr crann tarchurtha raidió ón bpointe A, atá ar an airde chéanna le bun an chrainn raidió. Ón bpointe B, pointe atá 20 méadar níos gaire don chrann raidió, agus atá ar an airde chéanna, is é 32° an uillinn airde.
Faigh airde an chrainn raidió ina méadair, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

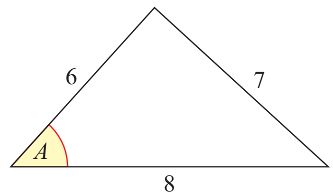


12. Tá teach solais, S, 40 km ó thuaidh díreach ó chuan, C. Fágann luasbhád C agus taistealaíonn sí sa treo T 53° O ón gcuan go dtí go sroicheann sí an pointe P. Tá an pointe P T 75° O ó S. Ríomh an fad a thaistil an luasbhád, ceart go dtí an km is gaire.



Mír 2.5 Riail an Chomhshínis

Sa triantán ar dheis, tugtar fad trí shlios ach ní thugtar méid uillinne ar bith dúinn. Ní féidir úsáid a bhaint as riail an tsínis sa chás seo chun an uillinn A a fháil.



Is le riail eile a réitímid triantáin dá leithéid sin.

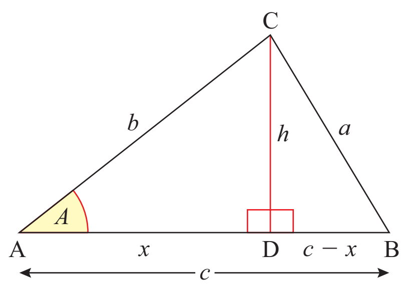
Riail an chomhshínis a thugtar uirthi.

Is í seo riail an chomhshínis i gcás triantán ar bith:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.}$$

Riail an Chomhshínis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

***Cruthú**



Sa $\triangle$ABC, tá CD ingearach le AB.

Bíodh $|CD| = h$ agus $|AD| = x$

Mar sin $|DB| = c - x$

Anois cuirimid Teoirim Phíotagarás i bhfeidhm ar na triantáin ACD agus CDB.

Sa $\triangle$ACD: $h^2 + x^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = b^2 - x^2$

Sa $\triangle$BCD: $h^2 + (c - x)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = a^2 - (c - x)^2$

Má dhéantar an dá luach ar h^2 a chothromú, faighimid

$$a^2 - (c - x)^2 = b^2 - x^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = b^2 - x^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \qquad \text{Ach } \frac{x}{b} = \cos A$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2c\,(b \cos A) \qquad \Rightarrow \quad x = b \cos A$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Ar an gcaoi chéanna is féidir a chruthú go bhfuil

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ agus $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Is gnách riail an chomhshínis a úsáid sna cásanna seo:

(i) chun an tríú slios ar thriantán a fháil nuair a bhíonn an dá shlios eile agus an uillinn eatarthu ar eolas againn

(ii) chun triantán a réiteach nuair a bhíonn faid na dtrí shlios ar eolas againn.

Riail an Chomhshínis

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\text{nó} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

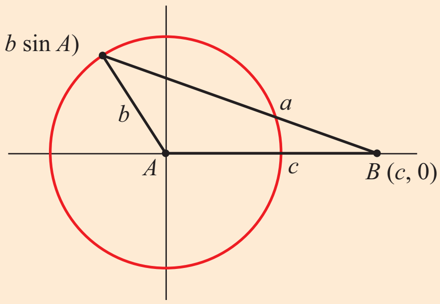
$$\text{nó} \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\text{nó} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Cruthú eile ar Riail an Chomhshínis

An modh eile seo chun Riail an Chomhshínis a chruthú, baineann sé le ciorcal an aonaid agus leis an bhfoirmle don fhad idir dhá phointe.

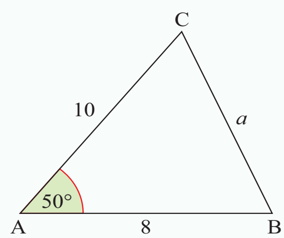


Tarraing ciorcal agus a lárphointe ag an mbunphointe.
Tugaimis A ar an bpointe sin.
Críochnaigh an triantán ABC, áit a bhfuil B ar an x-ais agus C ar an gciorcal.
Is iad comhordanáidí B ná $(c, 0)$.
Ó tá $|AC| = b$, is ionann an fad b agus ga an chiorcail.
Mar sin is iad comhordanáidí C ná $(b \cos A, b \sin A)$.
$|BC| = a$ agus $|BC| =$ an fad ó $(c, 0)$ go dtí $(b \cos A, b \sin A)$.

$$\Rightarrow \; a^2 = (c - b \cos A)^2 + (0 - b \sin A)^2$$
$$\Rightarrow \; a^2 = c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A$$
$$= c^2 - 2bc \cos A + b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A)$$
$$\Rightarrow \; a^2 = c^2 - 2bc \cos A + b^2 \; \ldots \cos^2 A + \sin^2 A = 1$$
$$\Rightarrow \; a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Sampla 1

Sa triantán ABC, $|AB| = 8$, $|AC| = 10$ agus $|\angle BAC| = 50°$.
Faigh $|CB|$.

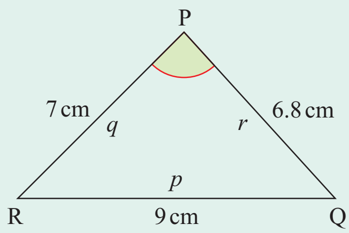


Bíodh $|CB| = a$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$a^2 = 10^2 + 8^2 - 2(10)(8) \cos 50°$$
$$= 100 + 64 - 160\ (0.6428)$$
$$a^2 = 61.15$$
$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{61.15} = 7.8, \text{ ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha}$$
$$\Rightarrow \quad |CB| = 7.8$$

Sampla 2

Sa triantán PQR ar dheis, $|PR| = 7$ cm, $|PQ| = 6.8$ cm agus $|RQ| = 9$ cm.
Faigh $|\angle RPQ|$.



Teastaíonn an uillinn P uainn, mar sin tosaímid le cos P.

$$\cos P = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr}$$

$$= \frac{7^2 + (6.8)^2 - 9^2}{2(7)(6.8)}$$

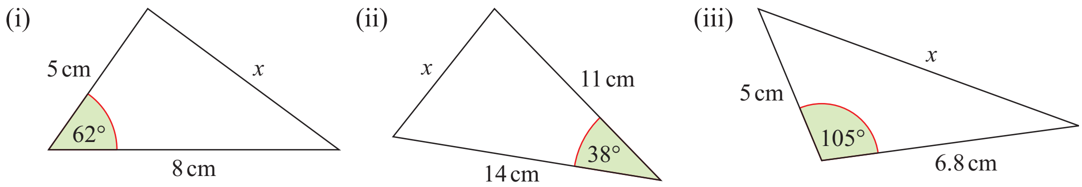
$$\Rightarrow \quad \cos P = 0.1495$$

$$\Rightarrow \quad P = \cos^{-1}(0.1495)$$

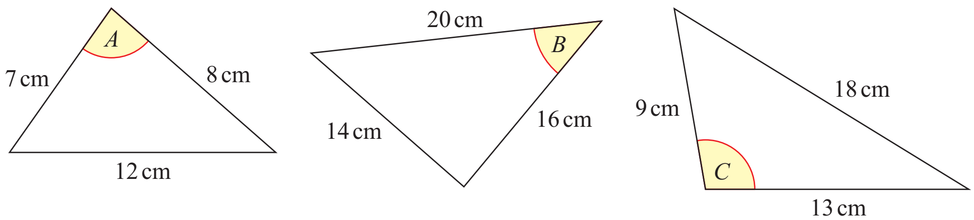
$$\Rightarrow \quad |\angle RPQ| = 81.4^\circ$$

Cleachtadh 2.5

1. Ríomh fad an tsleasa x i ngach ceann de na triantáin seo.
Bíodh do chuid freagraí ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



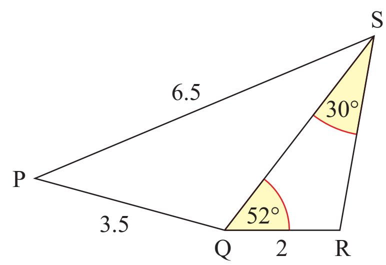
2. Faigh, ceart go dtí an chéim is gaire, méid na huillinne atá marcáilte le litir i ngach ceann de na triantáin seo:



3. Más 3 cm, 5 cm agus 7 cm ar fad atá sleasa triantáin áirithe, léirigh gur 120° atá san uillinn is mó ann.

4. Faigh, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha, achar an triantáin a bhfuil na sleasa air 4, 8 agus 10 n-aonad ar fad.

5. San fhíor ar dheis, $|PQ| = 3.5$, $|QR| = 2$, $|PS| = 6.5$, $|\angle QSR| = 30°$ agus $|\angle SQR| = 52°$.
Faigh (i) $|QS|$, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha
(ii) $|\angle PQS|$.



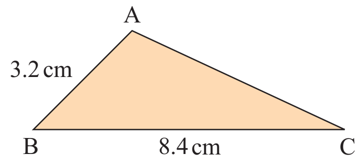
6. Cuireann tógálaí rópa timpeall ar phíosa triantánach talún, PQR.
Tá fad [PQ] = 42 m agus tá fad [PR] = 50 m.
$|\angle QPR| = 72°$.
Ríomh fad an rópa atá de dhíth ar an tógálaí.
Bíodh do fhreagra ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

7. I gcás an triantáin ABC, $|AC| = 15$ cm, $|AB| = 12$ cm agus is é achar $\triangle ABC$ ná 65 cm^2. Faigh
(i) $|\angle BAC|$, ceart go dtí an chéim is gaire (ii) $|BC|$ ina cm, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

8. 4 cm, 5 cm agus 6 cm ar fad atá sleasa triantáin áirithe.
Is é θ méid na huillinne is mó atá ann.
(i) Faigh, ina chodán, an luach atá ar cos θ.
(ii) Bunaithe air sin léirigh go bhfuil sin $\theta = \frac{a\sqrt{7}}{b}$, áit ar slánuimhreacha iad a agus b.
Scríobh síos luach a agus b.

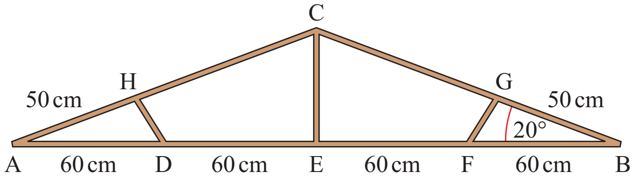
9. I gcás triantáin áirithe, tá an slios is faide 2 cm ar fad agus tá ceann de na sleasa eile $\sqrt{2}$ cm ar fad.
Más ionann achar an triantáin agus 1 cm^2, léirigh gur dronuilleach agus comhchosach atá an triantán.

10. Is ionann achar $\triangle ABC$ agus 10 cm^2.
$|AB| = 3.2$ cm agus $|BC| = 8.4$ cm.
Faigh imlíne an triantáin ABC ina cm,
ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



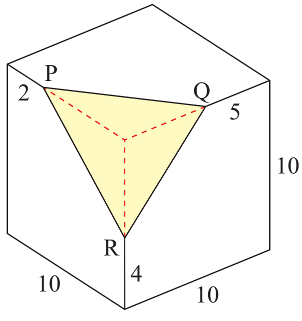
11. Tá an slios is faide ar thriantán $(2x - 1)$ cm ar fad.
Tá na sleasa eile $(x - 1)$ cm agus $(x + 1)$ cm ar fad.
Más 120° méid na huillinne is mó, faigh
(i) luach x (ii) achar an triantáin i bhfoirm surda.

12. Tá creat adhmaid i gcomhair díon seide le feiceáil sa léaráid thíos.



I gcás an triantáin ABC, $|AC| = |BC|$ agus $|AD| = |DE| = |EF| = |FB| = 60$ cm.
$|\angle ABC| = 20°$ agus $|AH| = |BG| = 50$ cm.
Faigh (i) fad [FG], ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.
(ii) an fad iomlán adhmaid a theastaíonn chun an creat sa léaráid a dhéanamh.

13. Tá ciúb a bhfuil an slios air 10 cm ar fad le feiceáil sa léaráid ar dheis. Tá cúinne amháin den chiúb gearrtha de.
Ríomh méid na huillinne PQR, ceart go dtí an chéim is gaire.

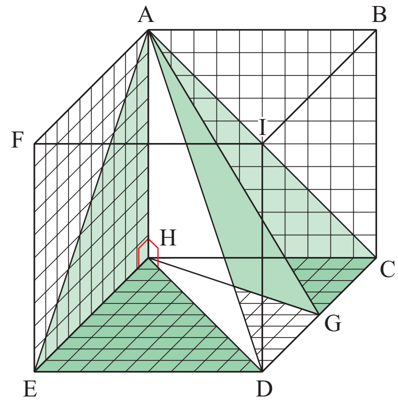


Mír 2.6 Fadhbanna tríthoiseacha

Sa mhír seo, beidh tú ag plé le fadhbanna triantánachta tríthoiseacha.

Ceann de na chéad rudaí atá le déanamh agat ná a aithint cad iad na huillinneacha nó na faid is gá a ríomh. Ar an ábhar sin, tá sé ríthábhachtach go mbeidh tú in ann léaráidí maithe a sceitseáil.

Den chuid is mó, baineann fadhbanna tríthoiseacha le sraitheanna de thriantáin atá ceangailte lena chéile. Tá tábhacht ar leith le triantáin dhronuilleacha a aithint. Má theastaíonn méid uillinne nó fad sleasa i dtriantán ar leith uainn, is fusa é sin a aimsiú má tharraingímid an triantán sin leis féin. Ón bpointe sin ar aghaidh is le fíor dhéthoiseach a bhíonn tú ag obair, díreach mar a bhí ar siúl agat sa chaibidil go dtí seo.



Sa chiúb ar dheis tá a lán triantán dronuilleach ceangailte lena chéile.

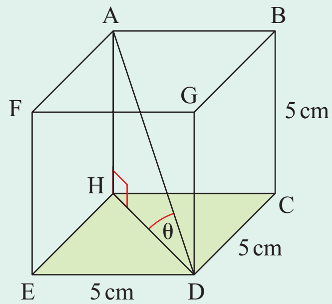
Is féidir úsáid a bhaint as an triantán HED chun fad an tsleasa [HD] a fháil.

Is féidir úsáid a bhaint as an slios [HD] sa triantán AHD chun $|AD|$ agus $|\angle ADH|$ a fháil.

Sampla 1

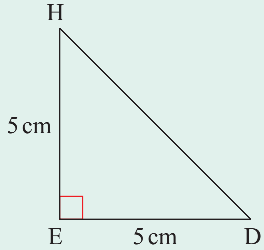
Feictear ar dheis ciúb a bhfuil slios 5 cm ar fad air.

Faigh tomhas na huillinne idir an trasnán [AD] agus bonn an chiúib.



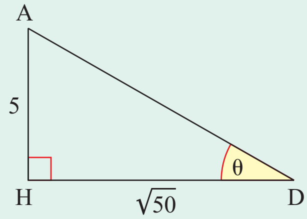
(i) Tarraing $\triangle$HED as an nua

$$|HD|^2 = 5^2 + 5^2$$
$$= 50$$
$$\Rightarrow \quad |HD| = \sqrt{50}$$



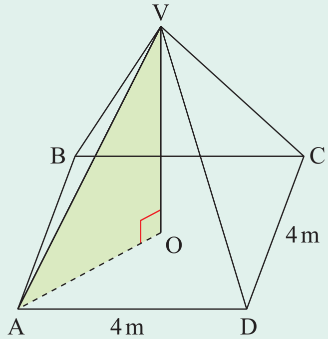
(ii) Tarraing $\triangle$AHD as an nua

$$\tan\theta = \frac{5}{\sqrt{50}}$$
$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right)$$
$$\Rightarrow \quad \theta = 35.26^\circ$$



Sampla 2

Tá bonn cearnógach ar an bpirimid thíos agus 4 m ar fad atá an slios atá air.
3 m atá an airde cheartingearach.



(i) Ríomh fad an imill [AV].

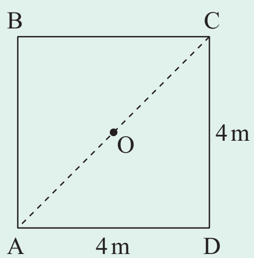
(ii) Bunaithe air sin ríomh achar iomlán na gceithre aghaidh thriantánacha, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.

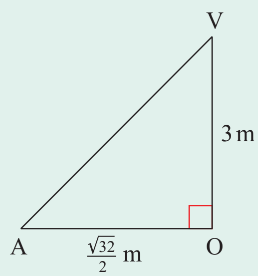
(i) I gcás an bhoinn ABCD:

$$|AC|^2 = 4^2 + 4^2$$
$$|AC|^2 = 32$$
$$\Rightarrow \quad |AC| = \sqrt{32}$$
$$|AO| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{\sqrt{32}}{2}\text{ m}$$

I gcás $\triangle AVO$:

$$|AV|^2 = 3^2 + \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2$$
$$= 9 + \frac{32}{4}$$
$$= 17$$
$$\Rightarrow \quad |AV| = \sqrt{17}\text{ m}$$





(ii) Achar na haghaidhe AVD:

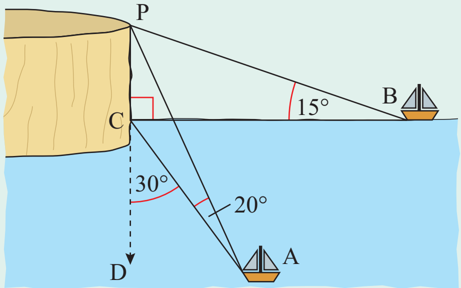
$$h^2 + 2^2 = (\sqrt{17})^2$$
$$h^2 + 4 = 17$$
$$h^2 = 13 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{13}\text{ m}$$
$$\text{Achar } \triangle AVD = \tfrac{1}{2}(4\text{ cm})\left(\sqrt{13}\right)$$
$$= 2\sqrt{13}\text{ m}^2$$
$$\text{Achar na 4 aghaidh} = 4\left(2\sqrt{13}\right)\text{ m}^2$$
$$= 28.84\text{ m}^2$$

$= 29\text{ m}^2$, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.

Nóta: Mura bhfuil triantán dronuilleach, úsáidimid riail an tsínis nó riail an chomhshínis chun uillinn nó slios nach bhfuil ar eolas againn a fháil.

Sampla 3

Tá aill cheartingearach 100 m ar airde. Tá bád A sa treo D 30° O ó bharr na haille agus tá bád B díreach soir uaidh.



20° atá in uillinn airde bharr na haille ó bhád A agus 15° atá san uillinn airde ó bhád B. Ríomh cá fhad atá na báid óna chéile. Bíodh do fhreagra ceart go dtí an méadar is gaire.

(i) I gcás $\triangle APC$:

$$\frac{100}{|CA|} = \tan 20^\circ$$

$$\Rightarrow \quad |CA| \tan 20^\circ = 100$$

$$\Rightarrow \quad |CA| = \frac{100}{\tan 20^\circ} = \frac{100}{0.364}$$

$$\Rightarrow \quad |CA| = 274.7\text{ m}$$

(ii) I gcás $\triangle BCP$:

$$\frac{100}{|CB|} = \tan 15^\circ$$

$$\Rightarrow \quad |CB| = \frac{100}{\tan 15^\circ}$$

$$\Rightarrow \quad |CB| = 373.2\text{ m}$$

(iii) I gcás $\triangle ACB$:
Anseo bainimid leas as riail an chomhshínis chun $|AB|$ a fháil.

$$|AB|^2 = (373.2)^2 + (274.7)^2 - 2(373.2)(274.7)\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow \quad |AB|^2 = 112\,220.29$$

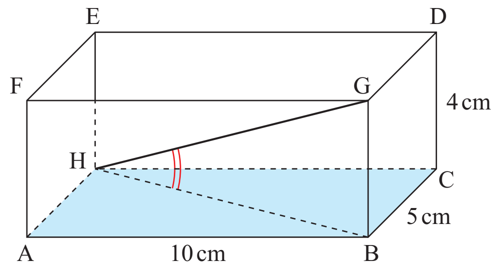
$$\Rightarrow \quad |AB| = 334.99$$

$$= 335 \text{ méadar}$$

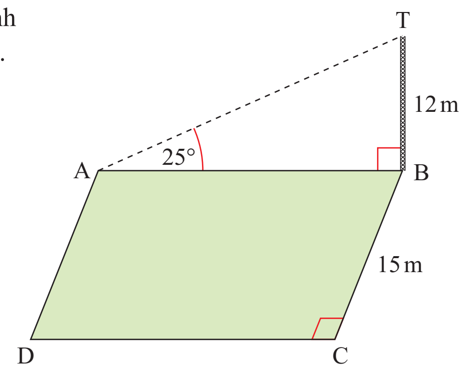
$\Rightarrow$ 335 méadar óna chéile atá na báid.

Cleachtadh 2.6

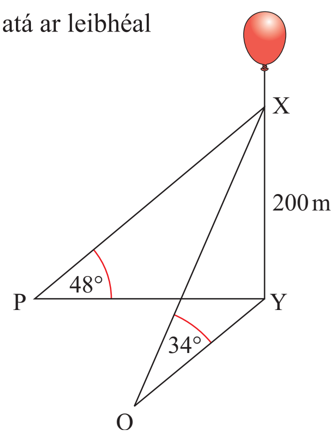
1. 10 cm faoi 5 cm faoi 4 cm atá bosca dronuilleogach oscailte, mar atá le feiceáil ar dheis.
  (i) Faigh fad an trasnáin [GH].
  (ii) Faigh méid na huillinne idir GH agus bonn an bhosca.



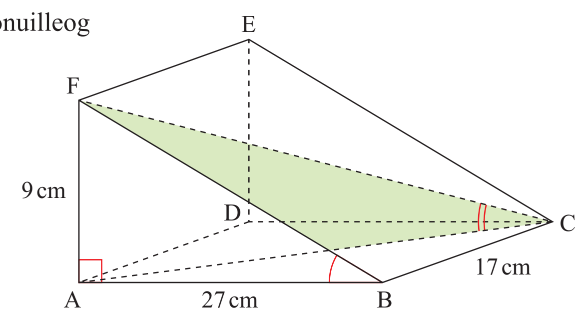
2. Tá crann tarchurtha raidió ceartingearach [BT] ina sheasamh i gcúinne sa pháirc dhronuilleogach chothrománach ABCD.
12 m ar airde atá an crann agus tá $|BC| = 15$ m.
25° atá in uillinn airde bharr an chrainn ó A.
  (i) Faigh fad [AB].
  (ii) Ríomh uillinn airde bharr an chrainn ó C.
  (iii) Faigh $|DB|$.
  (iv) Ríomh uillinn airde bharr an chrainn ó D.
Bíodh gach freagra ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



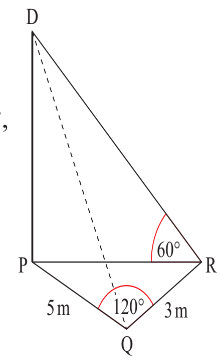
3. 200 m in airde go ceartingearach atá an balún X os cionn an phointe Y, atá ar leibhéal na talún. Ar leibhéal na talún atá an dá phointe, P agus Q, freisin.
48° atá in uillinn airde X ó P.
34° atá in uillinn airde X ó Q
  (i) Faigh $|PY|$ agus $|QY|$ ceart go dtí an méadar is gaire.
  (ii) Má tá $|\angle PYQ| = 84°$, faigh $|PQ|$ ceart go dtí an méadar is gaire.



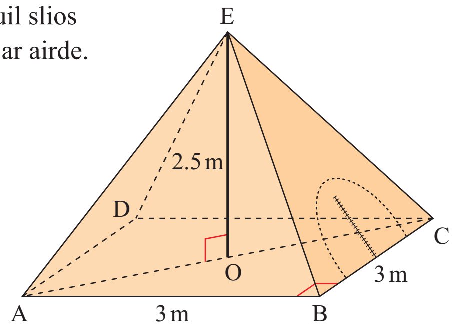
4. Sa tsamhail de rampa atá le feiceáil ar dheis, dronuilleog chothrománach atá in ABCD agus dronuilleog cheartingearach atá in ADEF.
Faigh (i) $|\angle ABF|$
  (ii) $|AC|$
  (iii) $|\angle ACF|$.
Bíodh gach freagra ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



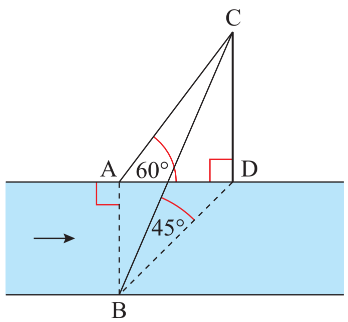
5. Is pointí ar phlána cothrománach iad P, Q agus R.
Is cuaille ceartingearach é [PD].
60° atá in uillinn airde D ó R.
Má tá $|PQ| = 5$ m, $|QR| = 3$ m agus $|\angle PQR| = 120°$, faigh
(i) $|PR|$
(ii) $|DQ|$, ceart go dtí an méadar is gaire.



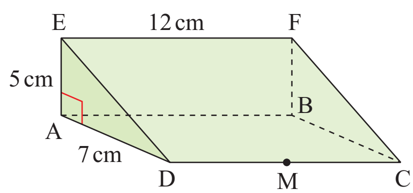
6. Cruth pirimide atá ar phuball. Tá bonn cearnógach air a bhfuil slios 3 mhéadar air, agus cuaille ceartingearach lárnach atá 2.5 m ar airde.
(i) Ríomh fad an imill ar fiar [AE], ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.
(ii) Faigh achar iomlán na gceithre aghaidh thriantánacha. Bíodh do fhreagra ina m^2, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



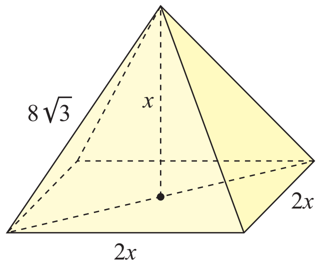
7. Soir díreach a shníonn abhainn a bhfuil túr ceartingearach [CD] ar a bruach clé.
60° atá in uillinn airde bharr an túir ón bpointe A atá suas an abhainn, ar an mbruach céanna leis an túr.
45° atá san uillinn airde ón bpointe B, atá trasna go díreach ó A ar an mbruach thall den abhainn.
Más 36 méadar ar airde atá an túr, faigh leithead na habhann, ceart go dtí an méadar is gaire.



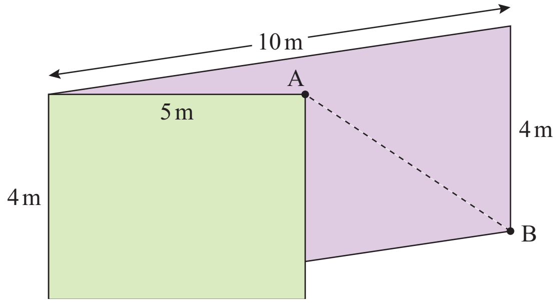
8. Dronuilleog chothrománach atá in ABCD san fhíor sholadach ar dheis, agus dronuilleog cheartingearach atá in ABFE.
Is é M lárphointe [CD].
Tá $|AD| = 7$ cm, $|AE| = 5$ cm agus $|EF| = 12$ cm.
Faigh iad seo
(i) $|DF|$ (ii) $|\angle BDF|$ (iii) $|\angle FMB|$.
Bíodh gach freagra ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



9. Dronphirimid atá le feiceáil sa léaráid ar dheis. Cearnóg atá sa bhonn, agus sleasa $2x$ cm air. $8\sqrt{3}$ cm ar fad atá gach ceann de na himill ar fiar. x cm ar airde atá an phirimid. Ríomh luach x.

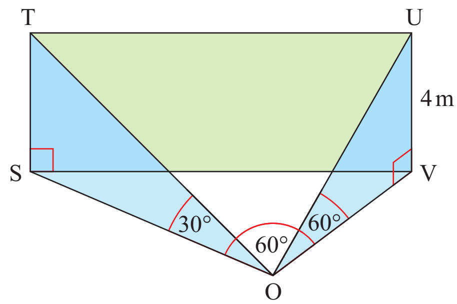


10. Tá dhá bhalla le feiceáil sa léaráid thíos, iad 10 méadar agus 5 mhéadar ar fad. Déanann an dá bhalla dronuillinn ag an bpointe a thagann siad le chéile. 4 mhéadar ar airde atá an dá bhalla.

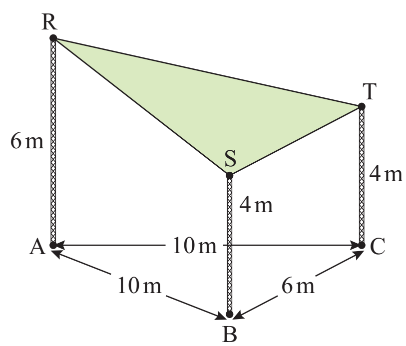


Ríomh an fad idir na pointí A agus B ar na ballaí.
Bíodh do fhreagra ina mhéadair, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

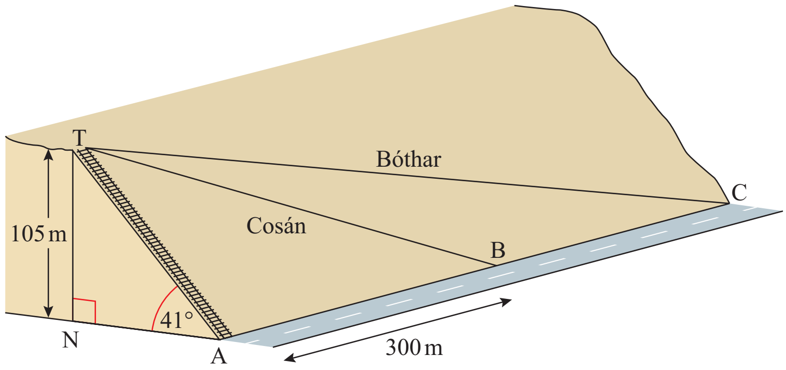
11. Balla ceartingearach TUVS atá le feiceáil sa léaráid ar dheis. Tá sé ceithre mhéadar ar airde.
Ón bpointe O ar leibhéal na talún, 60° atá san uillinn airde ó O go U agus 30° atá san uillinn airde ó O go T.
Má tá $|\angle SOV| = 60°$, faigh fad an bhalla [SV] ina mhéadair, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



12. Tá trí chuaille cheartingearacha agus iad ag iompar díon triantánach, RST, le feiceáil sa léaráid ar dheis.
$|AB| = |AC| = 10$ méadar, $|AR| = 6$ m,
$|SB| = |TC| = 4$ m agus $|BC| = 6$ m.
(i) Faigh an t-achar atá sa scáthlán ABC.
(ii) Faigh achar an dín RST.



13. Leiceann cnoic plánach, a théann le fána ar uillinn 41° leis an gcothrománatá le feiceáil sa léaráid ar dheis. Is é 105 m airde cheartingearach an chnoic. Ritheann bóthar cothrománach díreach le bun an chnoic. Ritheann iarnród cáblach AT díreach suas an cnoc.



(i) Ríomh fad an iarnróid [AT], ceart go dtí an méadar is gaire.

Tá cosán ag dul go díreach ó B go T, áit a bhfuil $|AB| = 300$ m

(ii) Ríomh fad an chosáin [BT].

Tá grádán '1 in aghaidh a 5' ag an mbóthar díreach CT, rud a chiallaíonn go n-éiríonn sé méadar amháin go ceartingearach in aghaidh gach cúig mhéadar a thaistealaítear feadh an bhóthair.

(iii) Faigh fad an bhóthair [CT].

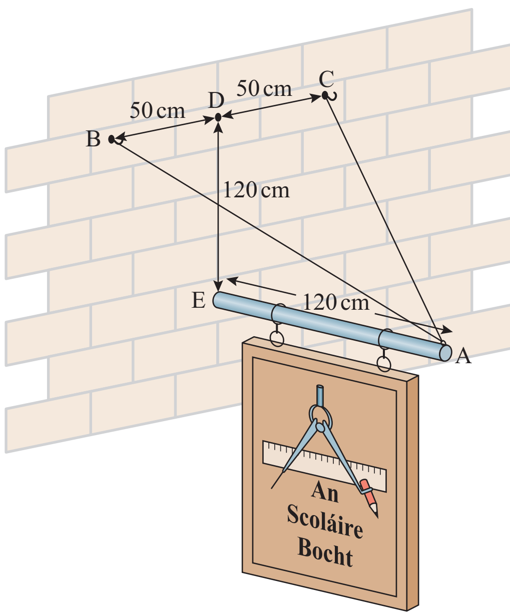
(iv) Faigh $|BC|$, ceart go dtí an méadar is gaire.

14. Sa léaráid ar dheis, tá comhartha le haghaidh teach ósta crochta ar bharra iarainn [EA]. Tá an barra ingearach le balla ceartingearach agus tá sé á iompar ag dhá shreang, [AB] agus [AC]. Tá na crúcaí ag B agus C i líne chothrománach agus tá D 120 cm go ceartingearach os cionn E.

(i) Ríomh fad [DA].

(ii) Ríomh fad gach sreinge, ceart go dtí an ceintiméadar is gaire.

(iii) Faigh an uillinn a dhéanann an tsreang AB leis an mballa, ceart go dtí an chéim is gaire.



Mír 2.7 Graif d'fheidhmeanna triantánachta

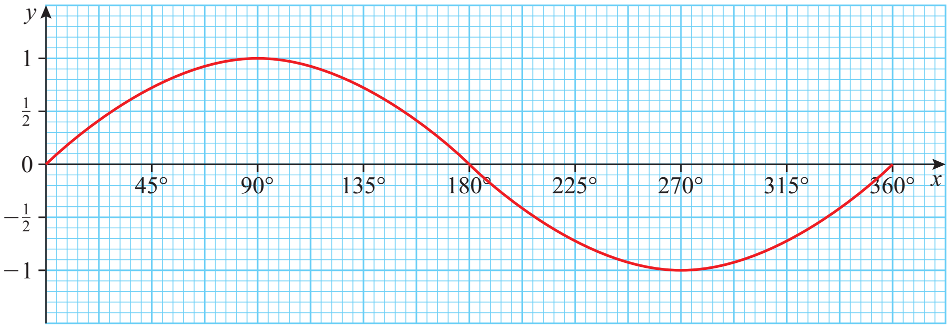
Graf $y = \sin x$

Dála feidhm ar bith eile, is féidir an fheidhm $y = \sin x$ a ghrafadh ach luachanna éagsúla ar x a ghlacadh agus na luachanna comhfhreagracha ar y a fháil ansin.

Is éard atá sa tábla thíos ná uillinneacha idir 0° agus 360° agus an luach atá ar shíneas (y-luach) gach ceann de na huillinneacha sin.

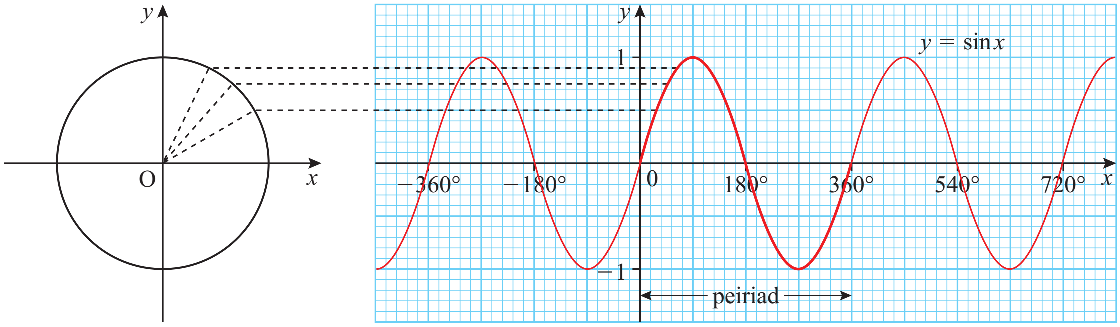
$x =$	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = \sin x$	0	0.7	1	0.7	0	−0.7	−1	−0.7	0

Nuair a rianaítear na hordphéirí sin faightear an cuar mín thíos:



Má leantar le luachanna x le linn imrothlú iomlán 360° nó −360° eile, is iad na luachanna céanna ar sin x a gheofar i gcás gach imrothlú 360° (nó 2π).

Seo agat graf $y = \sin x$ i gcás $-360° \leqslant x \leqslant 720°$.



Is léir ar an ngraf sin gurb iad na luachanna céanna ar shíneas x a thugtar i gcás gach 360° (nó 2π).

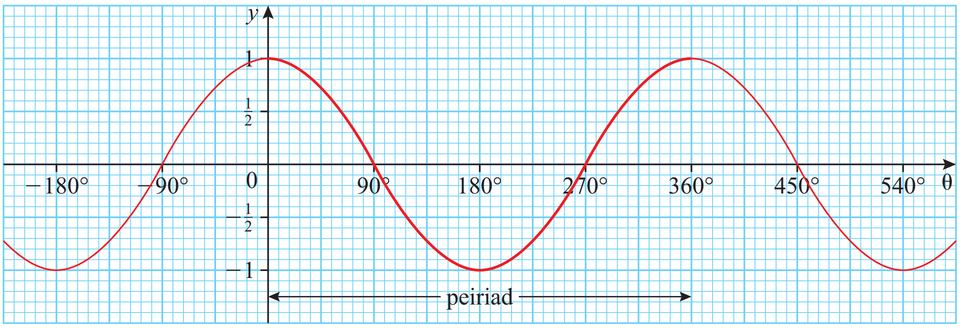
Sin é an fáth a ndeirimid gur graf **peiriadach** é graf sin x, agus gurb é 360° (nó 2π) **an peiriad**.

Is é 1 an y-luach is airde ar an ngraf agus is é −1 an luach is ísle.

Mar sin, is é [−1, 1] **raon** na feidhme.

Graf $y = \cos x$

Ach tacar ordphéirí den chineál céanna a chur le chéile, gheobhaimid an cuar seo a leanas le haghaidh $y = \cos x$ san fhearann $-180° \leqslant x \leqslant 540°$.



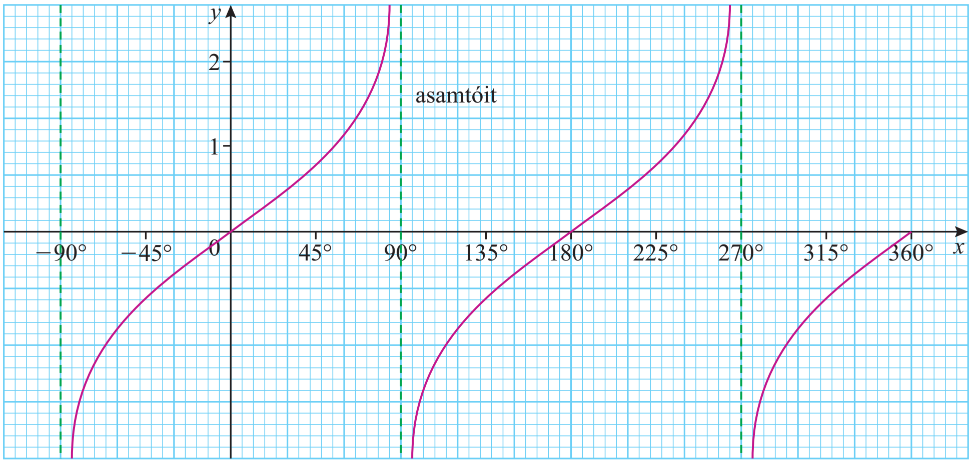
Dála sin x, tá cos x peiriadach agus is é **360° an peiriad**.

Is é [−1, 1] an raon sa chás seo freisin.

Graf $y = \tan x$

Seo tábla luachanna le haghaidh $y = \tan x$ i gcás $0 \leqslant x \leqslant 360°$.

$x =$	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y =$ tan	0	1	neamhshainithe	−1	0	1	neamhshainithe	−1	0



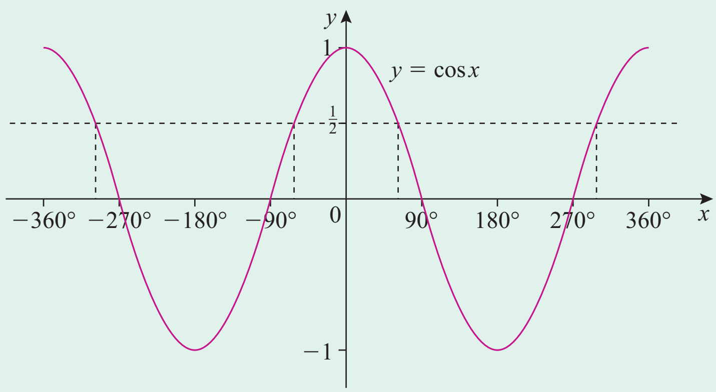
Tá feidhm an tangaint an-difriúil le feidhm an tsínis agus feidhm an chomhshínis, ach tá sí peiriadach mar sin féin. Faighimid na luachanna céanna i dtimthriallta 180°, mar sin is é 180° (nó π) an peiriad.

Ag $x = 90°$ agus ag $x = 270°$ faighimid dhá asamtóit cheartingearacha, línte a ndruideann cuar an tangaint leo ach nach dteagmhaíonn leo riamh.

Sampla 1

Tarraing graf de $y = \cos x$ san fhearann $-360° \leqslant x \leqslant 360°$.
Léirigh ar an ngraf go bhfuil ceithre uillinn san fhearann seo a shásaíonn an chothromóid $\cos x = \frac{1}{2}$.

Tá sceitse den ghraf le feiceáil thíos.



Trasnaíonn an líne $y = \frac{1}{2}$ $\left(\text{i.e. } \cos x = \frac{1}{2}\right)$ an graf ag ceithre phointe.

Tá luachanna na gceithre uillinn le fáil sna háiteanna a mbuaileann na línte ceartingearacha ó na pointí trasnaithe sin leis an x-ais.

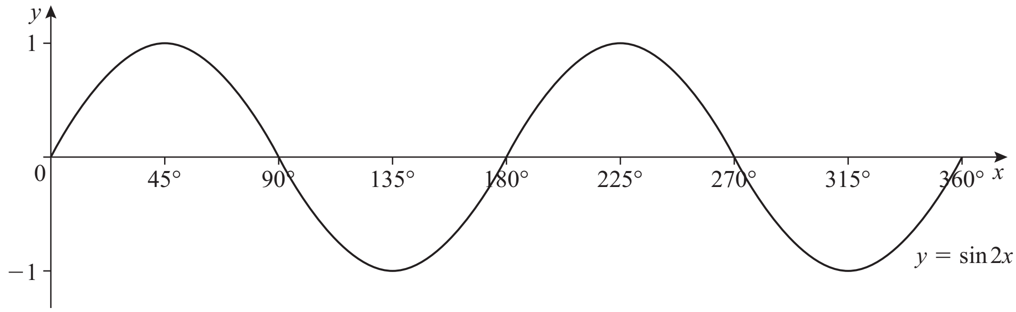
Graif de a sin nx agus a cos nx, $n \in \mathbb{N}$

Céard a tharlaíonn don fheidhm $y = \sin x$ nuair a iolraítear x faoi uimhir sa chaoi go mbíonn $y = \sin 2x$ nó $y = \sin 3x$?

Seo tábla luachanna le haghaidh $y = \sin 2x$.

$x =$	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$2x =$	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°	630°	720°
$y = \sin 2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Seo an chuma atá ar ghraf $y = \sin 2x$.

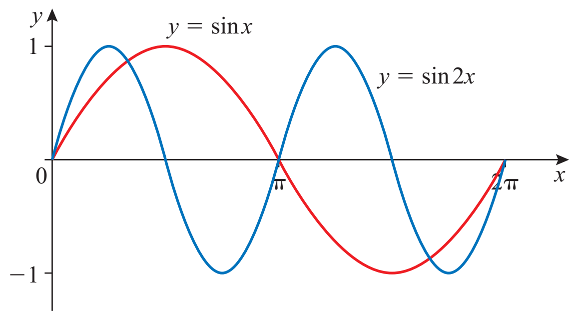


Tá an cruth céanna ar ghraf $y = \sin 2x$ agus atá ar ghraf $y = \sin x$ ach is é 180° an peiriad.
Is ionann sin agus a rá gur féidir **dhá** chuar sínis a chur isteach sa raon 0° go dtí 360°.

Mar sin, i gcás sin $2x$, is é an peiriad ná $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Ar an gcaoi chéanna, i gcás cos $2x$, is é an peiriad ná $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

I gcás $y = \sin x$, is é an peiriad ná 2π
I gcás $y = \sin 2x$, is é an peiriad ná $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$
I gcás $y = \sin 3x$, is é an peiriad ná $\dfrac{2\pi}{3}$
I gcás $y = \sin nx$, is é an peiriad ná $\dfrac{2\pi}{n}$



Ar an gcaoi chéanna, i gcás $y = \cos 3x$ is é an peiriad ná $\dfrac{2\pi}{3}$ agus i gcás $y = \cos nx$ is é an peiriad ná $\dfrac{2\pi}{n}$

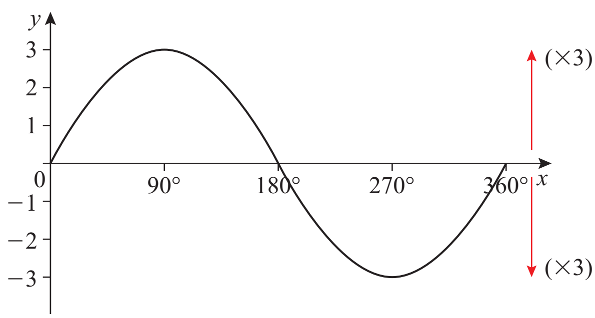
Graf $y = a \sin x$

Cuir i gcás graf $y = \mathbf{3} \sin x$.

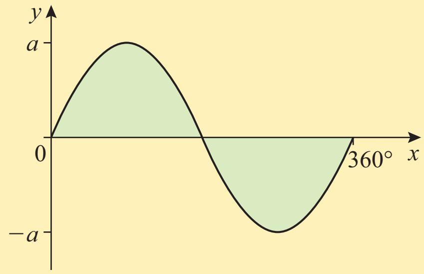
Is é éifeacht an **3** ná graf $y = \sin x$ a shíneadh go ceartingearach faoi thrí. Ní théann sé i bhfeidhm ar x-threo an ghraif ar chor ar bith.

Tá graf $y = 3 \sin x$ le feiceáil ar dheis.

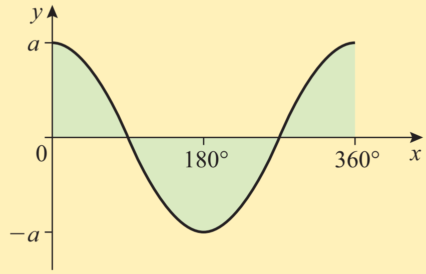
Is é $(-3, 3)$ an raon.



Raon feidhme



Baineann raon $[-a, a]$ le $y = a \sin x$



Baineann raon $[-a, a]$ le $y = a \cos x$

Sampla 2

Tarraing graf na feidhme $y = 4 \sin 2x$ san fhearann $-180° \leqslant x \leqslant 180°$.

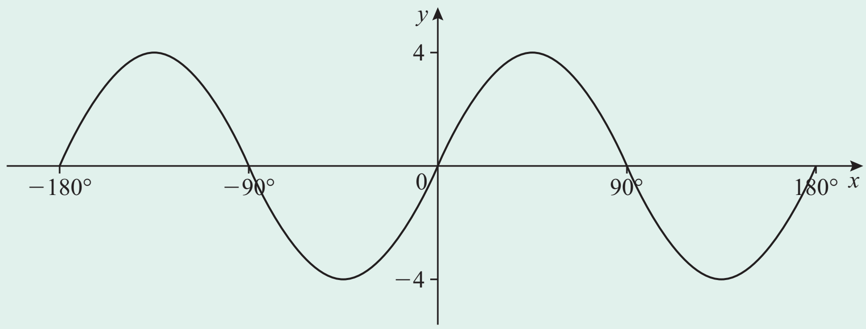
I gcás ghraf na feidhme $y = 4 \sin 2x$,

(i) peiriad $= \dfrac{2\pi}{2} = 180°$

i.e. is féidir cuar sínis iomlán a chur isteach san fhearann $0° - 180°$.

(ii) is é $[-4, 4]$ an raon.

Tá sceitse den ghraf le feiceáil thíos.



Cleachtadh 2.7

1. Tarraing graf na feidhme $y = \sin x$ san fhearann $0 \leqslant x \leqslant 720°$.

Céard é (i) peiriad

(ii) raon na feidhme?

Agus leas á bhaint as na haiseanna céanna agat, tarraing graf $y = 3 \sin x$ san fhearann céanna.

Céard é (iii) peiriad

(iv) raon na feidhme?

2. Tarraing sceitse den fheidhm $y = \cos x$ san fhearann $-360° \leqslant x \leqslant 360°$.

Scríobh síos (i) peiriad

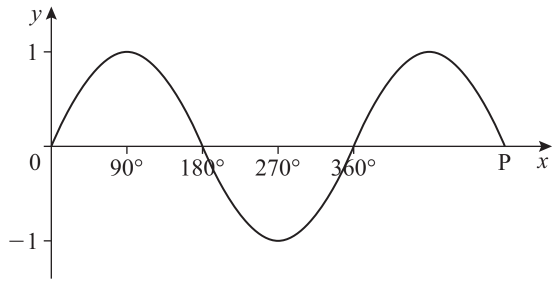
(ii) raon na feidhme.

3. Graf den fheidhm $y = \sin x$ atá sa léaráid ar dheis.

(i) Scríobh síos comhordanáidí an phointe P.

(ii) Déan cóip gharbh den ghraf agus bain úsáid as na haiseanna céanna chun graf a tharraingt de $y = \sin 2x$ san fhearann $0 \leqslant x \leqslant 360°$.

Scríobh síos peiriad $y = \sin 2x$.

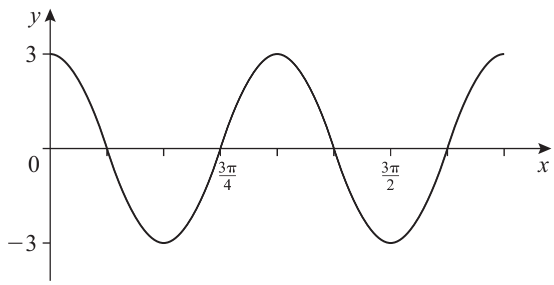


4. Scríobh síos peiriad agus raon gach ceann de na feidhmeanna seo:

(i) $y = 3 \cos x$ (ii) $y = 2 \sin 2x$ (iii) $y = 4 \sin 3x$

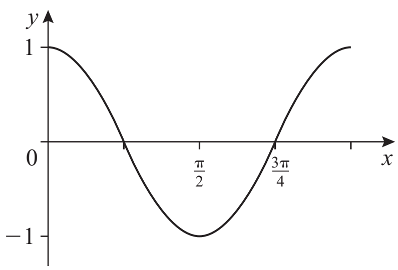
5. Scríobh síos peiriad agus raon na feidhme ar dheis.

Bunaithe air sin scríobh síos an fheidhm san fhoirm $y = \ldots$.

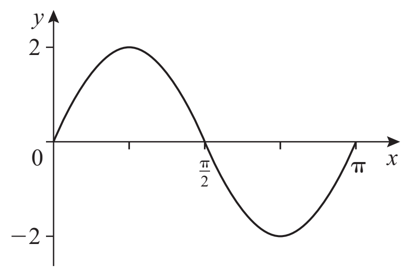


6. Scríobh síos peiriad agus raon gach ceann de na cuair seo a leanas.
Bunaithe orthu sin scríobh síos an fheidhm.

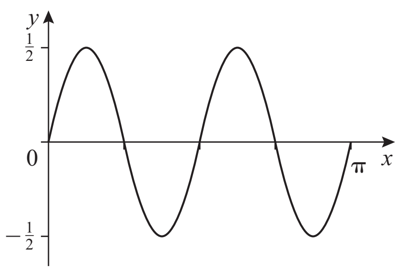
(i)



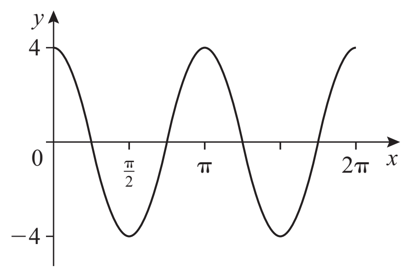
(ii)



(iii)



(iv)

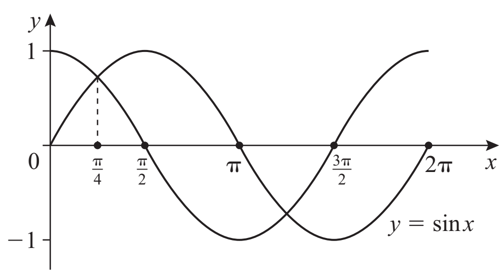


7. Tá graif $y = \sin x$ agus $y = \cos x$ le feiceáil ar dheis:

Scríobh síos, ón ngraf, luach gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\sin \frac{\pi}{2}$ (ii) $\sin \pi$ (iii) $\cos 0$

(iv) $\cos \pi$ (v) $\sin \frac{3\pi}{2}$



Cén dá luach ar x san fhearann atá tugtha a fhágann go bhfuil $\sin x = \cos x$?

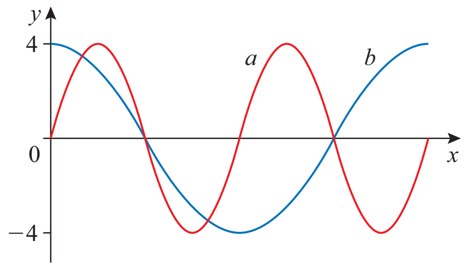
8. Ar an ngraf ar dheis, feicfidh tú dhá fheidhm

$y = 4 \cos x$

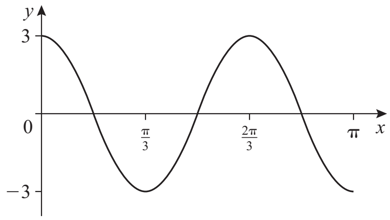
agus $y = 4 \sin 2x$

Scríobh síos cé acu feidhm é cuar *a* agus cé acu feidhm é cuar *b*.

Anois déan cóip de na graif agus lipéadaigh an scála ar an *x*-ais.



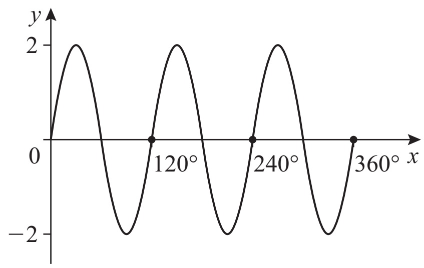
9. Scríobh síos cothromóid den fheidhm thíos.



Bunaithe air sin scríobh síos na luachanna ar x san fhearann atá tugtha a fhágann go bhfuil

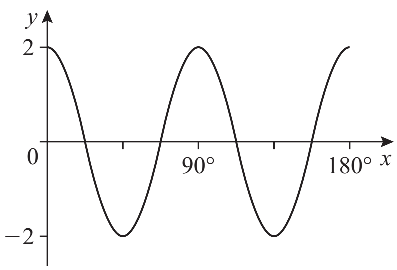
(i) $f(x) = 3$ (ii) $f(x) = 0$ (iii) $f(x) = -3$.

10. Scríobh síos cothromóid na feidhme triantánachta ar dheis.

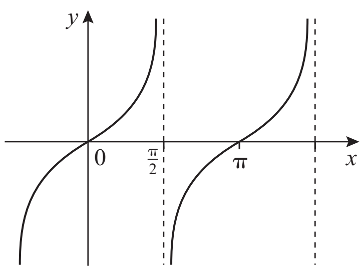


11. Scríobh síos feidhm fhéideartha i gcás gach ceann de na graif seo a leanas:

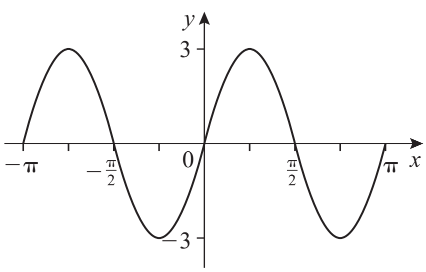
(i)



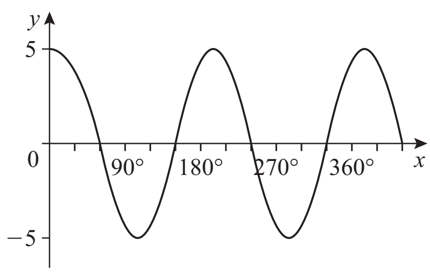
(ii)



(iii)



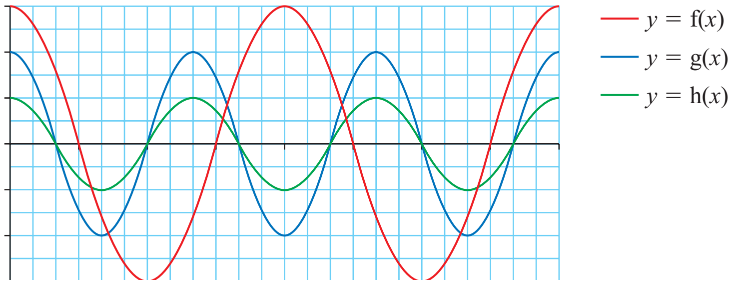
(iv)



12. Tá graif de thrí fheidhm léirithe thíos. Níl na scálaí ar na haiseanna lipéadaithe. Is iad na trí fheidhm ná:

$x \rightarrow \cos 3x$
$x \rightarrow 2 \cos 3x$
$x \rightarrow 3 \cos 2x$

Sainaithin na feidhmeanna agus scríobh do chuid freagraí sna spásanna laistíos den léaráid.



(i) $f(x) =$; $g(x) =$; $h(x) =$

(ii) Déan cóip gharbh den léaráid agus lipéadaigh na scálaí ar an x-ais agus ar an y-ais.

Mír 2.8 Réitigh ghinearálta ar chothromóidí triantánachta

I Mír 2.3 réitíomar cothromóidí ar nós $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i gcás uillinneacha sa raon $0 \leqslant x \leqslant 360°$ (nó $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$).

Is iondúil gur thug sé sin dhá luach dúinn ar an uillinn x.

Cuir i gcás arís an chothromóid $\cos \theta = \frac{1}{2}$.

An freagra a thugann áireamhán atá ag ríomh i gcéimeanna ná 60°.

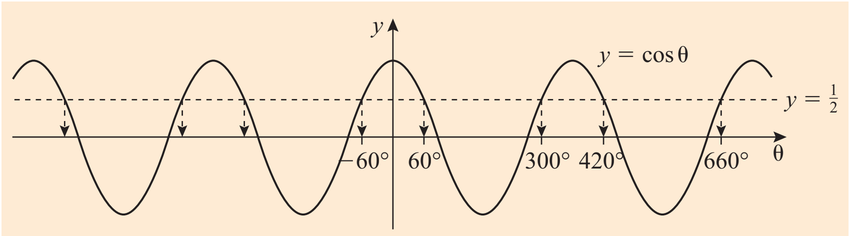
Ach ná déan dearmad nach bhfuil ansin ach an príomhluach.

Seiceáil go bhfuil $\theta = 300°$ agus $\theta = 420°$ ceart freisin.

I gcás na cothromóide $\cos \theta = \frac{1}{2}$, níl aon srian le raon na luachanna ar θ atá ina réitigh.

Léiríonn an graf thíos an fheidhm $y = \cos \theta$ agus an fheidhm $y = \frac{1}{2}$.

Is léir ón ngraf go bhfuil líon éigríochta réiteach ar an gcothromóid $y = \frac{1}{2}$ mar go leanann an graf $y = \cos \theta$ an patrún céanna arís is arís eile, gan aon chríoch.



Sa raon $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$, tá dhá luach ar θ a fhágann go bhfuil $\cos \theta = \frac{1}{2}$.

Is iad na luachanna sin ná 60° agus 300°. Tabhair faoi deara gurb ionann $\theta = 420°$ agus $60° + 360°$ agus gurb ionann $\theta = 660°$ agus $300° + 360°$. Mar sin is féidir tuilleadh réiteach ar an gcothromóid a fháil ach 360° a shuimiú arís is arís eile leis na huillinneacha 60° agus 300°.

T&T4.indb 67 10/07/2018 17:45:39

Mar sin is iad réitigh na cothromóide cos $\theta = \frac{1}{2}$ ná

$\theta = 60° + n360°$ nó $\theta = 300° + n360°$, nuair is slánuimhir é n.

Réiteach ginearálta na cothromóide a thugtar air sin.

Is féidir réiteach ginearálta cothromóid triantánachta ar bith atá san fhoirm sin $\theta = k$ nó cos $\theta = k$ a fháil ar an gcaoi chéanna.

Tugtar an modh sin thíos.

Cuimhnigh

> Chun réiteach ginearálta sin $x = k$ nó cos $x = k$ a fháil, faigheann tú an dá réiteach san eatramh $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$ agus ansin suimíonn tú $n360°$ leis an dá réiteach.

Sampla 1

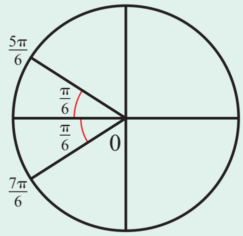
Faigh réiteach ginearálta na cothromóide cos $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, θ ina raidiain.

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ (30°)… an uillinn tagartha

tá comhshíneas diúltach sa 2ú agus sa 3ú ceathrú.

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$ sa 2ú agus sa 3ú ceathrú

$\Rightarrow \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$ nó $\frac{7\pi}{6}$



Is é an réiteach ginearálta ná $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$ nó $2n\pi + \frac{7\pi}{6}$.

Sampla 2

Réitigh an chothromóid sin $3\theta = \frac{1}{2}$, i gcás $\theta \in R$, θ ina raidiain.

$\sin 3\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \quad 3\theta = \frac{\pi}{6}$ nó $\frac{5\pi}{6}$ … tá an síneas deimhneach sa 1ú agus sa 2ú ceathrú

Na réitigh ar fad le haghaidh 3θ (i.e. an réiteach ginearálta) ná

$3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ nó $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow \quad \theta = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$ nó $\frac{2n\pi}{3} + \frac{5\pi}{18}$

> Ba chóir an réiteach ginearálta iomlán le haghaidh 3θ a fháil sula roinntear é ar a 3 chun na luachanna ginearálta ar θ a fháil.

Nóta: Léirítear sa sampla seo a leanas an chaoi le húsáid a bhaint as réiteach ginearálta cothromóide chun gach uillinn in eatramh ar leith a fháil.

Sampla 3

Faigh na réitigh uile ar $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$ i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

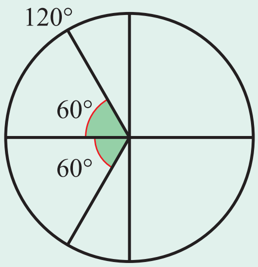
$\cos 2\theta = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

$\Rightarrow \quad 2\theta = 60°$ … an uillinn tagartha

tá an comhshíneas diúltach sa 2ú agus sa 3ú ceathrú.

$\Rightarrow \quad 2\theta = 120°$ nó $240°$

Chun na réitigh uile a fháil, suimítear $n(360°)$ le gach uillinn.



$\Rightarrow \quad 2\theta = 120° + n(360°)$ nó $2\theta = 240° + n(360°)$

$\Rightarrow \quad \theta = 60° + n(180°)$ nó $\theta = 120° + n(180°)$

Chun luachanna θ sa raon $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$, bíodh $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$n = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60°$ nó $120°$

$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 240°$ nó $300°$

$n = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta = 420°$ nó $480°$

Ós lasmuigh den raon 0° go 360° atá 420° agus 480°, ní chuirimid na luachanna sin san áireamh.
Mar sin is iad luachanna θ ná 60°, 120°, 240°, 300°.

Réiteach ginearálta tan $x = k$

Is féidir an réiteach ginearálta ar $\tan x = k$ a fháil ar bhealach atá cosúil leis na samplaí thuas. Ach is é π peiriad chuar an tangaint; mar sin faighimid luach x san eatramh 0 go π agus ansin suimítear $n\pi$ leis sin chun an réiteach ginearálta a fháil.

Mar shampla, má tá $\tan \theta = \sqrt{3}$

$$\theta = 60° \left(\text{nó } \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \theta = n180° + \frac{\pi}{3}, \text{ i.e., an réiteach ginearálta}$$

Cleachtadh 2.8

1. Faigh an dá luach ar x a fhágann go bhfuil $\sin x = \frac{1}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 360°$.

2. Faigh an dá réiteach ar an gcothromóid $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i gcás $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3. Má tá $\tan \theta = 1$, faigh an dá réiteach ar an gcothromóid $y = \tan \theta$ i gcás $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

4. Faigh **gach** réiteach ar an gcothromóid $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$, i gcás $\theta \in R$ agus θ ina raidiain.

5. Faigh réiteach ginearálta na cothromóide $\cos 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, i gcás $\theta \in R$ agus θ ina chéimeanna.

6. Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\sin 3\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, i gcás $\theta \in R$ agus θ ina raidiain.

7. Faigh réiteach ginearálta na cothromóide $2 \cos 4\theta = 1$, θ ina raidiain.

8. Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, x ina raidiain.

9. Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, i gcás $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

10. Má tá $2 \cos 2\theta = -\sqrt{3}$, faigh gach luach ar θ a shásaíonn an chothromóid sin, i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

11. Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\tan 2\theta = \sqrt{3}$, $\theta \in R$ agus θ ina raidiain.

12. Faigh réiteach ginearálta na cothromóide $2 \cos 4\theta = \sqrt{3}$, $\theta \in R$ agus θ ina raidiain.

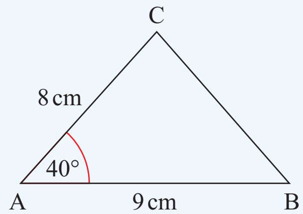
13. Faigh gach réiteach ar an gcothromóid $\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$, i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

14. Faigh, ceart go dtí an chéim is gaire, na réitigh uile ar an gcothromóid $\sin 3\theta = 0.78$ i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

Cuir triail ort féin 2

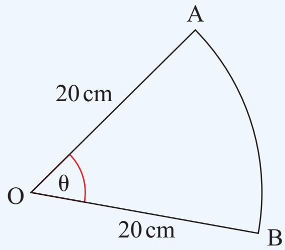
Ceisteanna A

1. I gcás an triantáin ABC ar dheis, $|AB| = 9$ cm, $|AC| = 8$ cm agus $|\angle CAB| = 40°$.
Faigh achar $\triangle ABC$, ina cm^2, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

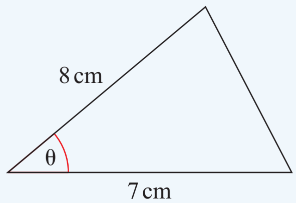


2. Faigh na luachanna ar θ a fhágann go bhfuil $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

3. 240 cm^2 an t-achar atá sa teascóg AOB.
(i) Scríobh θ ina raidiain.
(ii) Faigh fad an stua AB.



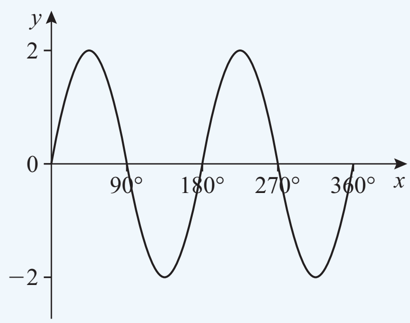
4. Má tá $\tan\theta = \frac{3}{4}$, faigh achar an triantáin ar dheis gan áireamhán a úsáid.



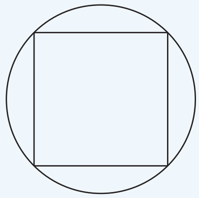
5. (i) Scríobh síos peiriad agus raon na feidhme a bhfuil a graf le feiceáil ar dheis.
(ii) Más é

$$y = a \sin bx,$$

an fheidhm, faigh luachanna a agus b.



6. Tá cearnóg inscríofa i gciorcal, mar atá le feiceáil ar dheis. Más π aonad cearnach atá in achar an chiorcail, faigh achar na cearnóige.



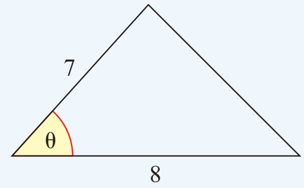
7. Má tá sin $\theta = -\frac{3}{5}$ agus cos $\theta = \frac{4}{5}$, faigh luach tan θ san fhearann $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$, gan áireamhán a úsáid.

8. 20 cm^2 an t-achar atá i dtriantán PQR. $|PQ| = 10$ cm agus $|PR| = 8$ cm.

Faigh an dá luach a d'fhéadfadh a bheith ar $|\angle QPR|$.

9. Faigh na luachanna ar θ a fhágann go bhfuil $4 \sin \theta = 3$, $0 \leqslant \theta \leqslant 360°$. Bíodh gach freagra ceart go dtí an chéim is gaire.

10. Más é $14\sqrt{3}$ aonad cearnach achar an triantáin sa léaráid, faigh luach cos θ. Bíodh do fhreagra ina chodán.



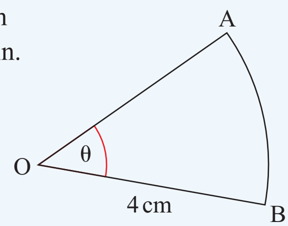
Ceisteanna B

1. 17 cm, 12 cm agus 8 cm ar fad atá sleasa triantáin áirithe.
  (i) Faigh an uillinn is mó sa triantán, ceart go dtí an chéim is gaire.
  (ii) Bunaithe air sin ríomh achar an triantáin ina cm^2, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

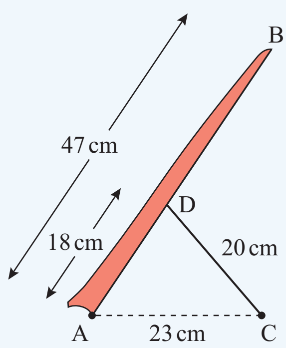
2. (i) Faigh gach réiteach ar an gcothromóid

$$\cos 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \theta \in R \text{ agus } \theta \text{ ina raidiain.}$$

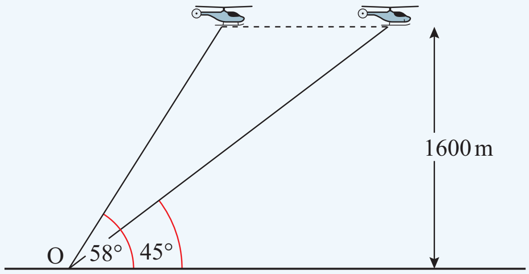
  (ii) Teascóg de chiorcal é AOB. Is é O lárphointe an chiorcail, agus 4 cm atá sa gha. Más ionann achar AOB agus 12 cm^2, scríobh θ ina raidiain.



3. Boinéad gluaisteáin [AB] atá sa léaráid ar dheis, le inse ag A agus é ag luí ar an teanntóg [CD].
$|AC| = 23$ cm, $|AB| = 47$ cm, $|AD| = 18$ cm agus $|CD| = 20$ cm.
  (i) Ríomh méid na huillinne CAD, ceart go dtí an chéim is gaire.
  (ii) Faigh airde B os cionn leibhéal AC.
  Bíodh do fhreagra ceart go dtí an ceintiméadar is gaire.



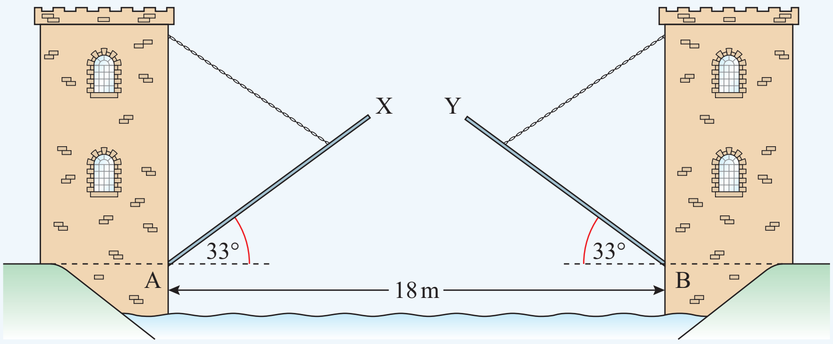
4. Is é atá sa léaráid thíos, dhá amharc ón bpointe O ar héileacaptar atá ag eitilt 1600 méadar os cionn na talún. Ar an gcéad amharc, bhí an héileacaptar soir díreach ó O agus ba é 58° an uillinn airde. I ndiaidh nóiméad amháin, bhí sé fós soir díreach ó O, ach ba é 45° an uillinn airde.



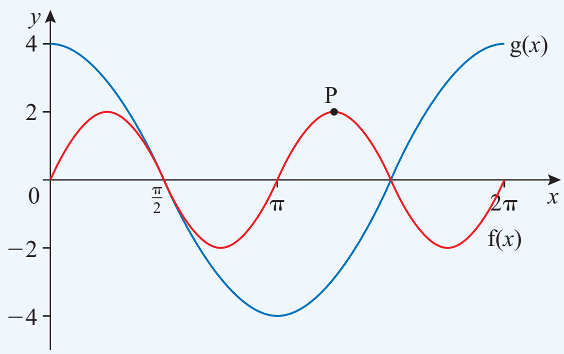
Ríomh luas an héileacaptair ina chiliméadair san uair, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.

5. I gcás $\triangle ABC$, $|AB| = 10$ cm, $|BC| = a\sqrt{3}$ cm, $|AC| = 5\sqrt{13}$ cm agus $|\angle ABC| = 150°$.
Faigh (i) luach *a*. (ii) achar beacht $\triangle ABC$.

6. Tá droichead tógála siméadrach le feiceáil thíos. Nuair a íslítear na bóithre [AX] agus [BY] buaileann siad le chéile díreach sa lár.
Ríomh fad [XY] ina mhéadair, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



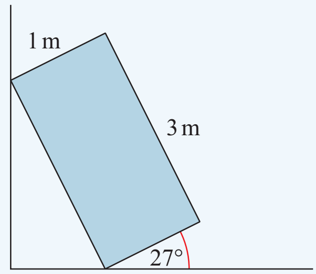
7. Tá graf déanta de dhá fheidhm thriantánachta f(x) agus g(x) thíos:



(i) Céard é raon g(x)?
(ii) Céard é peiriad f(x)?
(iii) Scríobh síos luach g(π).
(iv) Scríobh síos cothromóid gach feidhme.
(v) Scríobh síos comhordanáidí an phointe P.

T&T4.indb 73 10/07/2018 17:45:42

8. Tá cloch phábhála dhronuilleogach 3 m faoi 1 m leagtha i gcoinne balla ceartingearach, mar atá le feiceáil ar dheis. Cén airde os cionn na talún atá an pointe is airde den chloch? Tabhair do fhreagra ina mhéadair, ceart go dtí dhá ionad de dheachúlacha.



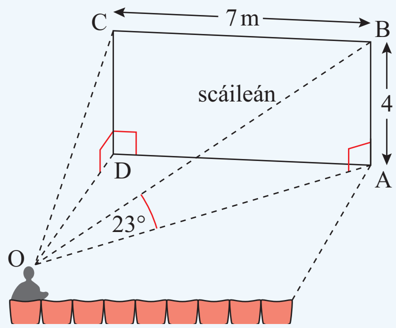
9. Tá duine ag breathnú ar scáileán sa phictiúrlann, í ina suí go díreach os comhair chúinne íochtarach an scáileáin, ar thaobh na láimhe clé. Le go mbeadh radharc sásúil ag duine ar an scáileán, ní mór nach n-éireodh na súile trí níos mó ná 30° ó bhun go barr an scáileáin.

(i) Ríomh:

(a) OA, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

(b) an uillinn idir an dá phlána OAB agus ABCD, ceart go dtí an chéim is gaire.

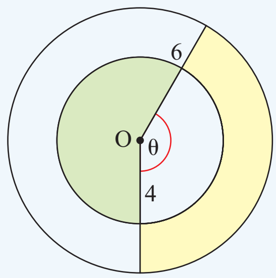
(ii) An bhfuil 'radharc sásúil' díreach ar aghaidh ag an duine seo?



10. (i) Réitigh an chothromóid $3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, i gcás $\theta \in R$ agus θ ina raidiain.

(ii) Sa léaráid ar dheis feicfidh tú dhá chiorcal chomhlárnacha. Is é O a lárphointe agus tá a ngathanna 4 cm agus 6 cm ar fad. Is ionann achar an dá réigiún scáthaithe.

Léirigh go bhfuil $\theta = \frac{8\pi}{9}$ raidiain.



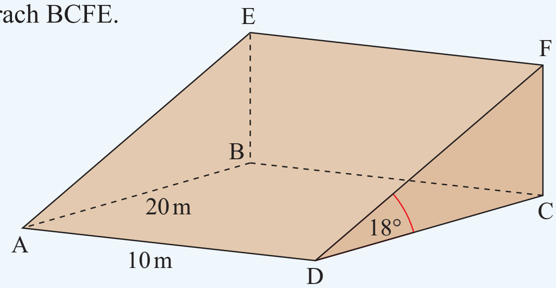
Ceisteanna C

1. Tá rampa ADFE tógtha i gcoinne balla ceartingearach BCFE. Is dronuilleoga iad ADFE agus BCFE.
$|AB| = 20$ m, $|AD| = 10$ m agus $|\angle FDC| = 18°$.
Ríomh gach ceann díobh seo a leanas, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha:

(i) $|CF|$ (ii) $|DF|$

(iii) $|\angle CAD|$ (iv) $|AF|$

(v) $|\angle FAC|$

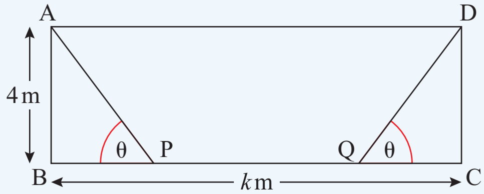


2. Léaráid den dronuilleog ABCD atá le feiceáil ar dheis. Tá $|AB| = 4$ m agus $|BC| = k$ méadar.

$|\angle APB| = |\angle CQD| = \theta.$

(i) Scríobh $|PQ|$ i dtéarmaí k agus tan θ.

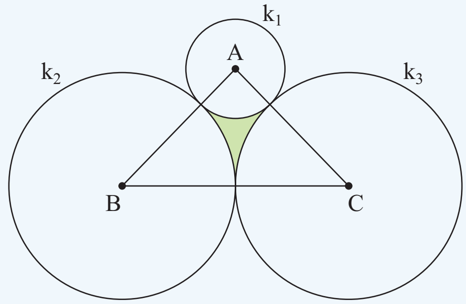
(ii) Má tá $k = 12$ m agus $|PQ| = (12 - 4\sqrt{3})$ m, faigh θ, ceart go dtí an chéim is gaire.



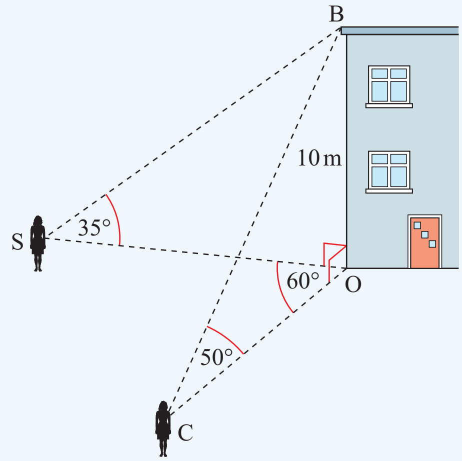
3. Is iad A, B agus C lárphointí na gciorcal k_1, k_2 agus k_3, mar atá léirithe. Teagmhaíonn na trí chiorcal le chéile go seachtrach agus AB $\perp$ AC. $2\sqrt{2}$ cm atá ga k_2 agus k_3 araon.

(i) Faigh fad gha k_1 i bhfoirm surda.

(ii) Faigh achar an réigiúin scáthaithe i dtéarmaí π.



4. Tá Sorcha (S) agus Cáit (C) ina seasamh fad slí áirithe ó fhoirgneamh atá 10 m ar airde. Tomhaiseann Sorcha gurb é 35° uillinn airde bharr an fhoirgnimh.
Ón áit a bhfuil Cáit, is é 50° uillinn airde bharr an fhoirgnimh.
Má tá 60° san $|\angle SOK|$ idir Sorcha, Cáit agus bun an fhoirgnimh, faigh an fad atá idir Sorcha agus Cáit, ceart go dtí an méadar is gaire.

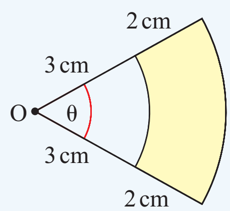


5. (i) Tarraing graf den fheidhm $y = 3 \sin 2x$ san fhearann $0° \leqslant x \leqslant 360°$.
Scríobh síos peiriad agus raon na feidhme.

(ii) Bain úsáid as na toisí atá le feiceáil sa léaráid ar dheis agus,

(a) faigh imlíne an réigiúin scáthaithe nuair atá $\theta = 0.8$ raidiain

(b) faigh luach θ nuair is 14 cm imlíne an réigiúin scáthaithe.



6. a, b agus c ar fad atá sleasa triantáin
Is í A an uillinn urchomhaireach leis an slios dar fad a.

(i) Cruthaigh go bhfuil $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

(ii) Más slánuimhreacha díreach i ndiaidh a chéile iad a, b agus c léirigh go bhfuil

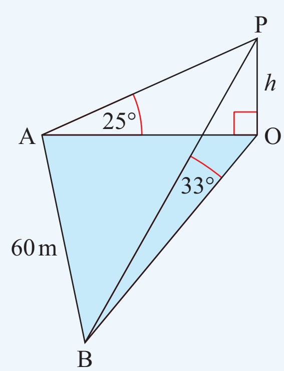
$$\cos A = \frac{a + 5}{2a + 4}$$

7. Sa léaráid, is pointí i bplána cothrománach iad A, B agus O agus tá P os cionn O go ceartingearach, áit a bhfuil OP $= h$ m.
Tá A siar díreach ó O, tá B ó dheas díreach ó O agus tá AB $= 60$ m.
25° atá in uillinn airde P ó A agus 33° atá in uillinn airde P ó B.

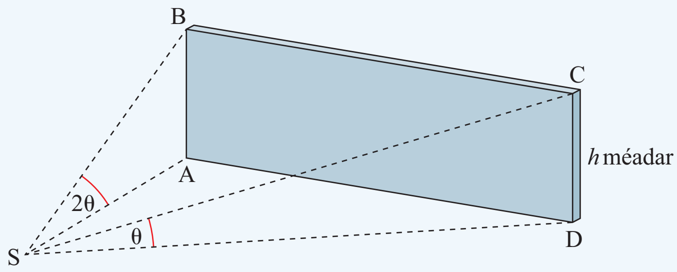
(i) Faigh an fad [AO] i dtéarmaí h.

(ii) Faigh an fad [BO] i dtéarmaí h.

(iii) Faigh luach h, ina mhéadair, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

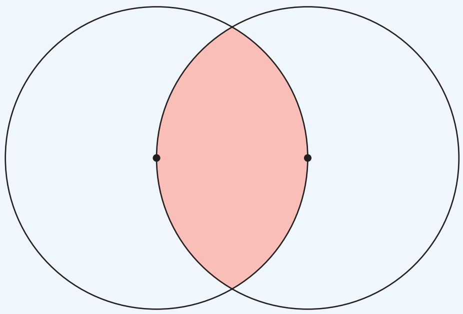


8. Tá balla ceartingearach ABCD, atá h méadar ar airde, tógtha ar thalamh chothrom. Is é 2θ uillinn airde B ón bpointe S agus is é θ uillinn airde an phointe C ó S.
Má tá $|SD| = 5|SA|$, faigh θ ceart go dtí an chéim is gaire.
$\left[\text{Leid: } \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right]$

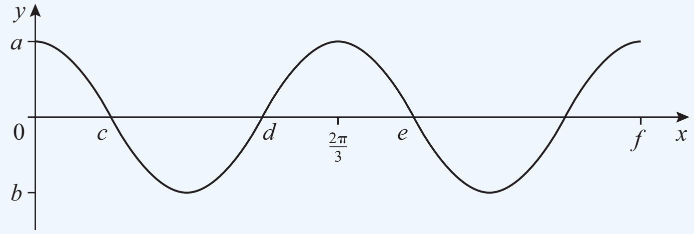


9. (i) Faigh gach réiteach ar an gcothromóid
$\cos 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, i gcás $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

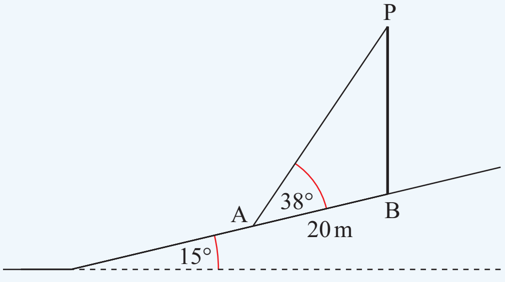
(ii) 4 cm atá ga an dá chiorcal ar dheis.
I gcás an dá chiorcal, tá a lárphointe buailte ar imlíne an chiorcail eile.
Faigh an t-achar *beacht* atá i bpáirt ag an dá chiorcal.



10. (i) Tá graf $y = 4\cos 3x$ sa léaráid thíos.
Scríobh síos comhordanáidí na bpointí a, b, c, d, e agus f.
Tabhair na huillinneacha ina raidiain.



(ii) Cuirtear suas cuaille [PB] ar thalamh atá ag dul le fána, mar atá léirithe.
Uillinn 15° atá ar fhána na talún.
Ag an bpointe A ar an bhfána, 20 méadar ó bhonn an chuaille, is é 38° an uillinn airde go barr an chuaille.
Faigh airde an chuaille ina méadair, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



Achoimre ar na Príomhphointí

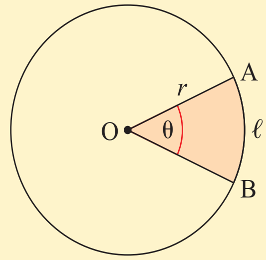
1. Tomhas ina raidiain

Is ionann θ agus 1 raidian amháin má bhíonn an stua AB agus an ga ar comhfhad.

$$1 \text{ raidian} = \frac{180°}{\pi}$$

Fad an stua AB: $\ell = r\theta$

Achar na teascóige AOB: Achar $= \frac{1}{2}r^2\theta$



2. Cóimheasa uillinneacha níos mó ná 90°

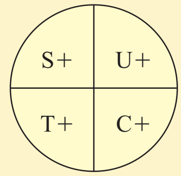
Léiríonn an léaráid na cóimheasa deimhneacha sna ceithre cheathrú.

(i) Sa chéad cheathrú, tá na cóimheasa uile (U) deimhneach

(ii) Sa dara ceathrú, sin (S) amháin atá deimhneach

(iii) Sa tríú ceathrú, tan (T) amháin atá deimhneach

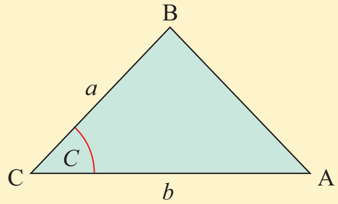
(iv) Sa cheathrú ceathrú, cos (C) amháin atá deimhneach.



3. Achar triantáin

Achar an triantáin ABC:

Achar $= \frac{1}{2}ab \sin C$



4. Riail an tSínis

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{nó} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

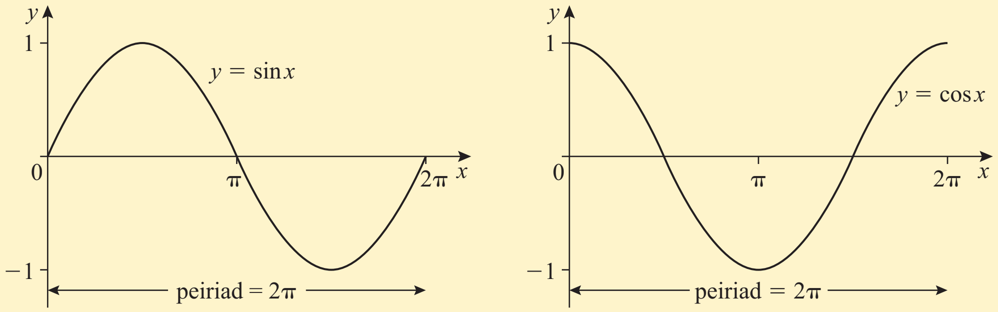
5. Riail an Chomhshínis

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{nó} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

6. Réiteach ginearálta ar chothromóidí triantánachta

Chun réiteach ginearálta (gach réiteach) na gcothromóidí $\sin x = k$ nó $\cos x = k$ a fháil, faigh ar dtús an dá réiteach san eatramh $0° \leqslant x \leqslant 360°$ agus ansin suimigh $n360°$ le gach ceann de na réitigh. Chun an chothromóid $\sin 3x = k$, a réiteach, faigh i dtosach an réiteach ginearálta i gcás na huillinne 3x agus ansin roinn an dá chuid ar 3 chun an réiteach ginearálta a fháil i gcás x.

7. Graif d'fheidhmeanna triantánachta



360° (nó 2π) an peiriad a bhaineann le feidhm an tsínis agus feidhm an chomhshínis.
180° (nó π) an peiriad a bhaineann le feidhm an tangaint.

An Chéimseata 1

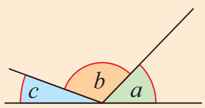
caibidil 3

Focail thábhachtacha

comhchosach comhshleasach comhfhreagrach ailtéarnach aicsím teoirim coinbhéarta atoradh cóimheas trasnaí mírlíne triantáin chomhchosúla tadhlaí corda pointe tadhaill

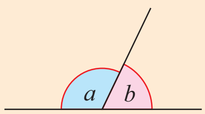
Mír 3.1 Uillinneacha, triantáin agus comhthreomharáin

Cuirfidh na léaráidí thíos i gcuimhne dúinn cuid de na nithe atá feicthe againn go dtí seo agus stáidéar á dhéanamh againn ar an gcéimseata.



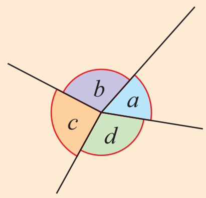
$a + b + c = 180°$

Is é 180° suim na n-uillinneacha a thagann le chéile ag pointe amháin ar líne dhíreach.



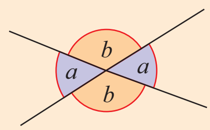
$a + b = 180°$

Uillinneacha forlíontacha a thugtar ar phéire uillinneacha arb é 180° a suim.



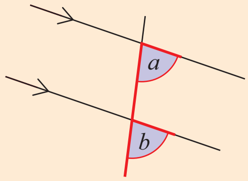
$a + b + c + d = 360°$

Is é 360° suim na n-uillinneacha a thagann le chéile ag pointe amháin faoi leith.

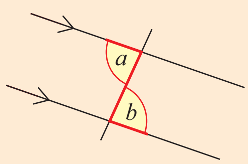


Nuair a thrasnaíonn dhá líne a chéile, ar cóimhéid a bhíonn **rinnuillinneacha urchomhaireacha**.

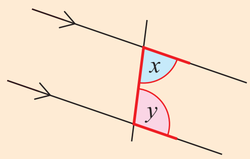
Baineann na hairíonna seo a leanas leis na huillinneacha sin a chruthaítear nuair a thrasnaíonn líne dhíreach péire línte comhthreomhara:



Bíonn **uillinneacha comhfhreagracha** ar cóimhéid lena chéile. Mar sin, tá $a = b$. Féadfaidh tú iad a aimsiú ach F-chruth a chuardach.

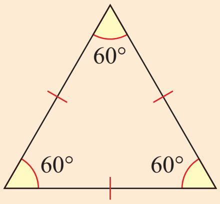


Bíonn **uillinneacha ailtéarnacha** ar cóimhéid lena chéile. Mar sin, tá $a = b$. Cuardaigh Z-chruth.

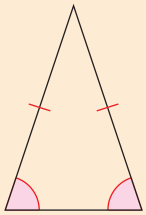


Is é 180° suim na **n-uillinneacha inmheánacha** x agus y. $x + y = 180°$.

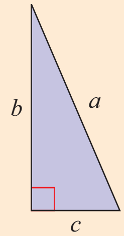
Triantáin agus a n-airíonna



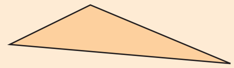
Triantán comhshleasach:
- na 3 shlios ar comhfhad
- na 3 uillinn inmheánacha ar cóimhéid (60°)



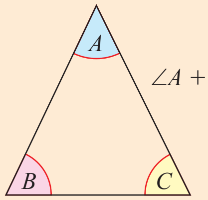
Triantán comhchosach:
- dhá shlios ar comhfhad
- an dá bhonnuillinn ar cóimhéid



Triantán dronuilleach:
- 90° atá in uillinn amháin $a^2 = b^2 + c^2$

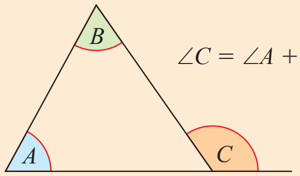


Triantán corrshleasach a thugtar ar thriantán nach mbíonn aon dá shlios ar comhfhad ná aon dá uillinn ar cóimhéid ann.



$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Is é 180° suim na n-uillinneacha i dtriantán ar bith.

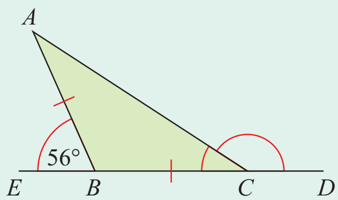


$\angle C = \angle A + \angle B$

Bíonn **uillinn sheachtrach** triantáin ar bith cothrom le suim an dá uillinn inmheánacha urchomhaireacha.

Sampla 1

Sa triantán ar dheis, $|AB| = |BC|$, agus $|\angle ABE| = 56°$.
Faigh (i) $|\angle ACB|$ (ii) $|\angle ACD|$.



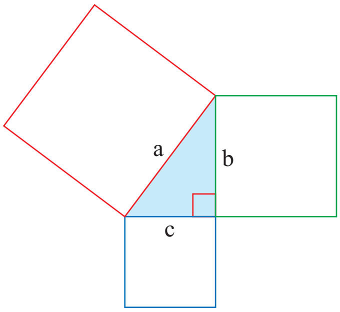
(i) $|\angle ABC| = 180° - 56° = 124°$
$|\angle BAC| = |\angle BCA|$ … triantán comhchosach
Ach $|\angle BAC| + |\angle ACB| = 180° - 124° = 56°$
$\Rightarrow |\angle ACB| = 28°$

(ii) $|\angle ACB| + |\angle ACD| = 180°$ … líne dhíreach
$\Rightarrow |\angle ACD| = 180° - |\angle ACB|$
$= 180° - 28°$
$\Rightarrow |\angle ACD| = 152°$

Teoirim Phíotagarás

Matamaiticeoir agus fealsamh Gréagach a mhair sa séú céad RCh ba ea Píotagarás. Tá an teoirim a luaitear leis, Teoirim Phíotagarás, ar na teoirimí is cailiúla agus is coitianta i gcúrsaí matamaitice.

Teoirim Phíotagarás
I dtriantán dronuilleach, tá achar na cearnóige ar an taobhagán cothrom le suim achair na gcearnóg ar an dá shlios eile.



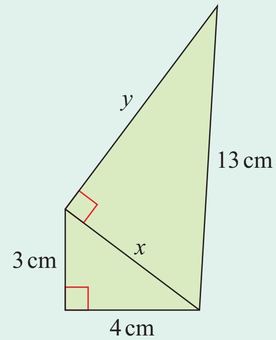
$a^2 = b^2 + c^2$

Sampla 2

Ríomh na faid a bhfuil x agus y orthu.

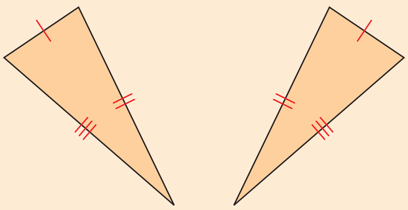
$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 \\ x &= \sqrt{25} \\ x &= 5\text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= 13^2 \\ y^2 + 5^2 &= 13^2 \\ y^2 + 25 &= 169 \\ y^2 &= 169 - 25 \\ y &= \sqrt{144} \\ y &= 12\text{ cm} \end{aligned}$$

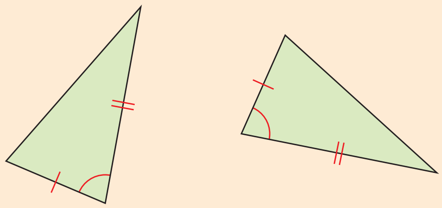


Triantáin iomchuí

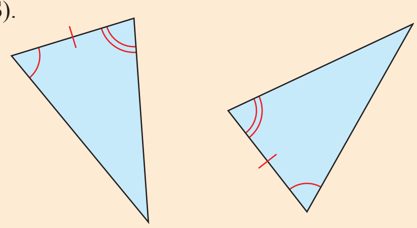
Tá dhá thriantán iomchuí dá chéile má shásaíonn siad aon cheann de na coinníollacha seo:



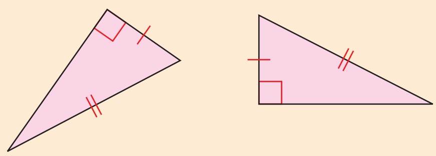
Tá trí phéire sleasa ar comhfhad lena chéile (**SSS**).



Tá dhá phéire sleasa ar comhfhad lena chéile agus tá na huillinneacha eatarthu ar cóimhéid lena chéile (**SUS**).



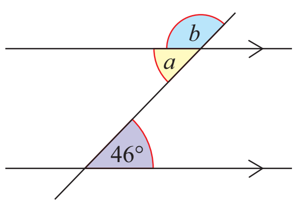
Tá dhá phéire uillinneacha ar cóimhéid lena chéile agus tá na sleasa eatarthu ar comhfhad lena chéile (**USU**).

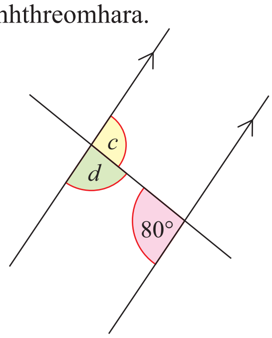


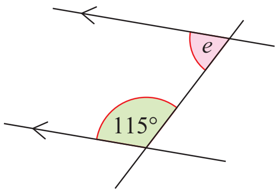
Tá dronuillinn sa dá thriantán, tá an dá thaobhagán ar comhfhad lena chéile agus tá slios amháin ar thriantán amháin ar comhfhad leis an slios comhfhreagrach ar an triantán eile. (**DTS**).

Cleachtadh 3.1

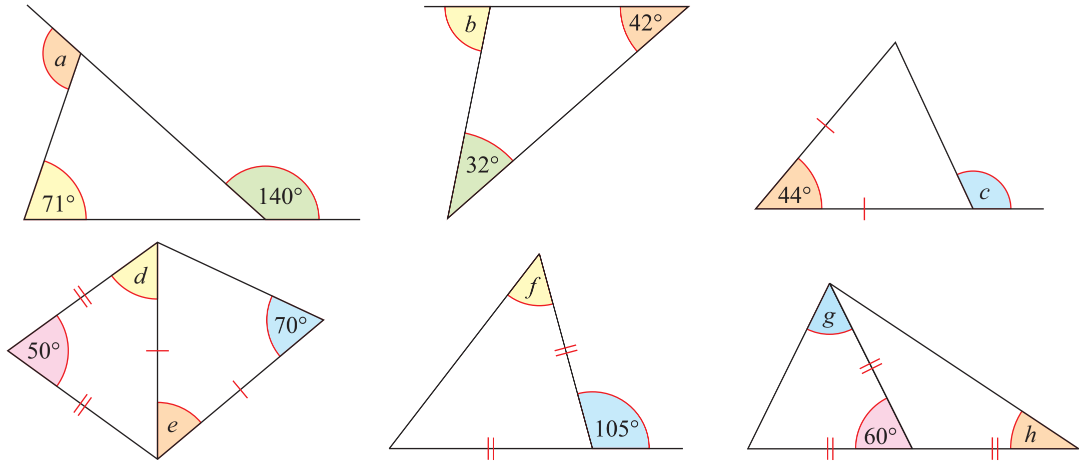
1. Scríobh síos méid na huillinne a bhfuil litir ag freagairt di i ngach ceann de na léaráidí seo a leanas, áit a seasann saigheada do línte comhthreomhara.



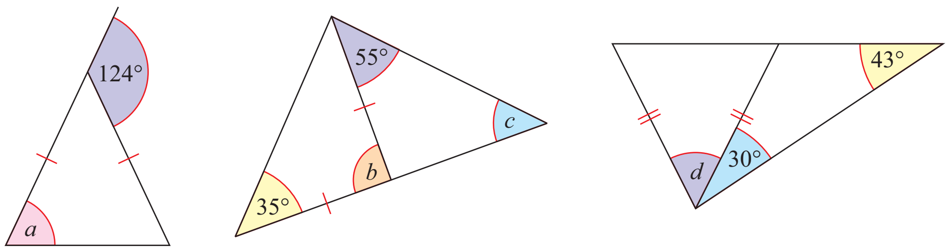




2. Faigh méid na huillinne a bhfuil litir ag freagairt di i ngach ceann de na triantáin seo a leanas, ar a bhfuil na sleasa atá ar cóimhéid marcáilte:

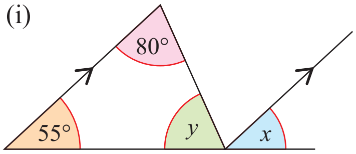


3. Faigh luachanna a, b, c agus d sna triantáin seo a leanas, áit a bhfuil na sleasa atá ar cóimhéid lena chéile marcáilte:

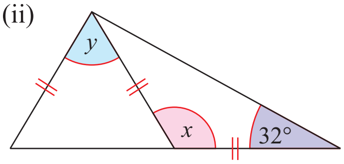


4. Faigh luach x agus y sna triantáin seo a leanas, áit a seasann saigheada do línte comhthreomhara:

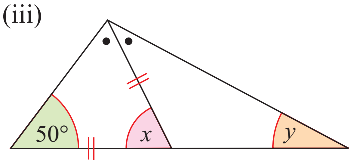
(i)



(ii)

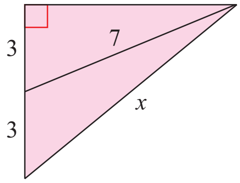


(iii)

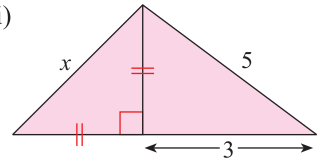


5. Faigh fad an tsleasa x i ngach triantán dronuilleach acu seo thíos:

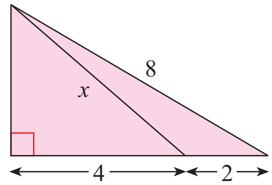
(i)



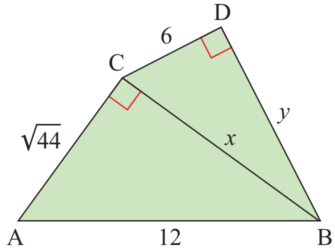
(ii)



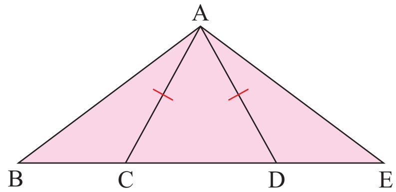
(iii)



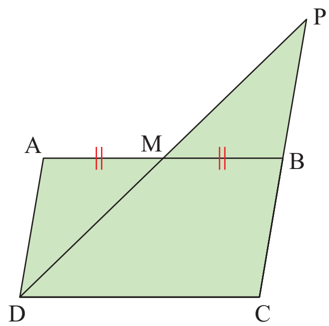
6. San fhíor ar dheis, tá $|\angle ACB| = |\angle CDB| = 90°$.
Faigh fad na sleasa x agus y.



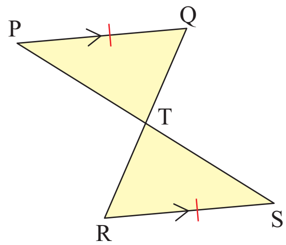
7. Sa léaráid ar dheis, tá $|AC| = |AD|$ agus $|BD| = |CE|$.
Cruthaigh go bhfuil na triantáin ABC agus ADE iomchuí dá chéile.



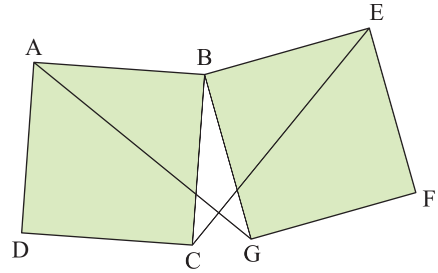
8. Is comhthreomharán é ABCD agus is é M lárphointe [AB].
Tá C, B and P comhlíneach.
(i) Mínigh cén fáth a bhfuil $|\angle DAM| = |\angle MBP|$.
(ii) Anois, léirigh go bhfuil na triantáin AMD agus MBP iomchuí dá chéile.
(iii) Bunaithe air sin léirigh gurb é B lárphointe [CP].



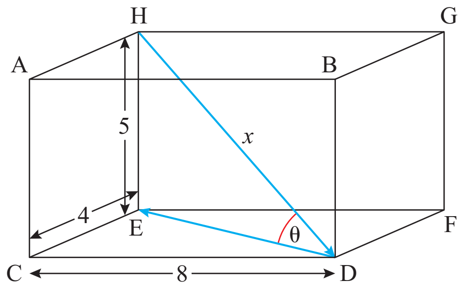
9. (i) Tá uillinneacha 90°, 50° agus 40° sa triantán ABC. Tá uillinneacha 90°, 50° agus 40° sa triantán XYZ freisin. Níl na triantáin seo iomchuí dá chéile. Mínigh cén fáth.
(ii) Sa léaráid ar dheis, tá PQ cothrom le, agus comhthreomhar le, RS. Trasnaíonn na línte PS agus QR a chéile ag T. Cruthaigh go bhfuil na triantáin PTQ agus STR iomchuí dá chéile.



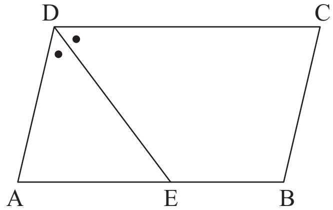
10. Is cearnóga comhionanna iad ABCD agus BEFG.
(i) Mínigh cén fáth a bhfuil $|\angle ABG| = |\angle CBE|$.
(ii) Léirigh go bhfuil $|AG| = |CE|$ trína chruthú go bhfuil na triantáin ABG agus CBE iomchuí dá chéile.



11. Tá imlíne de sholad dronuilleogach le feiceáil ar dheis.
$|CD| = 8$, $|CE| = 4$ agus $|HE| = 5$.
Faigh fad an trasnáin fhada [HD], a bhfuil x ag freagairt dó.
Fág do fhreagra i bhfoirm $\sqrt{}$.



12. Is comhthreomharán é ABCD.
Déan cóip den léaráid ar dheis ina ndéroinneann DE $\angle ADC$.
Marcáil isteach uillinn eile atá cothrom le $|\angle ADE|$.
Anois cruthaigh go bhfuil $|AE| = |BC|$.



Mír 3.2 Teoirimí a bhaineann le triantáin agus le comhthreomharáin

Uillinneacha agus sleasa

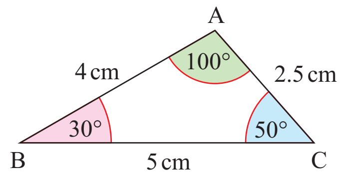
Tá an triantán ABC ar dheis tarraingthe de réir scála.

Tabhair faoi deara

(i) gur os comhair an tsleasa is faide atá an uillinn is mó

(ii) gur os comhair an tsleasa is giorra atá an uillinn is lú.

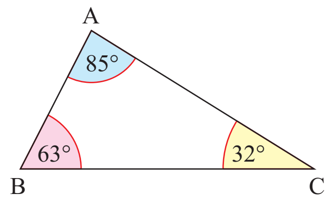
Beidh na hairíonna sin fíor i gcás gach triantáin agus luaitear iad sa teoirim thíos.



> **Teoirim 7**
> I gcás dhá shlios ar thriantán, bíonn an uillinn os comhair an tsleasa is faide níos mó ná an uillinn os comhair an tsleasa is giorra.

Tugtar cruthú na teoirime seo i Mír 3.5

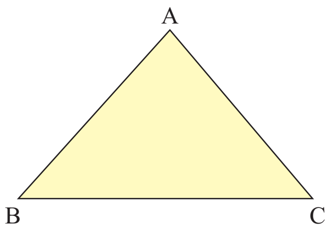
I gcás an triantáin ar dheis, tugtar na trí uillinn dúinn.
De réir choinbhéarta na teoirime thuas is é [BC] an slios is faide mar gur os comhair na huillinne is mó atá sé agus is é [AB] an slios is giorra mar gur os comhair na huillinne is lú atá sé.



> **Coinbhéarta Theoirim 7**
> I gcás dhá uillinn, bíonn an slios os comhair na huillinne is mó níos faide ná an slios os comhair na huillinne is lú.

Éagothromóid triantáin

Is é an t-achar is gaire idir dhá phointe ná an líne a cheanglaíonn na pointí sin.



Dá bhrí sin $|BA| + |AC| > |BC|$

Agus ar an gcaoi chéanna

$|AB| + |BC| > |AC|$

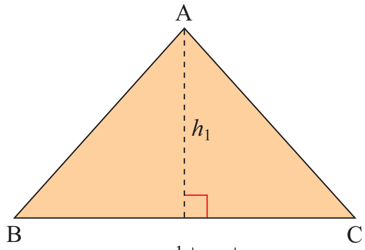
agus $|BC| + |CA| > |AB|$.

> **Teoirim 8**
> Is mó fad dhá shlios triantáin le chéile ná fad an tríú slios.

(Cruthú i Mír 3.5)

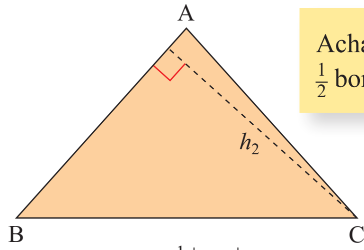
Achair triantán agus comhthreomharán

Seo thíos dhá thriantán atá díreach mar an gcéanna.



Achar $= \frac{1}{2}|BC| \times h_1$

Sa triantán seo, is é [BC] an bonn agus is é h_1 an airde ingearach.



Achar $= \frac{1}{2}|AB| \times h_2$

Sa triantán seo, is é [AB] an bonn agus is é h_2 an airde ingearach.

> Achar triantáin:
> $\frac{1}{2}$ bonn $\times$ airde $\perp$

Ó tharla go bhfuil an dá thriantán díreach mar an gcéanna, tá an t-achar céanna iontu.

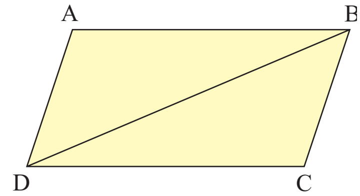
Baineadh úsáid as boinn dhifriúla agus as airdí ingearacha difriúla leis an achar a fháil sa dá chás.

Is léiriú é sin ar theoirim thábhachtach faoi achar triantáin, mar a thugtar ar dheis.

Teoirim 16
I gcás triantán ar bith is féidir slios ar bith a úsáid mar an bonn agus tú ag iarraidh achar an triantáin a fháil.

Achar comhthreomharáin

Tá an comhthreomharán ABCD le feiceáil san fhíor ar dheis.
I gcás comhthreomharán ar bith, bíonn na sleasa urchomhaireacha comhthreomhar lena chéile agus ar comhfhad lena chéile.



Roinneann an trasnán [DB] an comhthreomharán ina dhá thriantán, ABD agus BCD.

Tá na triantáin seo iomchuí dá chéile mar go bhfuil na trí shlios ar $\triangle$ABD ar comhfhad leis na trí shlios ar $\triangle$BCD.

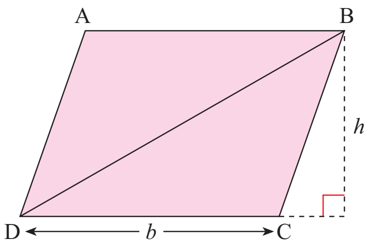
Ó tharla go bhfuil na triantáin iomchuí dá chéile, tá an t-achar céanna iontu.

Teoirim 17
Trasnán i gcomhthreomharán, déroinneann sé achar an chomhthreomharáin sin.

Léiríonn sé sin go roinneann an trasnán [BD] achar an chomhthreomharáin ABCD ina dhá leath.

Sa chomhthreomharán thall,

$$\begin{aligned}
\text{achar } \triangle DCB &= \tfrac{1}{2} \times \text{bonn} \times \text{airde}\\
&= \tfrac{1}{2} \times |DC| \times h\\
&= \tfrac{1}{2} b \times h\\
\text{Achar ABCD} &= \text{dhá oiread achar } \triangle DCB.\\
\therefore \quad \text{Achar ABCD} &= 2\left[\tfrac{1}{2} b \times h\right]\\
&= b \times h
\end{aligned}$$

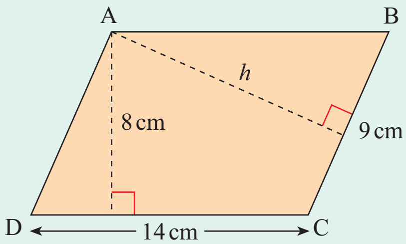


Teoirim 18
Is ionann achar comhthreomharáin agus an bonn iolraithe faoin airde ingearach.

Sampla 1

(i) Faigh achar an chomhthreomharáin seo ABCD.

(ii) Má tá $|BC| = 9$ cm, faigh an airde ingearach, h, ó A go [BC].



(i) Achar ABCD $= \text{bonn} \times \text{airde ingearach}$
$= 14 \times 8$
$= 112 \text{ cm}^2$

(ii) Is ionann achar ABCD agus $|BC| \times h$ freisin
$= 9 \text{ cm} \times h$
$= 9h \text{ cm}^2$

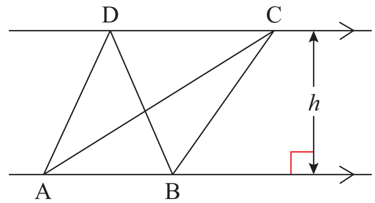
Ach tá achar ABCD $= 112 \text{ cm}^2$ … ó (i) thuas

$\therefore \quad 9h = 112$

$h = \frac{112}{9} = 12\frac{4}{9}$ cm

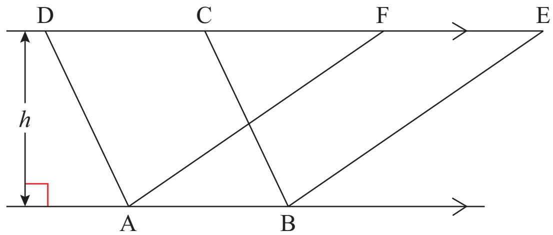
Fadhbanna lena mbaineann achar

Tá an t-achar céanna sna triantáin ABC agus ABD, ar dheis, mar go bhfuil an bonn céanna [AB] orthu agus go bhfuil siad idir na línte comhthreomhara céanna.



Tá achar an dá thriantán cothrom le $\frac{1}{2}|AB| \times h$.

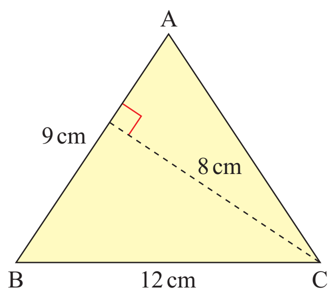
Ar an gcaoi chéanna, tá achair na gcomhthreomharán ABCD agus ABEF cothrom le chéile mar go bhfuil an bonn céanna [AB] orthu agus go bhfuil siad idir na línte comhthreomhara céanna.



> Comhthreomharáin (nó triantáin) ar a bhfuil an bonn céanna agus atá idir na línte comhthreomhara céanna, bíonn an t-achar céanna iontu.

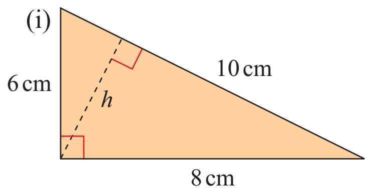
Cleachtadh 3.2

1. Sa triantán thall, tá $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm agus is é 8 cm an airde ingearach ó C to [AB].
   Faigh (i) achar an triantáin ABC
   (ii) an airde ingearach ó A go [BC].

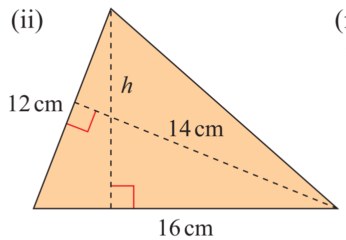


2. Faigh luach h i ngach ceann de na triantáin seo:

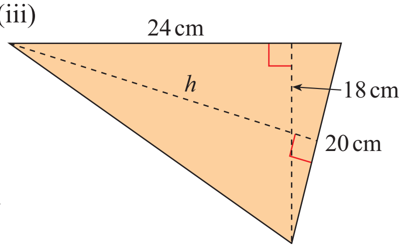
(i)



(ii)

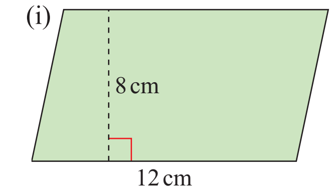


(iii)

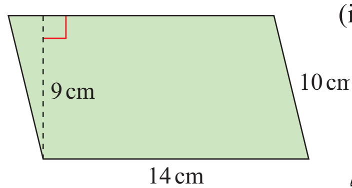


3. Faigh achar gach ceann de na comhthreomharáin seo:

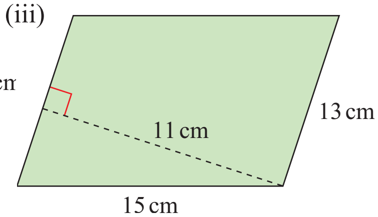
(i)



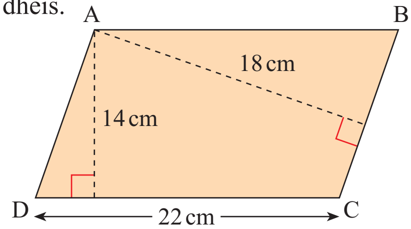
(ii)



(iii)

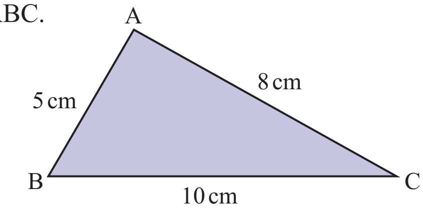


4. Faigh achar an chomhthreomharáin ABCD atá le feiceáil ar dheis.
   Anois, faigh fad an tsleasa [BC].



5. (i) Scríobh síos an uillinn is mó agus an uillinn is lú in $\triangle ABC$. Cuir fáthanna le do fhreagraí.

(ii) Má tá [AB] agus [BC] socraithe ag 5 cm agus 10 cm, faoi seach, cad é raon na bhfad féideartha do [AC]?

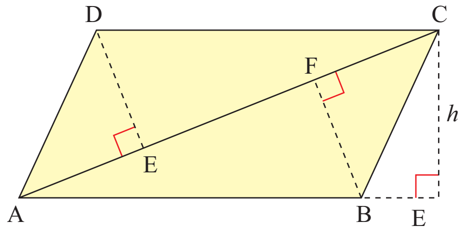


6. Sa chomhthreomharán ar dheis, $DE \perp AC$ agus $BF \perp AC$. Is é 80 cm^2 achar ABCD.

(i) Má tá $|AC| = 16$ cm, faigh $|DE|$.

(ii) Mínigh cén fáth a bhfuil $|DE| = |BF|$.

(iii) Má tá $|AB| = 10$ cm, faigh fad na hairde ingearaí, h.



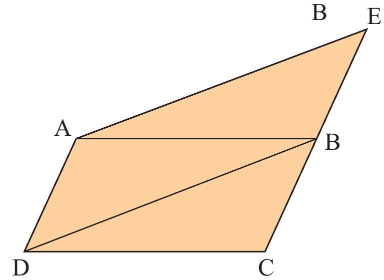
7. Is comhthreomharáin iad ABCD agus ADBE. Má tá achar an triantáin DCB $= 15$ cm^2, faigh

(i) achar an chomhthreomharáin ABCD

(ii) achar an chomhthreomharáin ADBE

(iii) achar na fíorach ADCE

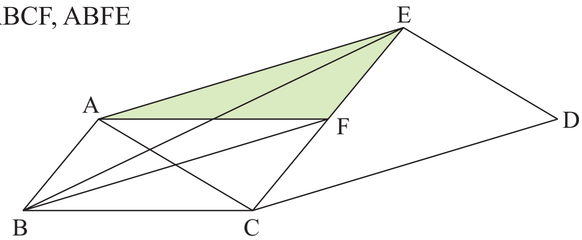
(iv) an airde ingearach ó A go [DC], má tá $|DC| = 7.5$ cm.



8. Sa léaráid ar dheis, is comhthreomharáin iad ABCF, ABFE agus ACDE. Is é 30 aonad cearnach achar an triantáin AFE.

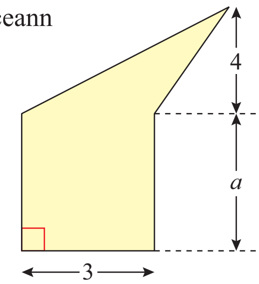
(i) Mínigh go soiléir an fáth a bhfuil achar an triantáin AFB cothrom le 30 aonad cearnacha freisin.

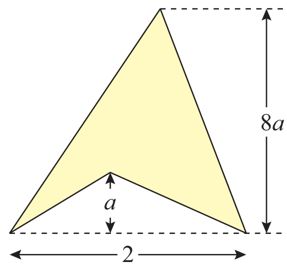
(ii) Faigh achar na fíorach ABCDE.



9. (i) Faigh agus simpligh slonn d'achar gach ceann de na cruthanna seo ar dheis.

(ii) Faigh an luach ar a a thugann an t-achar céanna don dá chruth.

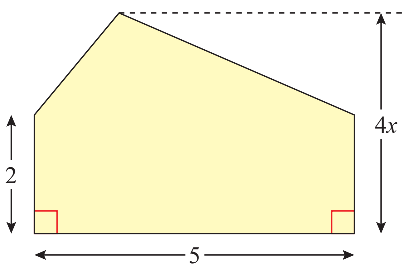


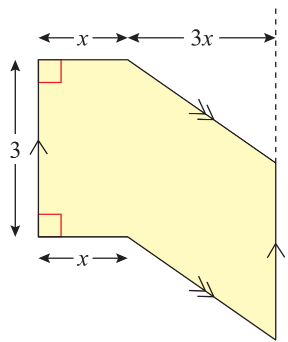


10. (i) Faigh agus simpligh slonn d'achar gach ceann de na cruthanna seo ar dheis.

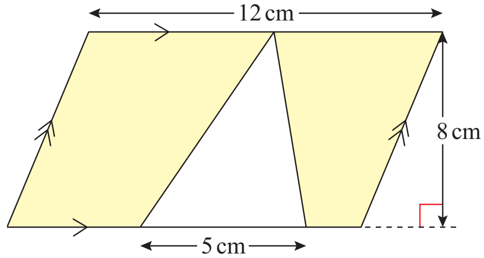
(ii) Faigh an luach ar x a thugann an t-achar céanna don dá chruth.

(Léiríonn saigheada línte comhthreomhara.)

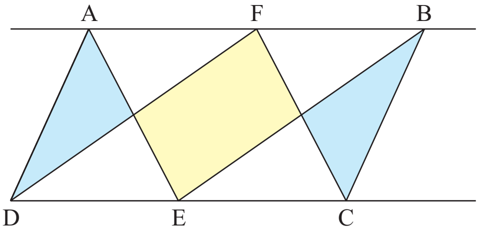




11. Ríomh achar na fíorach scáthaithe thíos. Léiríonn saigheada go bhfuil na línte comhthreomhar.



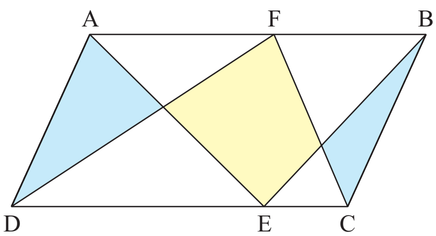
12. (i) Is comhthreomharán é ABCD.



Is é E lárphointe [DC] agus is é F lárphointe [AB].

Cruthaigh go bhfuil an t-achar atá scáthaithe i ngorm cothrom leis an achar atá scáthaithe i mbuí.

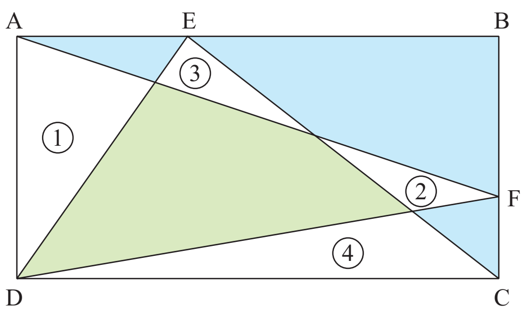
(ii) Sa chomhthreomharán seo, is pointí **ar bith** iad E agus F ar na sleasa [DC] agus [AB] faoi seach.



Ceangail EF.

Cruthaigh go bhfuil an t-achar atá scáthaithe i ngorm cothrom leis an achar atá scáthaithe i mbuí sa chás seo freisin.

13. Is dronuilleog í ABCD. Is pointí **ar bith** iad E agus F ar na sleasa [AB] agus [BC] faoi seach.



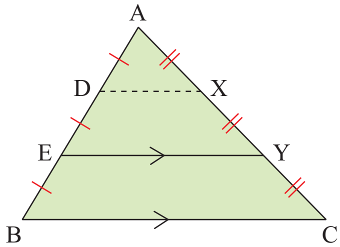
(i) Cruthaigh go bhfuil achar thriantán 1 + 2 = achar thriantán 3 + 4.

(ii) Trí na triantáin eile a uimhriú, nó ar bhealach eile, léirigh go bhfuil an t-achar atá scáthaithe i nglas cothrom leis an achar atá scáthaithe i ngorm.

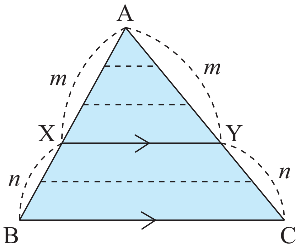
Mír 3.3 Teoirimí cóimheasa

1. Líne atá comhthreomhar le slios triantáin

Feictear sa léaráid ar dheis an slios [AB] den triantán agus é roinnte ina thrí chuid chothroma.



Má tharraingítear línte trí D agus E atá comhthreomhar le BC, roinnfidh na pointí X agus Y an slios [AC] ina thrí chuid chothroma freisin.



Sa triantán ar chlé, roinneann X an slios [AB] sa chóimheas $m : n$.

Má tá [XY] comhthreomhar le [BC], roinnfidh Y an slios [AC] sa chóimheas $m : n$ freisin, mar atá léirithe.

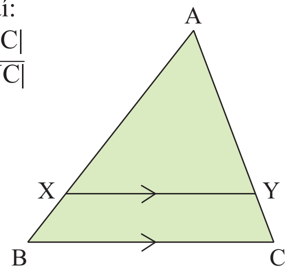
Léiríonn an léaráid seo toradh céimseatúil atá an-tábhachtach a deir:

> **Teoirim 12**
> Líne a tharraingítear comhthreomhar le slios amháin ar thriantán, roinneann sí an dá shlios eile sa chóimheas céanna.

Tugtar cruthú foirmiúil na teoirime seo i Mír 3.5. B'fhéidir go n-iarrfaí ort an cruthú sin a thabhairt.

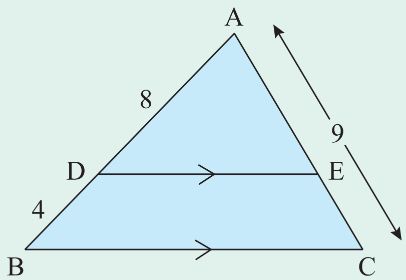
I dtriantán ina bhfuil XY||BC, bíonn na cóimheasa seo fíor i gcónaí:

(i) $\dfrac{|AX|}{|XB|} = \dfrac{|AY|}{|YC|}$ (ii) $\dfrac{|AB|}{|AX|} = \dfrac{|AC|}{|AY|}$ (iii) $\dfrac{|AB|}{|XB|} = \dfrac{|AC|}{|YC|}$



Sampla 1

Sa triantán thall tá DE||BC.
$|AD| = 8$, $|DB| = 4$ agus $|AC| = 9$.
Faigh |AE|.



Bíodh $|AE| = x \;\Rightarrow\; |EC| = 9 - x$

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{x}{9-x} \Rightarrow 4x = 8(9-x)$$

$$\Rightarrow 4x = 72 - 8x$$

$$\Rightarrow 12x = 72$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow |AE| = 6$$

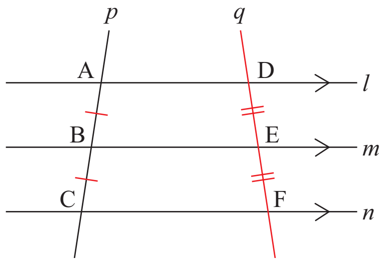
2. Trasnaithe

Sa léaráid ar dheis, is línte comhthreomhara iad, l, m agus n.

Trasnaithe a thugtar ar na línte p agus q.

Maidir leis an trasnaí p, tá $|AB| = |BC|$.

Sa chás sin, deirtear go ngearrann na línte comhthreomhara **mírlínte cothroma** ar an trasnaí.



Is trasnaí eile í an líne q.
Is féidir a léiriú go bhfuil na mírlínte [DE] agus [EF] ar comhfhad lena chéile freisin.

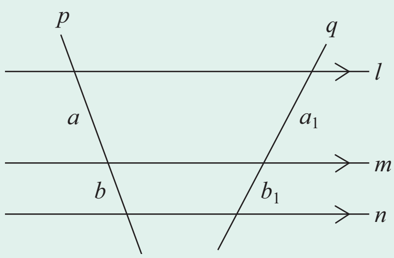
Tá an t-airí sin fíor do gach trasnaí eile freisin.

Teoirim 11
Má ghearrann trí líne chomhthreomhara mírlínte cothroma ar thrasnaí éigin, ansin gearrfaidh siad mírlínte cothroma ar thrasnaí ar bith eile.

Tugtar cruthú foirmiúil na teoirime seo i Mír 3.5. B'fhéidir go n-iarrfaí ort an cruthú sin a thabhairt.

Sampla 2

Sa léaráid thíos, tá na línte l, m agus n comhthreomhar.



Gearrann na trí líne sin an trasnaí p sa chóimheas $a : b$.
Gearrann na trí líne an trasnaí q sa chóimheas $a_1 : b_1$.

Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}$.

Tarraing trasnaí eile (i ndúch dearg).

Bíodh an trasnaí seo gearrtha sa chóimheas $x : y$.
Sa triantán gorm, tá an líne m comhthreomhar leis an mbonn n.

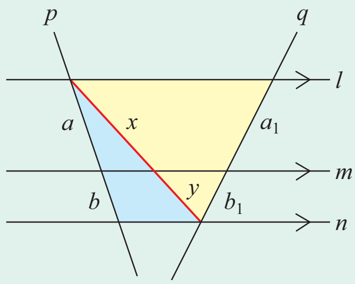
$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Sa triantán buí, tá an líne m comhthreomhar leis an mbonn l.

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \ldots$$



Má tá $\dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{8}$

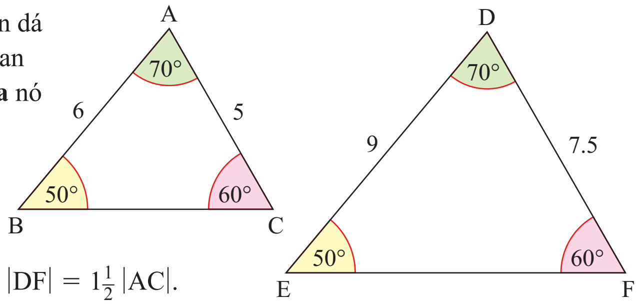
$\Rightarrow \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8}$

T&T4.indb 90 10/07/2018 17:46:01

3. Triantáin chomhchosúla

Tá na huillinneacha sna triantáin ABC agus DEF thíos ar cóimhéid lena chéile.

Tabhair faoi deara gurb é an cruth céanna atá ar an dá thriantán ach go bhfuil ceann amháin níos mó ná an ceann eile. Deirimid gur **triantáin chomhchosúla** nó **triantáin chomhuilleacha** iad na triantáin sin.



Deirimid gur **sleasa comhfhreagracha** iad [AB] agus [DE], toisc go bhfuil siad araon os comhair na huillinne 60°.

Tabhair faoi deara go bhfuil $|DE| = 1\frac{1}{2}\,|AB|$ agus $|DF| = 1\frac{1}{2}\,|AC|$.

Ar an gcaoi chéanna tá $|EF| = 1\frac{1}{2}\,|BC|$.

Léiríonn sé sin go bhfuil $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

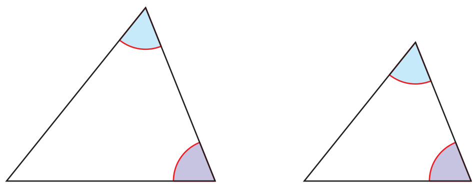
Tá an toradh tábhachtach seo i dtaca le triantáin chomhchosúla tugtha sa teoirim thíos.

Teoirim 13
Más triantáin chomhchosúla iad na triantáin ABC agus DEF, tá na sleasa comhfhreagracha orthu i gcomhréir lena chéile.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$$

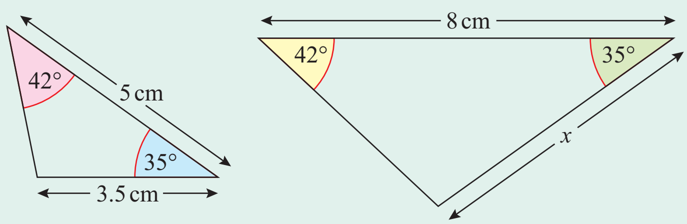
Tugtar cruthú foirmiúil na teoirime seo i Mír 3.5. B'fhéidir go n-iarrfaí ort an cruthú sin a thabhairt.

Nóta Is triantáin chomhchosúla dhá thriantán faoi leith más ionann dhá uillinn i dtriantán amháin acu agus dhá uillinn sa triantán eile. Fágann sin gurb ionann an dá uillinn eile freisin.



Sampla 3

Faigh fad an tsleasa x sa triantán thíos.



Bíonn sleasa comhfhreagracha os comhair uillinneacha atá ar cóimhéid lena chéile.
Na huillinneacha atá gan mharc, tá siad ar cóimhéid lena chéile.
Is sleasa comhfhreagracha iad na sleasa a bhfuil fad x agus fad 3.5 cm leo.

$$\frac{x}{3.5} = \frac{8}{5}$$

$\Rightarrow \quad 5x = 8\,(3.5)$

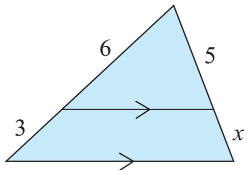
$\Rightarrow \quad 5x = 28$

$\Rightarrow \quad x = 5.6$ cm

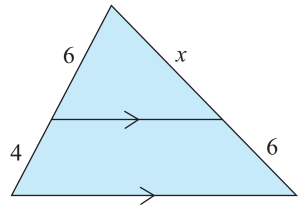
Cleachtadh 3.3

1. **S**na triantáin seo a leanas, léiríonn na saigheada go bhfuil na línte comhthreomhar lena chéile. Faigh fad na mírlíne x i ngach triantán:

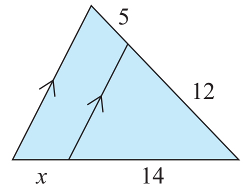
(i)



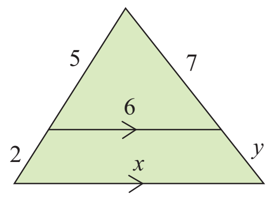
(ii)

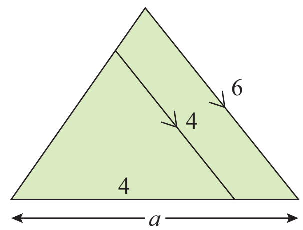


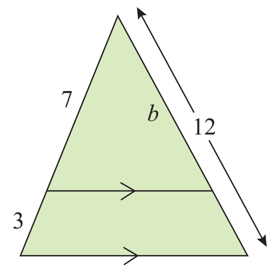
(iii)



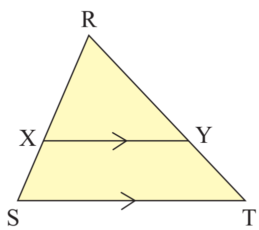
2. Sna triantáin seo a leanas, léiríonn na saigheada go bhfuil na línte comhthreomhar lena chéile. Faigh fad na mírlíne atá marcáilte le litir i ngach triantán:



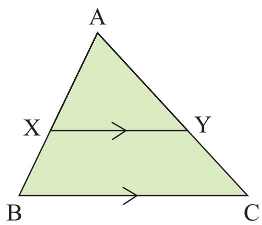




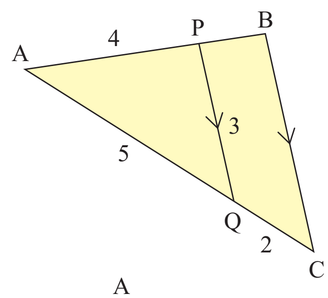
3. Sa triantán thall, tá $XY \| ST$.
Má tá $|XS| = 5$, $|YT| = 6$ agus $|RS| = 12$, faigh $|RT|$.



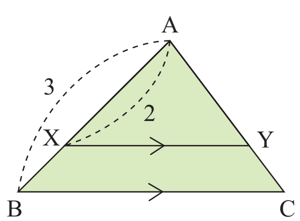
4. Sa triantán thall, tá $XY \| BC$.
Má tá $|AB| = 5$, $|BX| = 2$ agus $|AC| = 8$, faigh $|AY|$.



5. Sa triantán thall, tá $PQ \| BC$.
Faigh $|BC|$ agus $|BP|$.

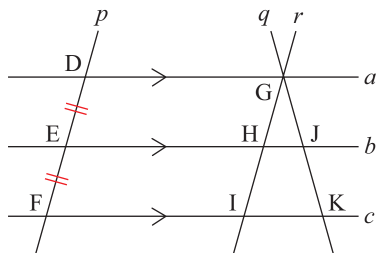


6. Sa triantán thall, tá $XY \| BC$.
$|AB| : |AX| = 3 : 2$.
(i) Má tá $|YC| = 10$ cm, faigh $|AY|$.
(ii) Cad é an cóimheas $|XY| : |BC|$?
(iii) Má tá $|BC| = 30$ cm, faigh $|XY|$.

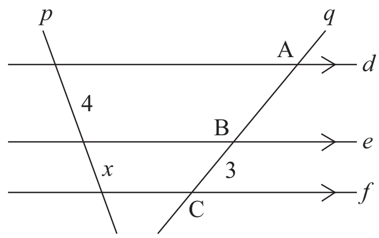


7. Is línte comhthreomhara iad a, b agus c.
Is trí thrasnaí iad p, q agus r a thrasnaíonn a, b agus c.
$|DE| = |EF|$, $|GH| = 8$ cm agus $|JK| = 7$ cm.

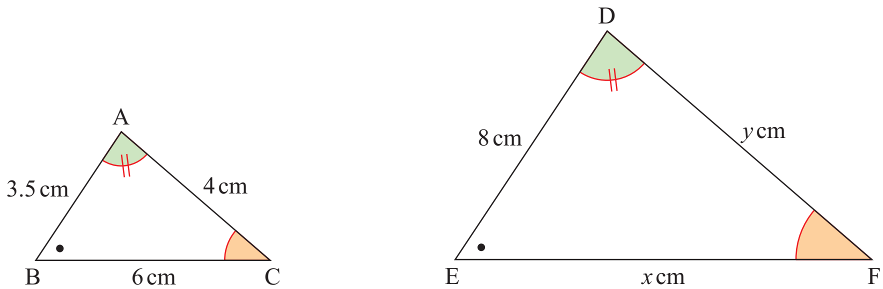
Faigh (i) $|HI|$ (ii) $|GJ|$.



8. Is línte comhthreomhara iad d, e agus f san fhíor ar dheis.
Is dhá thrasnaí iad p agus q.
Tá an trasnaí p roinnte sa chóimheas $4 : x$.
Faigh fad na mírlíne [AB] i dtéarmaí x.

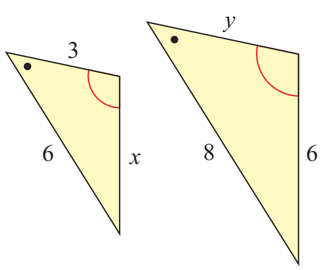


9.

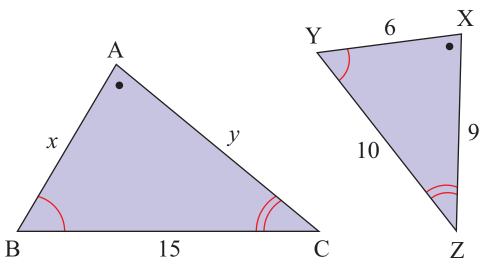


(i) Mínigh cén fáth ar triantáin chomhchosúla iad na triantáin ABC agus DEF.
(ii) Cén slios ar an triantán DEF a fhreagraíonn don slios [AC]?
(iii) Faigh luach x agus y.

10. Faigh luach x agus luach y sna triantáin chomhchosúla ar dheis.

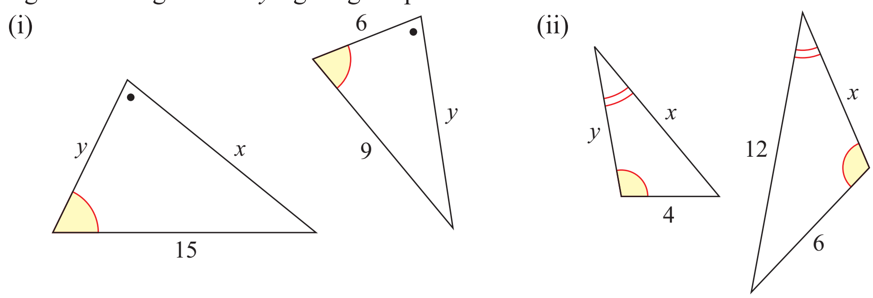


11. Is triantáin chomhchosúla iad na triantáin ABC agus XYZ.

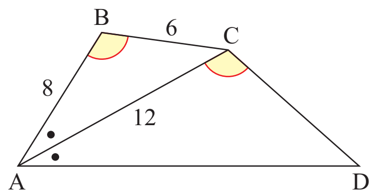


(i) Cén slios ar an triantán XYZ a fhreagraíonn do [AB]?
Mínigh do fhreagra.
(ii) Faigh luach x agus luach y.

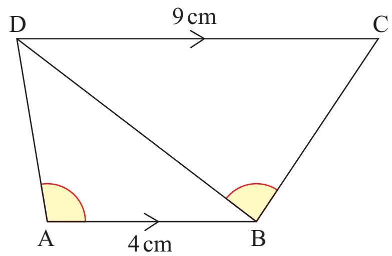
12. Tugtar dhá phéire de thriantáin chomhchosúla thíos.
Tá na huillinneacha atá ar cóimhéid marcáilte.
Faigh luach x agus luach y i gcás gach péire díobh.



13. Sa léaráid ar dheis, déroinneann an trasnán [AC] an uillinn BAD.
$|\angle ABC| = |\angle ACD|$.
Faigh (i) $|CD|$
(ii) $|AD|$.

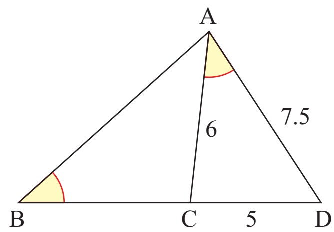


14. Is ceathairshleasán é ABCD ina bhfuil $AB \parallel DC$ agus $|\angle DAB| = |\angle DBC|$.

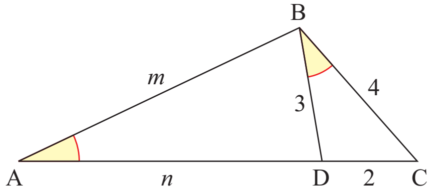


(i) Cruthaigh gur triantáin chomhchosúla iad DAB agus DBC.
(ii) Má tá $|AB| = 4$ cm agus $|DC| = 9$ cm, ríomh $|BD|$.

15. Tarraing léaráidí ar leith de na triantáin ABD agus ACD.
Marcáil na huillinneacha atá ar cóimhéid agus mínigh cén fáth ar triantáin chomhchosúla iad.
Bunaithe air sin faigh $|BD|$ agus $|AB|$.

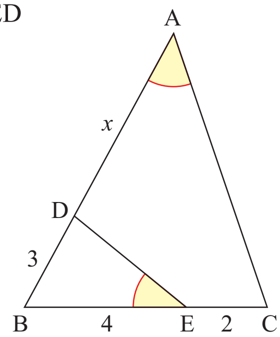


16. Sa léaráid thíos tá $|\angle BAD| = |\angle CBD|$.

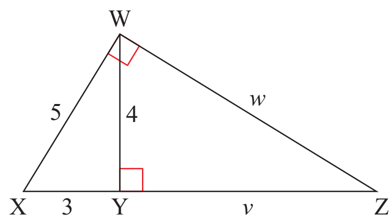


(i) Ainmnigh dhá thriantán chomhchosúla. (ii) Bunaithe air sin faigh luach m agus luach n.

17. Triantáin chomhchosúla iad ABC agus BED ach níl DE comhthreomhar le AC.
Ríomh fad an tsleasa x.

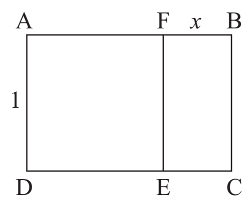


18. Sa léaráid thíos tá $|\angle WYZ| = |\angle XWZ| = 90°$.



(i) Cén triantán atá comhchosúil leis an triantán WXY?
(ii) Bunaithe air sin faigh luach v agus luach w.

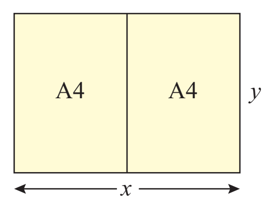
19. Gearrtar cearnóg den dronuilleog ABCD. Fágtar dronuilleog BCEF. Tá an dronuilleog BCEF comhchosúil le ABCD. Faigh x. Bunaithe air sin scríobh síos an cóimheas idir shleasa na dronuilleoige ABCD. Bíodh x ceart go dtí trí ionad de dheachúlacha.



An Dronuilleog Órga a thugtar ar ABCD. Is cruth tábhachtach é i gcúrsaí ailtireachta.

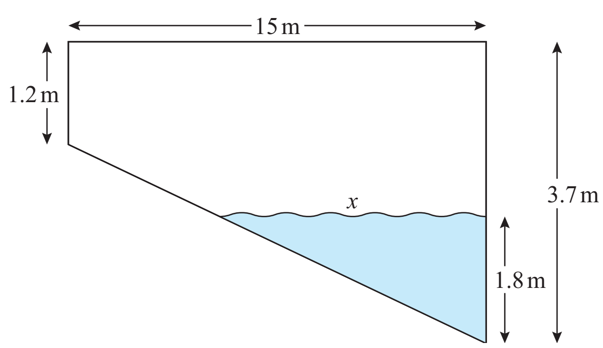
20. Is féidir bileog A3 a ghearradh ina dhá bileog A4.
Bileoga comhchosúla ó thaobh na matamaitice de iad bileoga A3 agus A4.

Faigh an cóimheas: $\left(\dfrac{\text{slios fada na bileoige A3}}{\text{slios fada na bileoige A4}}\right)$ $\left[\text{is é sin, } \dfrac{x}{y}\right]$



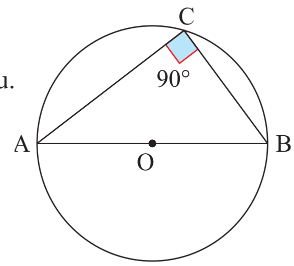
21. Léaráid taobh-amhairc de linn snámha atá á líonadh le huisce atá le feiceáil thíos.

Ríomh fad x.



Mír 3.4 Teoirimí a bhaineann leis an gciorcal

Céimseata an chiorcail a bheidh faoi chaibidil sa mhír seo. Chomh maith leis sin, féachfaimid ar roinnt torthaí tábhachtacha matamaitice a dtugtar **teoirimí a bhaineann leis an gciorcal** orthu.

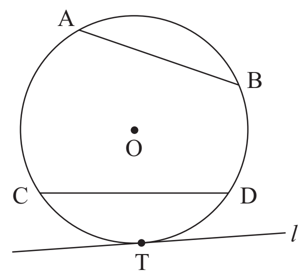


D'fhoghlaim tú cheana féin gur dronuillinn í an uillinn i leathchiorcal.

Sa chiorcal seo, tá $|\angle ACB| = 90°$.

Tadhlaithe agus cordaí

Is éard atá i dtadhlaí le ciorcal ná líne dhíreach nach mbuaileann leis an gciorcal ach ag aon phointe amháin.



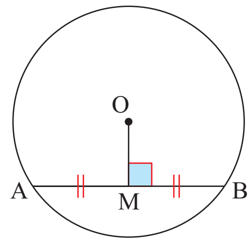
Sa léaráid ar dheis, is tadhlaí leis an gciorcal é ℓ.

An **pointe tadhaill** a thugtar ar T.

Is **cordaí** den chiorcal iad [AB] agus [CD].

Sa léaráid seo thíos, tá [OM] ingearach leis an gcorda [AB].

$$|AM| = |MB|.$$

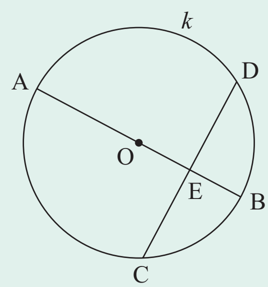


Teoirim 21
An t-ingear ó lárphointe ciorcail go dtí corda faoi leith, déroinneann sé an corda sin.

Tugtar cruthú foirmiúil na teoirime seo i Mír 3.5.

Sampla 1

Tá trastomhas 20 cm sa chiorcal k.
$AB \perp CD$ agus $|CD| = 16$ cm.
Faigh $|EB|$.

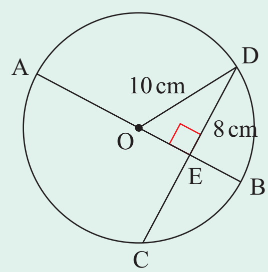


Tá an trastomhas [AB] ingearach leis an gcorda [CD].

$$\Rightarrow \quad |CE| = |ED| = 8 \text{ cm}$$
$$|OD| = 10 \text{ cm} = \text{ga}$$

Tá $\triangle ODE$ dronuilleach.

$$\Rightarrow \quad 10^2 = 8^2 + |OE|^2$$
$$\Rightarrow \quad 100 = 64 + |OE|^2$$
$$\Rightarrow \quad |OE|^2 = 36$$
$$\Rightarrow \quad |OE| = 6 \text{ cm}$$
$$\Rightarrow \quad |EB| = (10 - 6) \text{ cm}$$
$$\Rightarrow \quad |EB| = 4 \text{ cm}$$



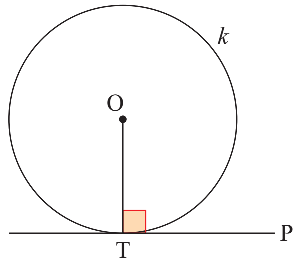
Sa léaráid thíos is tadhlaí é PT leis an gciorcal k agus is é O lárphointe an chiorcail.

Is é T an pointe tadhaill agus is ga é [OT]. Tá $OT \perp TP$

Léiríonn an léaráid gur 90° atá san uillinn idir tadhlaí agus ga.
Tugtar an toradh sin sa teoirim thíos:

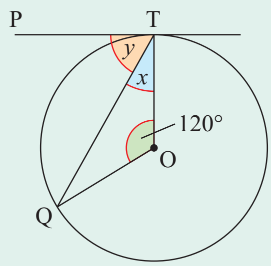
Teoirim 20

1. Tá gach tadhlaí ingearach leis an nga a théann ón lárphointe chuig an bpointe tadhaill.
2. Más pointe é T ar an gciorcal k, agus má tá an líne TP ingearach le ga an chiorcail a théann chuig T, is tadhlaí le k é TP.



Sampla 2

Sa léaráid seo thall, is tadhlaí leis an gciorcal é PT agus is ga é [OT].
Má tá $|\angle TOQ| = 120°$, faigh méid na n-uillinneacha x agus y.



Is triantán comhchosach é OTQ toisc go bhfuil $|OT| = |OQ| =$ ga

$\therefore \quad |\angle OTQ| = |\angle OQT| = x$

$\therefore \quad 2x = 180° - 120°$

$= 60$

$x = 30°$

De bhrí go bhfuil $OT \perp PT \Rightarrow |\angle OTP| = 90°$

$\therefore \quad x + y = 90°$

$30 + y = 90° \quad \ldots x = 30°$

$y = 90° - 30°$

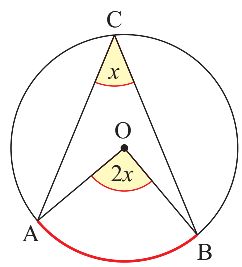
$y = 60°$

Uillinneacha i gciorcail

Tá an $\angle AOB$ i lár an chiorcail agus an $\angle ACB$ ar imlíne an chiorcail sa léaráid ar dheis. Seasann an dá uillinn ar an stua AB.

Tá teoirim thábhachtach a bhaineann leis an gciorcal:

Is ionann an uillinn i lár ciorcail atá á hiompar ag stua agus dhá oiread na huillinne a dhéanann an stua sin leis an imlíne.

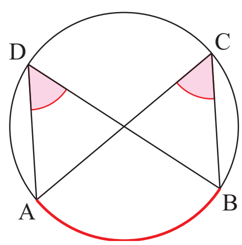


$|\angle AOB| = 2|\angle ACB|$

Tá dhá atoradh thábhachtacha ar an teoirim sin:

Atoradh 1

Uillinneacha atá ar an stua céanna ar an imlíne, beidh siad ar cóimhéid.

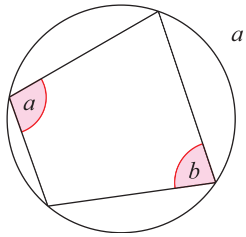


$|\angle ACB| = |\angle ADB|$

T&T4.indb 97 10/07/2018 17:46:08

Atoradh 2

Is é 180º suim na n-uillinneacha urchomhaireacha i gceatharshleasán comhchiorclach.



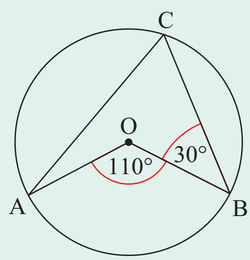
$a + b = 180°$

Atoradh, sin ráiteas a ghabhann le teoirim atá cruthaithe agus a leanann ón teoirim sin go soiléir.

Sampla 3

Sa léaráid ar dheis, is é O lárphointe an chiorcail, $|\angle AOB| = 110°$ agus $|\angle OBC| = 30°$.

Faigh (i) $|\angle ACB|$ (ii) $|\angle OAC|$.



(i) $|\angle AOB| = 2|\angle ACB|$… uillinn i lár ciorcail = dhá oiread na huillinne ag an imlíne

$\Rightarrow \quad 110° = 2|\angle ACB|$

$\Rightarrow \quad |\angle ACB| = \frac{1}{2}(110°) = 55°$

(ii) Chun $|\angle OAC|$ a fháil, ceangail CO, mar atá léirithe.

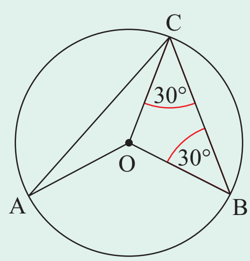
$|\angle OBC| = |\angle OCB| = 30°$… $|OB| = |OC| =$ ga

$|\angle ACB| = 55°$ … ó (i) thuas

$\Rightarrow \quad |\angle OCA| = 55° - 30°$, i.e., $25°$

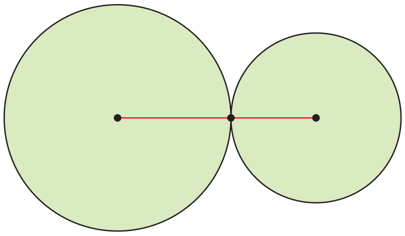
Ach $|\angle OAC| = |\angle OCA|$, ó tá $|OA| = |OC| =$ ga.

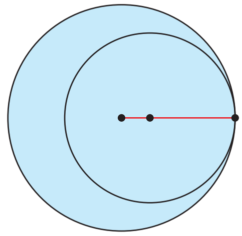
$\Rightarrow \quad |\angle OAC| = 25°$.



Atoradh 6

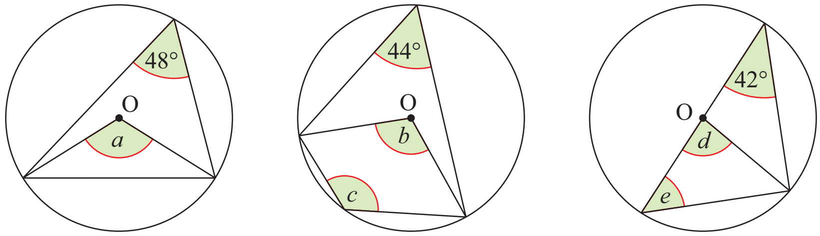
Mura dtrasnaíonn dhá chiorcal a chéile ach ag aon phointe amháin, tá an dá lárphointe agus an pointe tadhaill comhlíneach lena chéile.



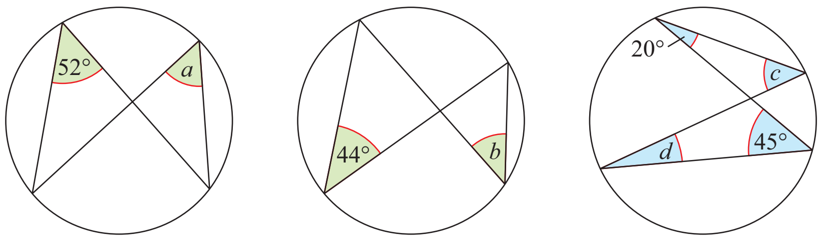


Cleachtadh 3.4

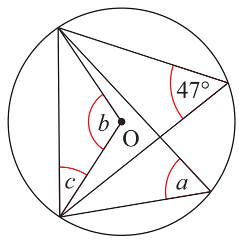
1. Faigh tomhas na huillinne a bhfuil litir ag freagairt di sna ciorcail thíos, áit a bhfuil O mar lárphointe gach ciorcail.



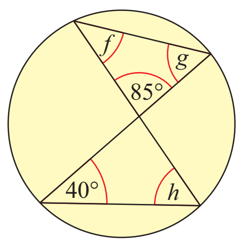
2. Faigh tomhas na huillinne a bhfuil litir ag freagairt di sna ciorcail thíos:



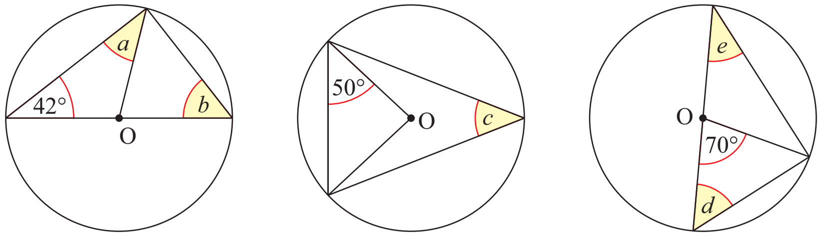
3. Faigh tomhas na n-uillinneacha a bhfuil a, b agus c ag freagairt dóibh sa léaráid ar dheis. Is é O lárphointe an chiorcail. Mínigh do fhreagra i ngach cás.



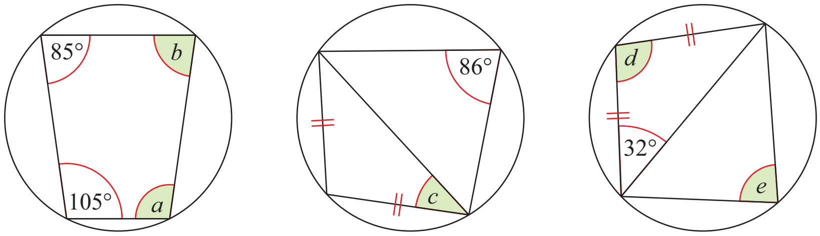
4. Faigh tomhas na n-uillinneacha a bhfuil f, g agus h ag freagairt dóibh sa léaráid ar dheis.



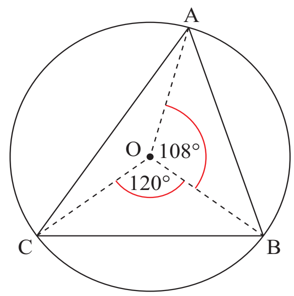
5. Faigh tomhas na n-uillinneacha a bhfuil litir ag freagairt dóibh sna ciorcail seo a leanas, áit a bhfuil O mar lárphointe i ngach cás:



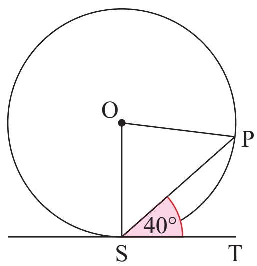
6. Faigh tomhas na n-uillinneacha a bhfuil litir ag freagairt dóibh sna ciorcail seo a leanas. Tá mírlínte atá ar cóimhéid marcáilte.



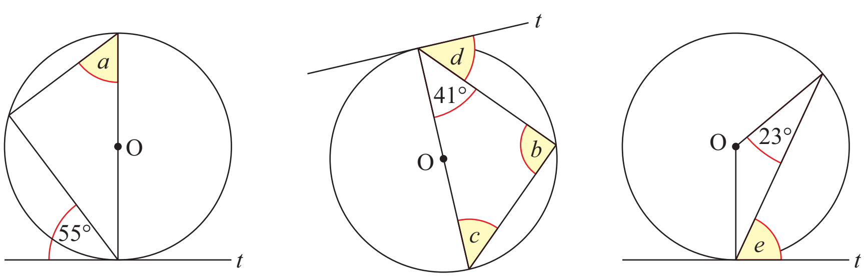
7. Is é O lár an chiorcail ar dheis. Faigh tomhas gach ceann de na trí uillinn inmheánacha sa triantán ABC. Mínigh do chuid freagraí.



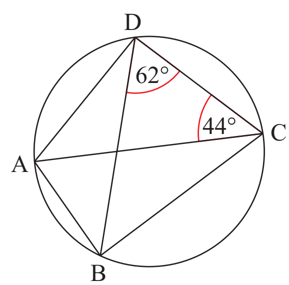
8. Is tadhlaí é ST leis an gciorcal seo thall a bhfuil O mar lárphointe aige.
Má tá $|\angle PST| = 40°$, faigh
(i) $|\angle OST|$
(ii) $|\angle OSP|$
(iii) $|\angle OPS|$
(iv) $|\angle SOP|$



9. Ciorcal dar lárphointe O atá sna léaráidí thíos. Is tadhlaí é *t* i ngach cás.
Oibrigh amach tomhas na n-uillinneacha a bhfuil litir ag freagairt dóibh.



10. Sa léaráid ar dheis, $|\angle BDC| = 62°$ agus $|\angle DCA| = 44°$.
Faigh (i) $|\angle BAC|$
(ii) $|\angle ABD|$.



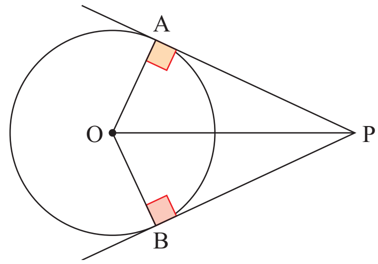
11. Sa léaráid ar dheis, is é O lárphointe an chiorcail.
Is tadhlaithe leis an gciorcal iad PA agus PB.

(i) Cruthaigh go bhfuil na triantáin AOP agus BOP iomchuí dá chéile.

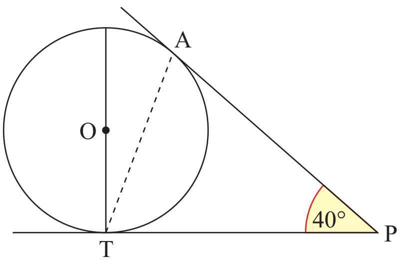
(ii) Bunaithe air sin léirigh go bhfuil $|PA| = |PB|$.

(iii) Cruthaigh go bhfuil $|\angle APB| + |\angle AOB| = 180°$.

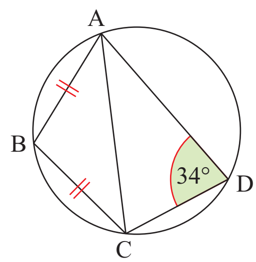
Dhá thadhlaí a théann ó phointe amháin go ciorcal faoi leith, beidh siad ar comhfhad lena chéile.



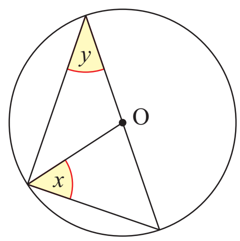
12. Ciorcal dar lárphointe O atá sa léaráid thall.
Is tadhlaithe iad PA agus PT leis an gciorcal.
Má tá $|\angle APT| = 40°$, faigh $|\angle ATO|$.



13. Sa chiorcal ar dheis, tá $|AB| = |BC|$ agus $|\angle ADC| = 34°$.
Faigh (i) $|\angle ABC|$
(ii) $|\angle BAC|$.



14. Ciorcal dar lárphointe O atá sa léaráid thall.
Cruthaigh go bhfuil $x + y = 90°$.

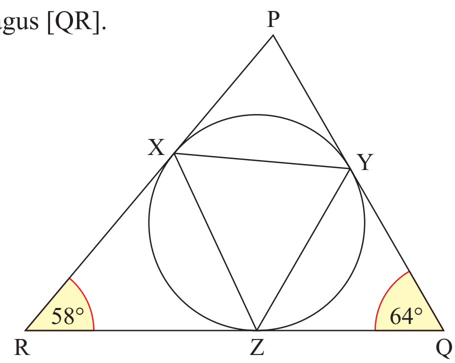


15. Is tadhlaithe leis an gciorcal thall iad [RP], [PQ] agus [QR].
Is iad X, Y agus Z na pointí tadhaill.
$|\angle PRQ| = 58°$ agus $|\angle PQR| = 64°$.

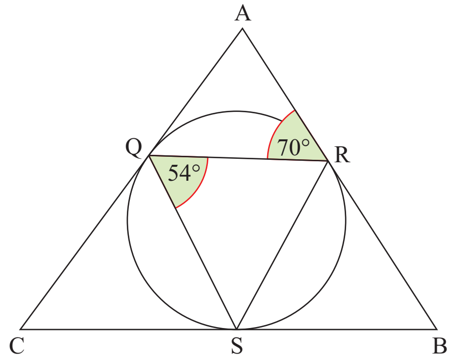
(i) Ainmnigh trí thriantán chomhchosacha.

(ii) Faigh $|\angle PXY|$.

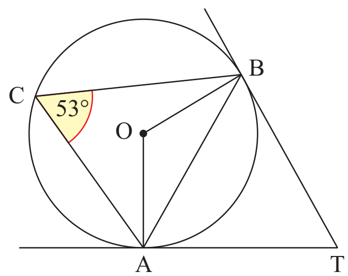
(iii) Anois, faigh tomhas na n-uillinneacha inmheánacha sa triantán XYZ.



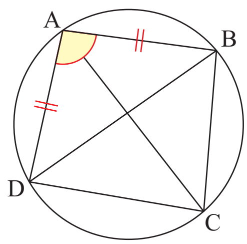
16. Tá an ciorcal ar dheis inscríofa sa triantán ABC.
Is iad Q, R agus S na pointí tadhaill.
$|\angle ARQ| = 70°$ agus $|\angle RQS| = 54°$.
Faigh $|\angle ACB|$.



17. Is triantán é ABC atá inscríofa i gciorcal dar lárphointe O.
Is tadhlaithe leis an gciorcal iad TA agus TB.
Má tá $|\angle ACB| = 53°$, faigh
(i) $|\angle AOB|$
(ii) $|\angle BTA|$
(iii) $|\angle ABT|$.



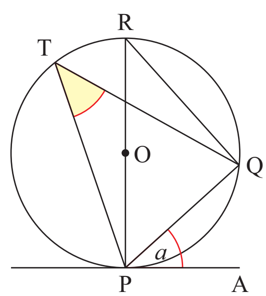
18. Sa léaráid ar dheis, tá $|AB| = |AD|$ agus $|\angle DAB| = 84°$.
(i) Faigh $|\angle DBA|$
(ii) Faigh $|\angle BCA|$.



19. Is é O lárphointe an chiorcail ar dheis. Is tadhlaí é [PA] agus is trastomhas den chiorcal é [PR].

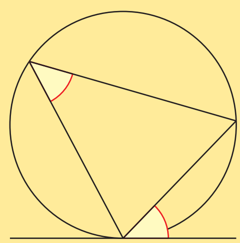
$|\angle APQ| = a°$. Cóipeáil agus líon isteach na línte seo a leanas mar áis chun a chruthú go bhfuil $|\angle APQ| = |\angle PTQ|$:

$|\angle PQR| = 90°$, de bhrí …
$\Rightarrow$ $|\angle PRQ| + |\angle RPQ| = 90°$, mar …
$|\angle QPA| + |\angle RPQ| = 90°$, mar …
$\Rightarrow$ $|\angle PRQ| + |\angle RPQ| = |\angle QPA| + |\angle RPQ|$
$\Rightarrow$ $|\angle PRQ| = |\angle QPA|$,
Ach $|\angle PRQ| = |\angle PTQ|$, de bhrí …
$\Rightarrow$ $|\angle QPA| = |\angle PTQ|$, an toradh a iarradh.

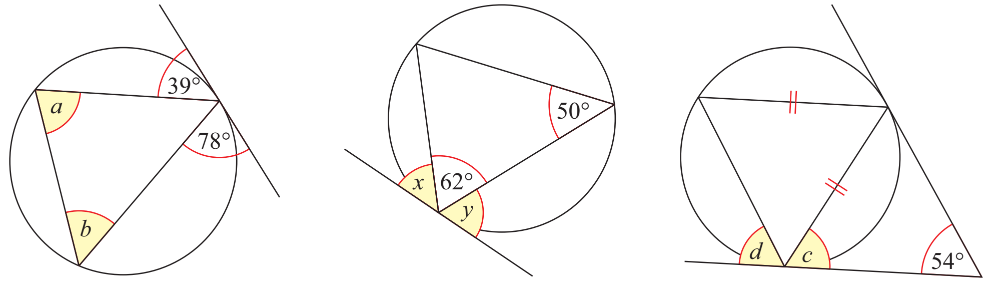


An toradh a fuaireamar i gCeist **19** thuas, cruthaíonn sé teoirim an-tábhachtach a bhaineann leis an gciorcal:

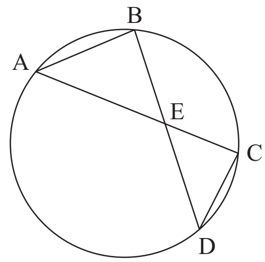
An uillinn atá idir tadhlaí agus corda ar bith tríd an bpointe tadhaill, bíonn sí ar cóimhéid leis an uillinn atá á hiompar ag an gcorda sin sa teascán ailtéarnach.



20. Faigh tomhas na huillinne a bhfuil litir ag freagairt di i ngach ceann de na ciorcail seo a leanas:



21. Sa chiorcal seo, trasnaíonn na cordaí [AC] agus [BD] a chéile ag an bpointe E.
Cruthaigh go bhfuil na triantáin ABE agus ECD comhchosúil lena chéile.



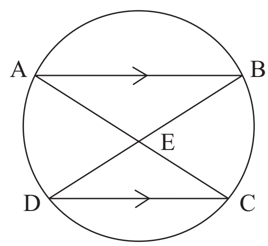
22. (i) Sa léaráid ar dheis, AB||DC.
Cruthaigh gur triantán comhchosach é AEB.

(ii) Dá dtarraingeofaí an léaráid arís sa chaoi go mbeadh E ina lárphointe ar an gciorcal agus go mbeadh AB fós comhthreomhar le DC, cé acu ceann de na ráitis seo a leanas nach mbeadh fíor i gcónaí?

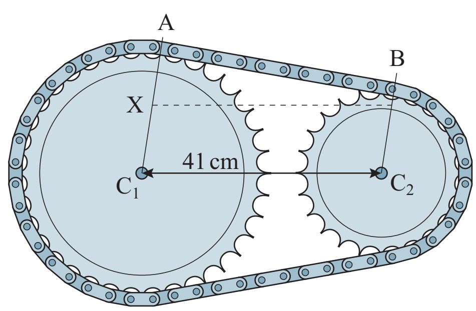
(a) $|AB| = |DC|$

(b) Is triantán comhshleasach é ABE

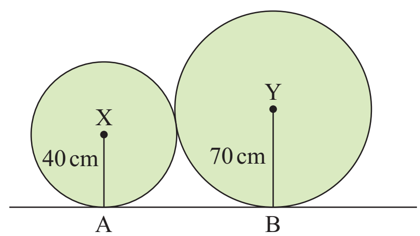
(c) Tá na triantáin AEB agus EDC comhchosúil lena chéile.



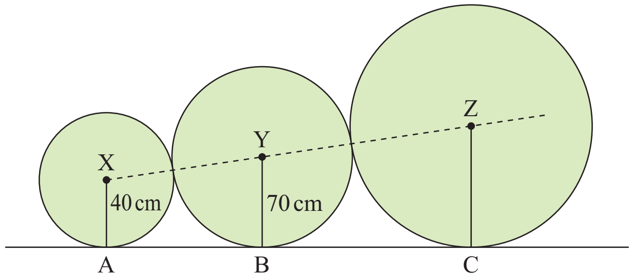
23. Tá slabhra fáiscthe go teann ar dhá roth fhiaclacha, a bhfuil ga 19 cm agus 12 cm orthu, mar a léirítear sa léaráid. Má tá lár an dá chiorcal 41 cm óna chéile, faigh fad na coda dírí den slabhra, [AB].
(Seans go mbeidh an líne bhriste atá comhthreomhar le $[C_1C_2]$ ina cúnamh duit.)



24. (i) Luíonn dhá sféar ar dhromchla comhréidh. Teagmhaíonn siad le chéile, mar a léirítear. Is é 40 cm ga an sféir is lú agus is é 70 cm ga an sféir is mó. Faigh an fad $|AB|$, fad na líne idir pointí teagmhála na sféar leis an dromchla comhréidh.



(ii) Cuirtear an tríú sféar in aice leis an dá sféar a bhí againn i gcuid (i).



Le cinntiú go bhfuil na lárphointí X, Y agus Z comhlíneach, faigh $|ZC|$, fad gha an tríú sféar, ceart go dtí an cm is gaire.

Mír 3.5 Cruthuithe foirmiúla ar theoirimí

Ar shlí fhoirmiúil nó struchtúrtha a chruthaítear **teoirimí** nó torthaí sa chéimseata. Baintear leas as torthaí agus as aicsímí seanbhunaithe le míniú a thabhairt ar na céimeanna a thugtar agus teoirímí á gcruthú againn. Matamaiticeoir Gréagach darbh ainm Eoiclídéas an chéad duine a chruthaigh torthaí céimseatúla ar an tslí sin timpeall na bliana 300 BC.

Is iomaí teoirim a bhfuil cruthú uirthi sa leabhar *Stoicheia* (focal Gréigise a chiallaíonn 'uraiceacht' nó 'bunleabhar'), leabhar céimseatan a scríobh Eoiclídéas agus a bhfuil cáil air ar fud an domhain. Sa lá atá inniu ann, breis agus 2000 bliain ina dhiaidh sin, úsáidimid cur chuige Eoiclídéis fós chun go leor ceisteanna céimseatúla a réiteach.

Aicsím a thugtar ar ráiteas a nglactar leis gan chruthú. Sampla d'aicsím: is é 180° suim na n-uillinneacha i líne dhíreach.

Teoirim a thugtar ar ráiteas a bhfuiltear ábalta a thaispeáint go bhfuil sé fíor ach úsáid a bhaint as aicsímí agus as loighic.

Sa mhír seo tugtar cruthuithe foirmiúla ar na teoirimí atá ar do chúrsa.

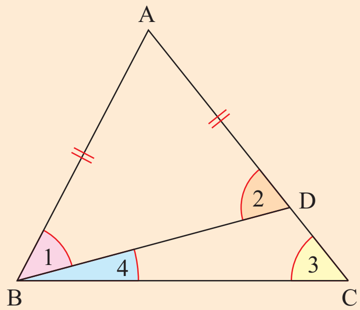
Tá na huimhreacha céanna ar na teoirimí anseo agus atá orthu sa siollabas oifigiúil.

Tharlódh go n-iarrfaí ort cruthúnais theoirimí **11**, **12** agus **13** (agus iad seo amháin) a thabhairt.

Tá réiltín (*) curtha leis na teoirimí sin.

Aithneoidh tú na teoirimí sin ó na míreanna a tháinig roimhe seo sa chaibidil seo. Na torthaí a leanann ó na teoirimí sin, bhain tú úsáid astu leis na ceisteanna éagsúla céimseatúla a réiteach.

Teoirim 7 I gcás dhá shlios ar thriantán, bíonn an uillinn os comhair an tsleasa is faide níos mó ná an uillinn os comhair an tsleasa is giorra.



Tugtha: An triantán ABC ar a bhfuil $|AC| > |AB|$

Le Cruthú: $|\angle ABC| > |\angle ACB|$.

Tógáil: Tóg an pointe D ar [AC] ionas go mbeidh $|AD| = |AB|$. Ceangail BD. Ainmnigh na huillinneacha 1, 2, 3 agus 4, mar a léirítear.

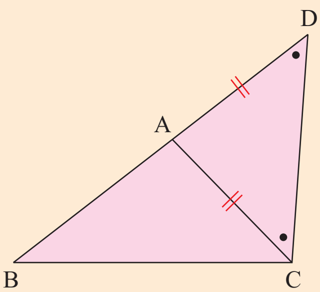
Cruthú:
$|\angle 1| = |\angle 2|$ …triantán comhchosach
$|\angle 2| > |\angle 3|$ …uillinn sheachtrach > uillinn inmheánach
$\Rightarrow \ |\angle 1| > |\angle 3|$
$\Rightarrow \ |\angle 1| + |\angle 4| > |\angle 3|$
$\Rightarrow \ |\angle ABC| > |\angle ACB|$

Teoirim 8 Is mó fad dhá shlios triantáin le chéile ná fad an tríú slios.

Tugtha: An triantán ABC.

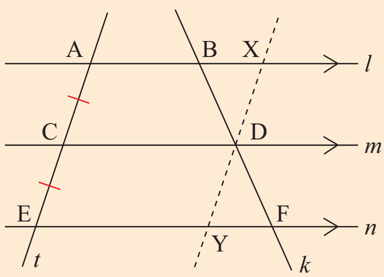
Le Cruthú: $|BA| + |AC| > |BC|$

Tógáil: Lean BA go D ionas go mbeidh $|AD| = |AC|$. Ceangail DC.



Cruthú:
$|\angle ACD| = |\angle ADC|$ …($|AD| = |AC|$)
Ach $|\angle BCD| > |\angle ACD|$
$\Rightarrow \ |\angle BCD| > |\angle ADC|$
Sa triantán BCD, tá $|BD| > |BC|$ …an slios os comhair na huillinne is mó
Ach $|BD| = |BA| + |AC|$
$\Rightarrow \ |BA| + |AC| > |BC|$.

***Teoirim 11** Má ghearrann trí líne chomhthreomhara mírlínte cothroma ar thrasnaí éigin, ansin gearrfaidh siad mírlínte cothroma ar thrasnaí ar bith eile.



Tugtha: Trí líne chomhthreomhara l, m agus n a thrasnaíonn an trasnaí t ag na pointí A, C agus E sa chaoi go bhfuil $|AC| = |CE|$.
Trasnaíonn trasnaí eile, k, na línte ag B, D agus F.

Le Cruthú: $|BD| = |DF|$.

Tógáil: Tarraing líne trí D atá comhthreomhar le t agus a thrasnaíonn l ag X agus n ag Y.

Cruthú: Is comhthreomharáin iad ACDX agus CEYD.

$\Rightarrow \quad |AC| = |XD|$ agus $|CE| = |DY|$ …sleasa urchomhaireacha

Ach $\quad |AC| = |CE|$.

$\Rightarrow \quad |XD| = |DY|$

Sna triantáin BDX agus YDF,

$|XD| = |DY|$

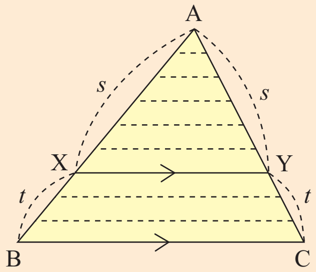
$|\angle BDX| = |\angle YDF|$ …rinnuillinneacha urchomhaireacha

$|\angle DBX| = |\angle DFY|$ …uillinneacha ailtéarnacha

$\Rightarrow$ tá na triantáin BDX agus YDF iomchuí dá chéile

$\Rightarrow \quad |BD| = |DF|$ …sleasa comhfhreagracha

***Teoirim 12** Bíodh ABC ina thriantán. Má tá líne XY comhthreomhar le BC agus má ghearrann sí [AB] sa chóimheas $s : t$, gearrfaidh sí [AC] sa chóimheas céanna.



Tugtha: An triantán ABC ina bhfuil XY comhthreomhar le BC.

Le Cruthú: $\dfrac{|AX|}{|XB|} = \dfrac{|AY|}{|YC|}$

Tógáil: Roinn [AX] ina s cuid chothrom agus [XB] ina t cuid chothrom. Tarraing líne comhthreomhar le BC trí gach pointe den roinnt sin.

Cruthú: Déanann na línte comhthreomhara idirlínte cothroma feadh na líne [AC].

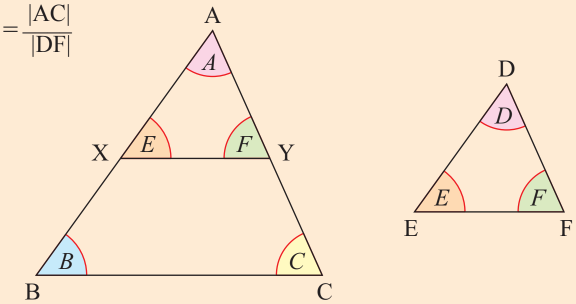
$\therefore$ Roinntear [AY] ina s idirlíne chothrom agus roinntear [YC] ina t idirlíne chothrom.

$\therefore \quad \dfrac{|AY|}{|YC|} = \dfrac{s}{t}$

Ach $\dfrac{|AX|}{|XB|} = \dfrac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|AX|}{|XB|} = \dfrac{|AY|}{|YC|}$

***Teoirim 13** Más triantáin chomhchosúla iad ABC agus DEF, tá na sleasa comhfhreagracha orthu i gcomhréir lena chéile:

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$$



Tugtha: Na triantáin ABC agus DEF, ina bhfuil

$|\angle A| = |\angle D|$, $|\angle B| = |\angle E|$ agus $|\angle C| = |\angle F|$.

Le Cruthú: $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$.

Tógáil: Marcáil an pointe X ar [AB] ionas go mbeidh $|AX| = |DE|$.
Marcáil an pointe Y ar [AC] ionas go mbeidh $|AY| = |DF|$.
Ceangail XY.

Cruthú: Tá na triantáin AXY agus DEF iomchuí dá chéile …(SUS)

$\therefore$ $|\angle AXY| = |\angle DEF|$ …uillinneacha comhfhreagracha

$\therefore$ $|\angle AXY| = |\angle ABC|$

$\therefore$ $XY \| BC$

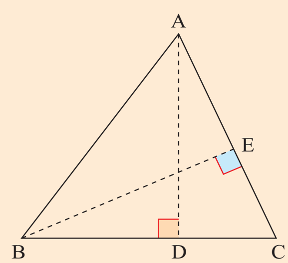
$\therefore$ $\dfrac{|AB|}{|AX|} = \dfrac{|AC|}{|AY|}$ …líne atá comhthreomhar le slios amháin, roinnfidh sí an dá shlios eile sa chóimheas céanna

$\therefore$ $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$

Ar an gcaoi chéanna, is féidir a chruthú go bhfuil $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|}$.

$\therefore$ $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$.

Teoirim 16 I gcás triantán ar bith, is féidir slios ar bith a úsáid mar an bonn agus tú ag iarraidh achar an triantáin a fháil.



Tugtha: An triantán ABC ina bhfuil $AD \perp BC$ agus $BE \perp AC$.

Le Cruthú: $|BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BE|$.

Cruthú: Sna triantáin ADC agus BEC,

$|\angle ADC| = |\angle BEC| = 90°$

Tá $\angle ACD$ i bpáirt
ag an dá thriantán

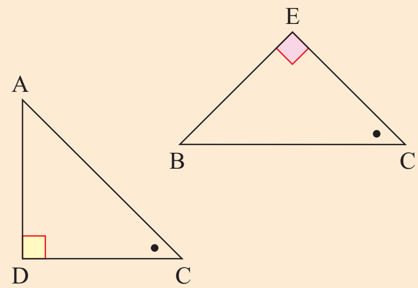
$\Rightarrow \quad |\angle CAD| = |\angle EBC|$

$\Rightarrow$ is triantáin chomhchosúla iad ADC agus BEC

Ó tharla go bhfuil na sleasa comhfhreagracha sa chóimheas céanna,

$$\Rightarrow \quad \frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\Rightarrow \quad |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BE|.$$



Teoirim 17 Trasnán i gcomhthreomharán, déroinneann sé achar an chomhthreomharáin sin.

Tugtha: An comhthreomharán ABCD agus an trasnán [AC]

Le Cruthú: Go ndéroinneann an trasnán [AC] achar an chomhthreomharáin ABCD.

Cruthú: Sna triantáin ABC agus ADC,

$|AB| = |DC|$ …sleasa urchomhaireacha

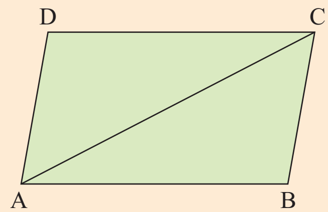
$|BC| = |AD|$ …sleasa urchomhaireacha

$|AC| = |AC|$

$\therefore$ tá na triantáin ABC agus ADC iomchuí dá chéile …(SSS)

$\therefore$ tá achar $\triangle ABC$ = achar $\triangle ADC$

$\therefore$ déroinneann an trasnán [AC] achar an chomhthreomharáin ABCD.



Teoirim 18 Is ionann achar comhthreomharáin agus an bonn iolraithe faoin airde.

Tugtha: An comhthreomharán ABCD a bhfuil airde ingearach h ann.

Le Cruthú: Achar ABCD $= |DC| \times h$.

Cruthú:

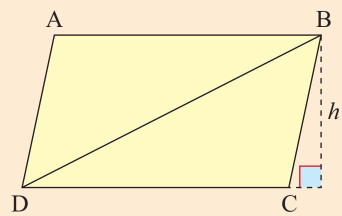
$$\text{Achar } \triangle BCD = \tfrac{1}{2} \text{ bonn} \times \text{airde ingearach}$$

$$= \tfrac{1}{2}|DC| \times h$$

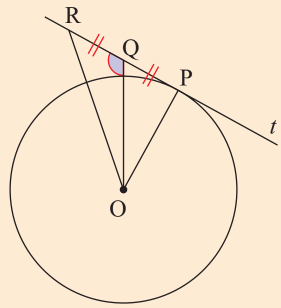
$$\text{Achar } \triangle ABD = \text{achar } \triangle BCD$$ …déroinneann trasnán achar comhthreomharáin

$$\Rightarrow \quad \text{Achar } ABCD = 2\left[\tfrac{1}{2}|DC| \times h\right]$$

$$\text{Achar } ABCD = |DC| \times h$$



Teoirim 20 Tá gach tadhlaí ingearach leis an nga a théann chuig an bpointe tadhaill.



Tugtha: Ciorcal dar lárphointe O agus tadhlaí leis, t. Is é P an pointe tadhaill ag a mbuaileann an tadhlaí agus an ciorcal agus is é [OP] an ga ón lárphointe go dtí an pointe tadhaill.

Le Cruthú: $OP \perp t$

Tógáil: Abraimis gurb é P an pointe tadhaill agus nach bhfuil t ingearach le OP. Tóg líne ón lárphointe go dtí pointe éigin, Q, ar an tadhlaí. Abraimis go bhfuil OQ ingearach leis an tadhlaí. Roghnaigh pointe eile, R, ar t ionas go mbeidh $|PQ| = |QR|$. Ceangail OQ agus OR.

Cruthú: Sna triantáin OPQ agus OQR,

$|OQ| = |OQ|$ …slios i bpáirt acu

$|PQ| = |QR|$ …tugtha

$|\angle OQP| = |\angle OQR|$ …iad araon = 90°

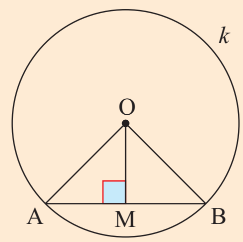
$\therefore$ tá na triantáin OPQ agus OQR iomchuí dá chéile …(SUS)

$\therefore$ $|OR| = |OP|$ …taobhagáin an dá thriantán iomchuí

Mar sin, is pointe eile é R ag a mbuaileann an tadhlaí, t, leis an gciorcal, i.e. sa chás go bhfuil OQ ingearach leis an tadhlaí. **Ach** ní féidir leis sin a bheith fíor, mar gur tadhlaí é t. Ar an tslí sin, ní féidir le OQ a bheith ingearach leis an tadhlaí. Ar an gcaoi chéanna, d'fhéadfaimis a chruthú nach bhfuil líne ar bith eile ón lárphointe go dtí an tadhlaí ingearach leis an tadhlaí, ach amháin OP. Dá réir sin, caithfidh t a bheith ingearach le [OP], i.e., $OP \perp t$.

Nóta: Is sampla é an cruthú thuas de chruthú trí bhréagnú.

Teoirim 21 An t-ingear ó lárphointe ciorcail go dtí corda faoi leith, déroinneann sé an corda sin.



Tugtha: Ciorcal k dar lárphointe O agus dar corda [AB]. $OM \perp AB$.

Le Cruthú: $|AM| = |MB|$

Tógáil: Ceangail OA agus OB.

Cruthú: Sna triantáin AOM agus BOM,

$|OA| = |OB|$ … = ga

$|OM| = |OM|$ …slios i bpáirt acu

$|\angle OMA| = |\angle OMB|$ …iad araon = 90°

$\therefore$ tá na triantáin AOM agus BOM iomchuí dá chéile …(DTS)

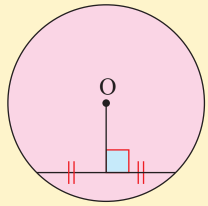
$\therefore$ $|AM| = |MB|$.

Súil Siar - Ceisteanna

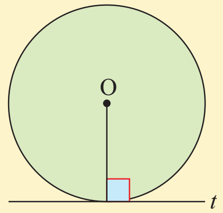
Na ceisteanna uile ar an gcéimseata shintéiseach (nó an chéimseata aicsímeach nó ghlan), tugtar le chéile iad i ndeireadh Chaibidil 6, An Chéimseata 2: Méaduithe agus Tógálacha.

Achoimre ar na Príomhphointí

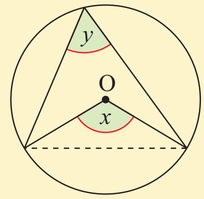
1. Airíonna an Chiorcail



An t-ingear ó lárphointe ciorcail go dtí corda faoi leith, déroinneann sé an corda sin.

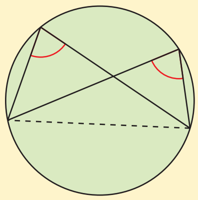


Tá gach tadhlaí ingearach leis an nga a théann chuig an bpointe tadhaill.

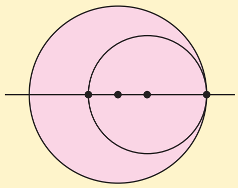


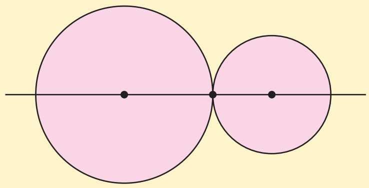
$x = 2y$

Is ionann tomhas na huillinne i lár ciorcail agus dhá oiread thomhas na huillinne ar an imlíne.



Uillinneacha atá ar an stua céanna ar an imlíne, beidh siad ar cóimhéid.



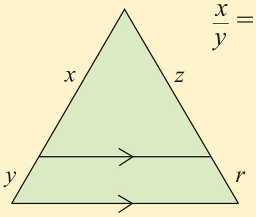


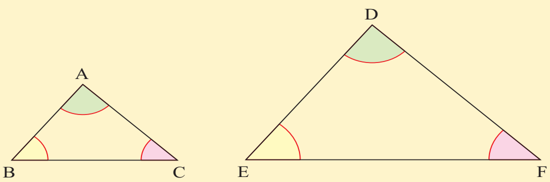
Mura dtrasnaíonn dhá chiorcal a chéile ach ag aon phointe amháin, tá an dá lárphointe agus an pointe tadhaill comhlíneach lena chéile.

2. Triantáin agus Comhthreomharáin

1. Is mó fad dhá shlios triantáin le chéile ná fad an tríú slios.
2. I gcás dhá shlios ar thriantán, bíonn an uillinn os comhair an tsleasa is faide níos mó ná an uillinn os comhair an tsleasa is giorra.
3. I gcás triantán ar bith, is féidir slios ar bith a úsáid mar an bonn agus tú ag iarraidh achar an triantáin a fháil.
4. Trasnán i gcomhthreomharán, déroinneann sé achar an chomhthreomharáin sin.
5. Is ionann achar comhthreomharáin agus an bonn iolraithe faoin airde ingearach.
6. Má ghearrann trí líne chomhthreomhara mírlínte cothroma ar thrasnaí éigin, ansin gearrfaidh siad mírlínte cothroma ar thrasnaí ar bith eile.
7. Má tá líne comhthreomhar le slios ar bith i dtriantán déanfaidh sí an dá shlios eile a roinnt sa chóimheas céanna.

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{r}$$



8. 

Más triantáin chomhchosúla iad ABC agus DEF, tá na sleasa comhfhreagracha orthu i gcomhréir lena chéile,

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

caibidil **4**

An Chéimseata Chomhordanáideach: An Ciorcal

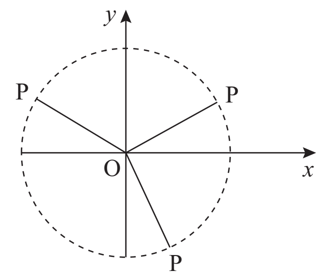
Focail thábhachtacha

lárphointe ga tadhlaí corda ingearach comhthreomhar pointe trasnaithe
comhchorda pointe tadhaill inmheánach seachtrach comhthadhlaí

Mír 4.1 Cothromóid chiorcail dar lárphointe (0, 0)

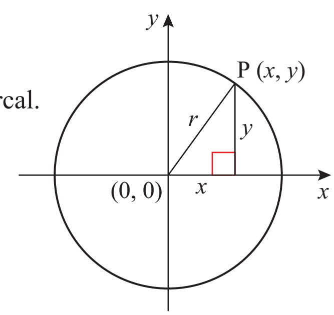
Sainmhíniú

Is ionann ciorcal agus tacar pointí atá ar comhfhad ó phointe áirithe, ar a dtugtar **an lárphointe**.



Tá [OP] i gcónaí ar comhfhad le ga an chiorcail.

Ciorcal dar lárphointe (0, 0) agus dar ga r atá sa léaráid thall.



Bíodh P(x, y) ina phointe ar bith ar an gciorcal.

Sa triantán dronuilleach, tá

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Is é sin **cothromóid** an chiorcail dar lárphointe (0, 0) agus dar ga r.

Faighimid cothromóid an chiorcail ach an méid seo a bheith ar eolas againn:
(i) lárphointe an chiorcail (ii) fad an gha.

Ciorcal dar lárphointe (0, 0) agus dar ga r, is é seo a chothromóid
$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}.$$

Sampla 1

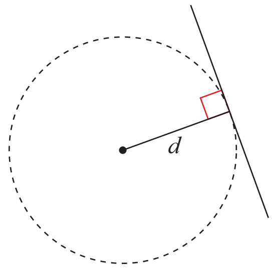
Tá lárphointe ciorcail ag (0, 0) agus gabhann sé tríd an bpointe (3, -1).
(i) Faigh ga an chiorcail.
(ii) Faigh cothromóid an chiorcail.

(i) Is ionann ga an chiorcail agus an fad ó (0, 0) go dtí (3, -1).

An fad sin $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$$= \sqrt{(3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

(ii) Cothromóid an chiorcail:
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 10 \text{ an chothromóid a theastaíonn.}$$

Má thugtar lárphointe an chiorcail agus cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal, gheobhaimid an ga ach an fad ingearach a fháil ó lárphointe an chiorcail go dtí an tadhlaí.



d = fad an gha

Sampla 2

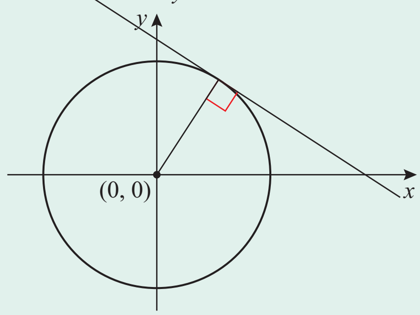
Is tadhlaí le ciorcal dar lárphointe (0, 0) é an líne $2x + 3y - 13 = 0$.
Faigh cothromóid an chiorcail seo.

Is ionann ga an chiorcail agus an fad ingearach ó (0, 0) go dtí $2x + 3y - 13 = 0$.

De réir na foirmle $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\text{an ga} = \frac{|2(0) + 3(0) - 13|}{\sqrt{4 + 9}}$$

$$= \frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{13\sqrt{13}}{13} = \sqrt{13}$$



Is é $x^2 + y^2 = r^2$ cothromóid an chiorcail $\quad r = \sqrt{13}$

i.e. $x^2 + y^2 = 13$

An ga a fháil ó chothromóid an chiorcail

(0, 0) lárphointe an chiorcail $x^2 + y^2 = r^2$ agus is é r an ga.

$\Rightarrow$ (0, 0) lárphointe an chiorcail $x^2 + y^2 = 8$ agus is é $\sqrt{8}$ an ga.

Más é $4x^2 + 4y^2 = 9$ cothromóid an chiorcail, roinn gach téarma ar 4 chun go mbeidh an chothromóid san fhoirm $x^2 + y^2 = r^2$.

$$4x^2 + 4y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}$$

Cleachtadh 4.1

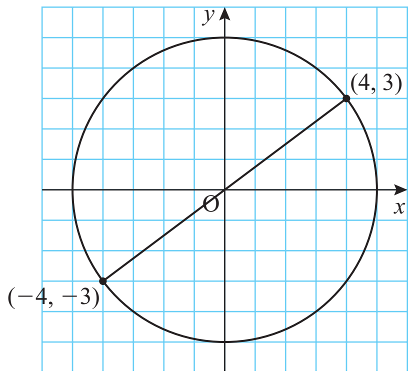
1. Scríobh síos cothromóidí na gciorcal dar lárphointe (0, 0) agus dar ga iad seo a leanas:
(i) 2 (ii) 5 (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $3\sqrt{2}$ (v) $\frac{3}{4}$ (vi) $2\frac{1}{2}$

2. Tá an pointe (3, 4) ar chiorcal dar lárphointe (0, 0).
Faigh cothromóid an chiorcail.

3. Faigh cothromóid an chiorcail dar lárphointe (0, 0) a ghabhann tríd an bpointe (−4, 1).

4. Is iad na pointí (4, 3) agus (−4, −3) foircinn an trastomhais i gciorcal áirithe.

Faigh (i) comhordanáidí lárphointe an chiorcail
(ii) fad an gha
(iii) cothromóid an chiorcail.



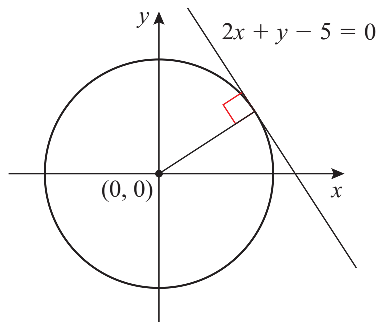
5. Is trastomhas ciorcail í an mhírlíne a ghabhann trí (4, −1) agus (−4, 1).
Faigh cothromóid an chiorcail sin.

6. Scríobh síos ga gach ceann de na ciorcail seo:

(i) $x^2 + y^2 = 9$ (ii) $x^2 + y^2 = 1$ (iii) $x^2 + y^2 = 27$
(iv) $4x^2 + 4y^2 = 25$ (v) $9x^2 + 9y^2 = 4$ (vi) $16x^2 + 16y^2 = 49$.

7. Is tadhlaí le ciorcal dar lárphointe (0, 0) é an líne $2x + y - 5 = 0$.

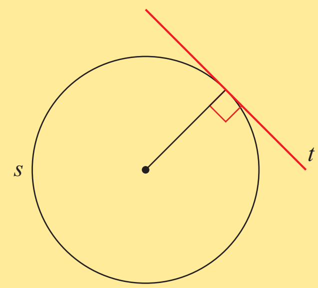
(i) Faigh ga an chiorcail.
(ii) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.



8. Faigh cothromóid an chiorcail dar lárphointe (0, 0) más tadhlaí leis an gciorcal é an líne $4x - 3y - 25 = 0$.

9. Is tadhlaí leis an gciorcal dar lárphointe (0, 0) é an líne $3x - y + 10 = 0$.
Faigh cothromóid an chiorcail.

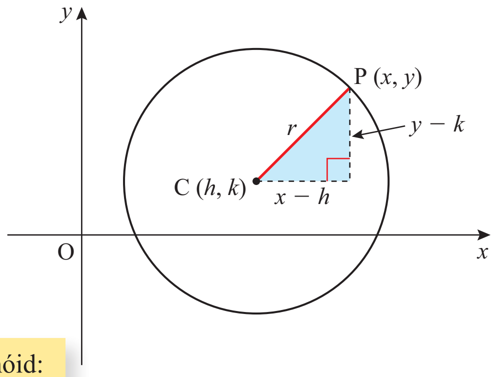
10. Faigh cothromóid an chiorcail s dar lárphointe (0, 0) agus dar ga $2\sqrt{5}$.
$x - 2y + 10 = 0$ is ea an líne t.
Faigh an fad ó lárphointe s go dtí an líne t, agus bunaithe air sin abair an tadhlaí le s é t.



Is tadhlaí leis an gciorcal í líne más ionann ga an chiorcail agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí an líne.

Mír 4.2 Cothromóid an chiorcail dar lárphointe (h, k) agus dar ga r

Ciorcal dar lárphointe C(h, k) agus dar ga r atá sa léaráid ar dheis.



Bíodh P(x, y) ina phointe ar bith ar an gciorcal.

Tá an fad ó C go P ar comhfhad le ga an chiorcail.

Ón léaráid,

$$|CP|^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Ach tá $|CP| = r$

$$\Rightarrow \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ciorcal dar lárphointe (h, k) agus dar ga r, is é seo a chothromóid:

$$\mathbf{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

Sampla 1

Faigh cothromóid an chiorcail dar lárphointe (3, −1) agus dar ga 4.

Is é seo an chothromóid: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 16$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$$

Sampla 2

Faigh lárphointe agus ga an chiorcail

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

lárphointe = (3, −4) ga = $\sqrt{36} = 6$

Cothromóid ghinearálta an chiorcail

Féachaimis arís ar an gcothromóid $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$ mar atá i Sampla 2 thuas

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 36$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

An lárphointe (3, −4) $\quad 3 = -\left(\frac{1}{2}\text{ chomhéifeacht } x\right)$,

$$-4 = -\left(\frac{1}{2}\text{ chomhéifeacht } y\right)$$

An ga $\sqrt{(3)^2 + (-4)^2 - (-11)}$

$$= \sqrt{9 + 16 + 11} = \sqrt{36} = 6$$

Más san fhoirm

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

atá cothromóid chiorcail

(i) lárphointe = $(-g, -f)$

(ii) ga = $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$,
nuair atá $g^2 + f^2 - c > 0$

T&T4.indb 114 10/07/2018 17:46:20

Sampla 3

Faigh lárphointe agus ga an chiorcail $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$.

$$\text{Lárphointe} = \left(-\tfrac{1}{2}\text{ chomhéifeacht } x,\ -\tfrac{1}{2}\text{ chomhéifeacht } y\right)$$
$$= (1, -2)$$

$$\text{Ga} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$
$$= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 - (-8)}$$
$$= \sqrt{1 + 4 + 8} = \sqrt{13}$$

$\therefore$ is é $(1, -2)$ an lárphointe agus is é $\sqrt{13}$ an ga

Nóta: **1.** Is féidir cothromóid chiorcail a scríobh ar dhá bhealach

(i) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ … lárphointe $= (h, k)$ agus ga $= r$

(ii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ … lárphointe $= (-g, -f)$ agus ga $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

2. Nuair atá an lárphointe agus an ga i gciorcal a bhfuil a chothromóid san fhoirm $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ á bhfáil agat, ní mór a chinntiú gurb ionann agus a haon (1) comhéifeacht x^2 agus comhéifeacht y^2 araon.

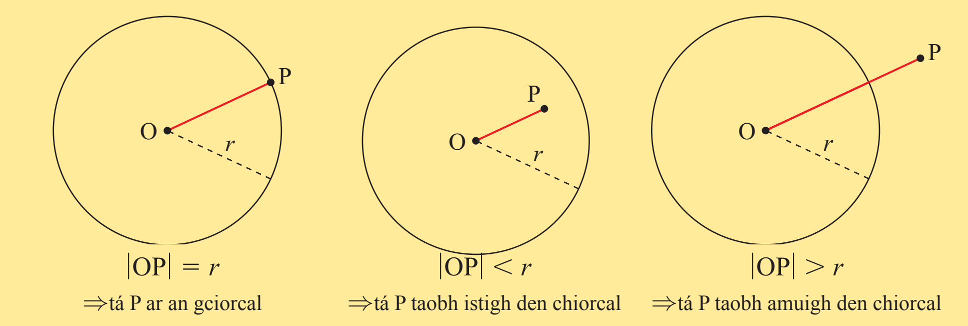
3. Bíonn na saintréithe a leanas le tabhairt faoi deara ar chothromóid chiorcail:

(i) Cothromóid den dara céim in x agus in y a bhíonn ann.

(ii) Bíonn comhéifeacht x^2 agus y^2 ar cóimhéid.

(iii) Ní bhíonn téarma ar bith in xy.

Pointí agus ciorcail



Nóta: Tá pointe ar chiorcal má shásaíonn comhordanáidí an phointe sin cothromóid an chiorcail.

Sampla 4

Fiosraigh an bhfuil an pointe P(4, 1) taobh istigh den chiorcal $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$.

Lárphointe an chiorcail $= (3, -2)$

Ga an chiorcail $= \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 - 4} = \sqrt{9 + 4 - 4} = \sqrt{9} = 3$

Is ionann an fad ó $(3, -2)$ go dtí P(4, 1) agus

$$\sqrt{(4 - 3)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

Tá an fad sin, i.e. $\sqrt{10}$, níos mó ná an ga 3,

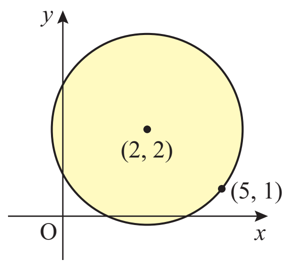
$\Rightarrow$ tá an pointe P(4, 1) taobh amuigh den chiorcal.

Cleachtadh 4.2

1. Faigh cothromóid gach ciorcail díobh seo a leanas san fhoirm $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

(i) lárphointe (3, 1); ga = 2
(ii) lárphointe (1, −4); ga = $\sqrt{8}$
(iii) lárphointe (4, 0); ga = $2\sqrt{3}$
(iv) lárphointe (0, −5); ga = $3\sqrt{2}$

2. Is é (2, 2) lárphointe an chiorcail ar dheis. Má ghabhann an ciorcal tríd an bpointe (5, 1), faigh cothromóid an chiorcail.



3. Trastomhas ciorcail is ea an mhírlíne a ghabhann trí (3, 5) agus (−1, 1).

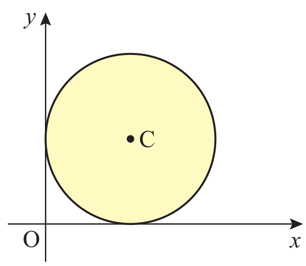
(i) Faigh comhordanáidí lárphointe an chiorcail.
(ii) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

4. Scríobh síos lárphointe agus ga gach ceann de na ciorcail seo:

(i) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$
(ii) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 8$
(iii) $(x - 3)^2 + y^2 = 5$
(iv) $x^2 + (y + 2)^2 = 10$

5. Faigh cothromóid an chiorcail dar lárphointe (−2, 5) agus a bhfuil an ga ann ar comhfhad le trastomhas an chiorcail $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 18$.

6. Teagmhaíonn an ciorcal ar dheis leis an x-ais agus leis an y-ais. Más é 3 ga an chiorcail, scríobh síos comhordanáidí C, lárphointe an chiorcail. Bunaithe air sin scríobh síos cothromóid an chiorcail.



7. Faigh lárphointe agus ga gach ceann de na ciorcail seo:

(i) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$
(ii) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$
(iii) $x^2 + y^2 - 8x - 8 = 0$
(iv) $x^2 + y^2 + 5x - 6y = 5$
(v) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$
(vi) $4x^2 + 4y^2 - 28y + 33 = 0$

8. Léirigh go bhfuil an pointe (5, −5) ar an gciorcal $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

9. Léirigh go bhfuil an pointe (3, 6) taobh amuigh den chiorcal $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.

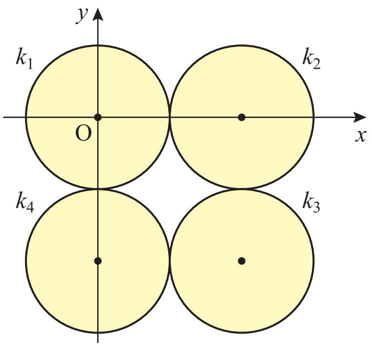
10. Fiosraigh an bhfuil an pointe (3, 1) taobh amuigh nó taobh istigh den chiorcal $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$.

11. An bhfuil an pointe (1, 1) taobh amuigh den chiorcal, taobh istigh den chiorcal nó ar an gciorcal $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$?

12. Is é 7 ga an chiorcail $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$.
Faigh luach k.

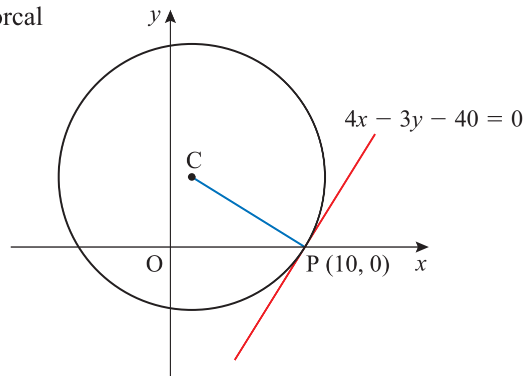
13. Is é $(-4, 3)$ lárphointe an chiorcail k. Is tadhlaí le k í an y-ais.
(i) Tarraing sceitse den chiorcal k.
(ii) Scríobh síos ga an chiorcail.
(iii) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

14. Tá ceithre chiorcal sa léaráid agus an fad céanna i nga gach ceann díobh. Teagmhaíonn na ciorcail lena chéile mar atá le feiceáil.
Is é $x^2 + y^2 = 4$ cothromóid k_1.
(i) Scríobh síos ga k_1.
(ii) Scríobh síos comhordanáidí lárphointe k_3.
(iii) Scríobh síos cothromóid k_3.
(iv) An é $x^2 + (y + 4)^2 = 4$ cothromóid k_2 nó k_4?
Mínigh do fhreagra.

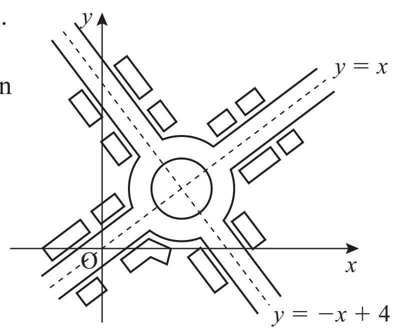


15. Tá lárphointe an chiorcail k sa dara ceathrú. Is é 4 a gha.
Is tadhlaithe le k iad an x-ais agus y-ais.
Tarraing sceitse den chiorcal sin agus, bunaithe air sin, scríobh síos cothromóid an chiorcail.

16. Teagmhaíonn an líne $4x - 3y - 40 = 0$ leis an gciorcal $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 100$ ag P(10, 0).
(i) Scríobh síos comhordanáidí C, lárphointe an chiorcail.
(ii) Léirigh go bhfuil CP ingearach leis an líne áirithe sin.

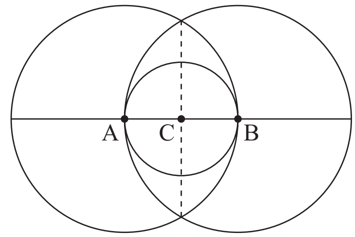


17. Tá dhá bhóthar léirithe mar línte díreacha ar phlean sráide.
$y = -x + 4$ agus $y = x$ na cothromóidí a bhaineann leo.
Trasnaíonn an dá líne sin a chéile ag lárphointe timpeallláin dar trastomhas 2 aonad ar an bplean.
Faigh cothromóid an chiorcail a sheasann don timpeallán.



18. Is é $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ cothromóid an chiorcail bhig dar lárphointe C.

Teagmhaíonn an dá chiorcal mhóra, dar lárphointe A agus B faoi seach, leis an gciorcal beag
Tá AB comhthreomhar leis an x-ais.
Faigh (i) lárphointe agus ga gach ceann de na trí chiorcal
(ii) cothromóid an chiorcail dar lárphointe A.



Mír 4.3 Cothromóid chiorcail a fháil

De ghnáth, is gá na nithe a leanas a bheith ar eolas chun cothromóid chiorcail a fháil:
(i) lárphointe an chiorcail (ii) ga an chiorcail.

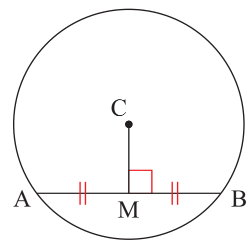
Ní gnách an dá phíosa eolais sin a thabhairt go díreach sna ceisteanna is deacra, áfach. Ar ár gcuid eolais ar chéimseata an chiorcail a bhímid ag brath chun an lárphointe agus an ga a fháil.

Tá tábhacht ar leith le trí airí chéimseatúla a bhaineann leis an gciorcal.

1. An t-ingear ó lárphointe ciorcail go dtí corda, déroinneann sé an corda sin
Sa léaráid ar dheis, tá $CM \perp AB$

$$|AM| = |MB|$$

Atoradh na teoirime seo atá in airí 2 thíos.

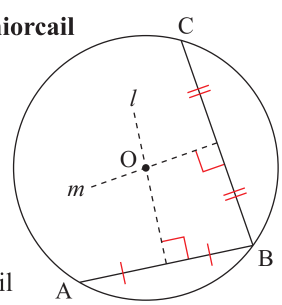


2. Déroinnteoir ingearach an chorda, gabhann sé trí lárphointe an chiorcail
Sa léaráid ar dheis is é l déroinnteoir ingearach an chorda [AB] agus is é m déroinnteoir ingearach an chorda [BC].

Tá an lárphointe, O, ar an dá dhéroinnteoir sin.

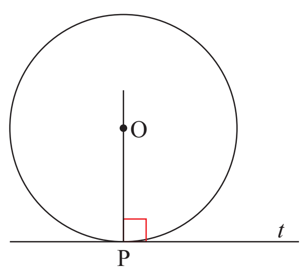
An áit a mbuaileann an dá dhéroinnteoir ingearacha sin le chéile, is é sin lárphointe an chiorcail.

Nóta: Is cúnamh dúinn an t-airí sin nuair a bhíonn cothromóid chiorcail uainn agus trí phointe ar an gciorcal ar eolas againn.



3. An t-ingear le tadhlaí ag an bpointe tadhaill, gabhann sé trí lárphointe an chiorcail
Sa léaráid ar dheis, teagmhaíonn an tadhlaí, t, leis an gciorcal ag an bpointe P.

Tá an lárphointe O ar an ingear le t a ghabhann trí P.



1. Cothromóid chiorcail a fháil nuair atá trí phointe air tugtha

Sampla 1

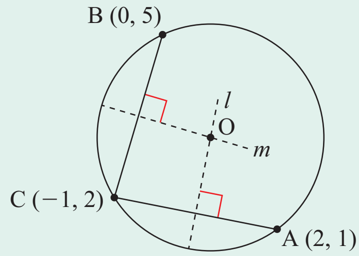
Faigh cothromóid an chiorcail a bhfuil na pointí A(2, 1), B(0, 5) agus C(−1, 2) air.

Tá na trí phointe atá ar eolas againn le feiceáil sa chiorcal ar dheis.

Is é l déroinnteoir ingearach [CA]

Is é m déroinnteoir ingearach [BC].

Ní mór dúinn cothromóidí l agus m a fháil anois.



Cothromóid l:

$$\text{Fána AC} = \frac{1-2}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \text{fána } l = 3$$

$$\text{Lárphointe [AC]} = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Cothromóid } l\text{: pointe} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{fána} = 3$$

$$y - \frac{3}{2} = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{3}{2} = 3x - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2y - 3 = 6x - 3$$

$$\Rightarrow \quad 6x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x - y = 0 \ldots ①$$

Cothromóid m:

$$\text{Fána BC} = \frac{5-2}{0+1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\Rightarrow \quad \text{fána } m = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Lárphointe [BC]} = \left(\frac{0-1}{2}, \frac{5+2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{Cothromóid } m\text{: pointe} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{fána} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{7}{2} = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{7}{2} = -\frac{x}{3} - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad 6y - 21 = -2x - 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x + 6y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x + 3y - 10 = 0 \ldots ②$$

Nuair a réitítear cothromóidí l agus m:

$$①: \quad 3x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - y = 0$$

$$②: \quad x + 3y = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{3x + 9y = 30}$$

$$-10y = -30 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$\therefore$ Is é O(1, 3) lárphointe an chiorcail.

Is é $|OA|$ ga an chiorcail.

$$|OA| = \sqrt{(1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Is é $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ cothromóid an chiorcail dar lárphointe (1, 3) agus dar ga $\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5 \text{ cothromóid an chiorcail}$$

Modh eile

Is féidir leas a bhaint as cothromóid ghinearálta an chiorcail $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ chun cothromóid chiorcail ar a bhfuil trí phointe a fháil. Má chuirimid isteach na trí phéire luachanna do x agus y, gheobhaimid 3 chothromóid chomhuaineacha.
Léirítear é sin sa sampla a leanas.

Sampla 2

Faigh cothromóid an chiorcail a ghabhann trí na pointí (0, 0), (3, 1) agus (3, 9).

Bíodh $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ina chothromóid ar an gciorcal.

$(0, 0) \in$ den chiorcal $\Rightarrow \quad 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \ldots$ ①
$(3, 1) \in$ den chiorcal $\Rightarrow \quad 9 + 1 + 6g + 2f + c = 0$
$\Rightarrow \quad 6g + 2f = -10 \ldots$ ② $\ldots (c = 0)$
$(3, 9) \in$ den chiorcal $\Rightarrow \quad 9 + 81 + 6g + 18f + c = 0$
$\Rightarrow \quad 6g + 18f = -90 \ldots$ ③ $\ldots (c = 0)$

Nuair a réitítear cothromóidí ② agus ③.

②: $\quad 6g + 2f = -10$
③: $\quad 6g + 18f = -90$
$\quad -16f = 80$
$\Rightarrow \quad 16f = -80 \quad \Rightarrow \quad f = -5$

②: $\quad 6g + 2(-5) = -10$
$\quad 6g = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0$

$\therefore \quad g = 0, f = -5$ agus $c = 0$

Anois, cuirtear na luachanna sin isteach sa chothromóid

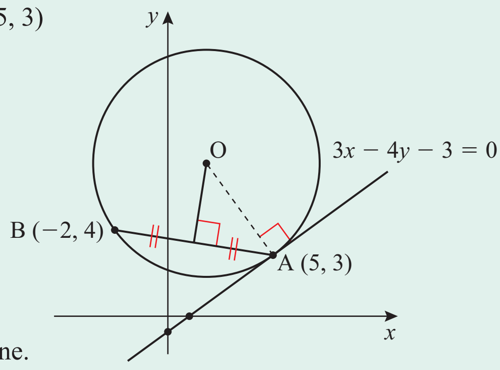
$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 10y = 0$$ cothromóid an chiorcail.

Nóta: Má tá (0, 0) ar cheann den trí phointe ar imlíne ciorcail atá ar eolas againn, de ghnáth bíonn sé níos fusa an chothromóid a fháil de réir mar atá i Sampla 2 ná de réir mar atá i Sampla 1.

2. Cothromóid chiorcail a fháil nuair atá cothromóid an tadhlaí, an pointe tadhaill agus pointe amháin eile ar eolas

Sampla 3

Faigh cothromóid an chiorcail a thadhlaíonn leis an líne $3x - 4y - 3 = 0$ ag an bpointe A(5, 3) agus a ghabhann tríd an bpointe B(−2, 4).



Tá léaráid gharbh den chiorcal ar dheis.

Tá an lárphointe O ar dhéroinnteoir ingearach [AB].

Tá an lárphointe ar an líne a ghabhann trí A(5, 3) freisin. Líne í sin atá ingearach leis an tadhlaí $3x - 4y - 3 = 0$.

Is é an lárphointe, O, pointe trasnaithe an dá líne.

(i) Cothromóid dhéroinnteoir ingearach [AB]:

Fána AB $= \frac{3-4}{5+2} = -\frac{1}{7}$

$\Rightarrow$ fána dhéroinnteoir ingearach AB $= 7$

Lárphointe [AB] $= \left(\frac{-2+5}{2}, \frac{4+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Cothromóid dhéroinnteoir ingearach [AB]:

pointe $= \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$; fána $= 7$

$$y - \frac{7}{2} = 7\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{7}{2} = 7x - \frac{21}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2y - 7 = 14x - 21 \quad \Rightarrow \quad 14x - 2y - 14 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 7x - y - 7 = 0 \ldots ①$$

(ii) Cothromóid na líne trí A atá ingearach le $3x - 4y - 3 = 0$:

Is ionann fána $3x - 4y - 3 = 0$ agus $\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ fána an ingir $= -\frac{4}{3}$.

Cothromóid na líne: $y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 5)$

$$\Rightarrow \quad 3y - 9 = -4x + 20$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 3y - 29 = 0 \ldots ②$$

Má réitítear cothromóidí ① agus ② faighimid:

① × 3: $21x - 3y = 21$

② : $4x + 3y = 29$

$25x = 50 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ agus $y = 7$

$\Rightarrow$ is é (2, 7) lárphointe an chiorcail.

Is ionann ga an chiorcail agus an fad ó (2, 7) go dtí (−2, 4).

$\therefore$ an ga $= \sqrt{(-2-2)^2 + (4-7)^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

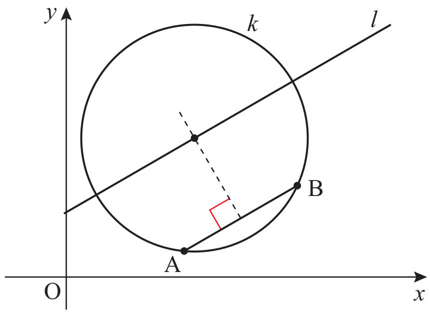
Is é cothromóid an chiorcail dar lárphointe (2, 7) agus dar ga 5:

$$(x-2)^2 + (y-7)^2 = 25$$

3. Cothromóid chiorcail a fháil nuair a ghabhann sé trí dhá phointe thugtha agus a lárphointe ar líne thugtha

Tá an ciorcal k le feiceáil sa léaráid ar dheis. Tá dhá phointe ar leith, A agus B, ar an gciorcal agus gabhann an líne l trí lárphointe an chiorcail.

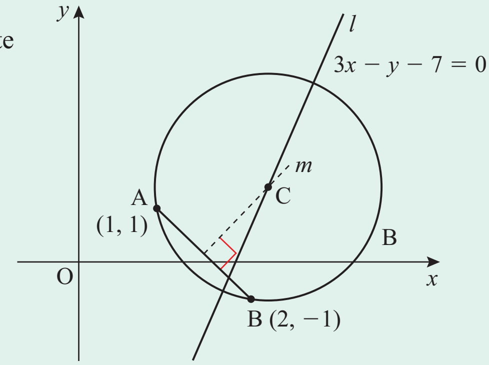
Chun lárphointe an chiorcail a fháil, faigh an pointe ag a dtrasnaíonn an líne l agus déroinnteoir ingearach [AB] a chéile.



Sampla 4

Faigh cothromóid an chiorcail a bhfuil a lárphointe ar an líne l: $3x - y - 7 = 0$, ciorcal a ghabhann trí na pointí A(1, 1) agus B(2, −1).

Is é m déroinnteoir ingearach [AB].
Is ionann lárphointe an chiorcail agus an pointe ag a dtrasnaíonn m agus an líne $3x - y - 7 = 0$ a chéile.



$$\text{Lárphointe [AB]} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$\text{Fána AB} = \frac{-1-1}{2-1} = -2$$

$$\text{Fána } m = \frac{1}{2}$$

Cothromóid m: pointe $= \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ agus fána $= \frac{1}{2}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4y = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad 2x - 4y - 3 = 0 \ldots \text{ cothromóid } m$$

Anois faighimis an pointe ag a dtrasnaíonn l agus m a chéile.

$$l: \quad 3x - y = 7 \quad (\times 2): \quad 6x - 2y = 14$$

$$m: \quad 2x - 4y = 3 \quad (\times 3): \quad \underline{6x - 12y = 9}$$

$$10y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$$

$$l: \quad 3x - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 7\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x = \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad \text{lárphointe an chiorcail, C} = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Is ionann an ga agus an fad ó $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ go dtí (1, 1).

$$\Rightarrow \quad \text{ga} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}}$$

Is é cothromóid an chiorcail $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

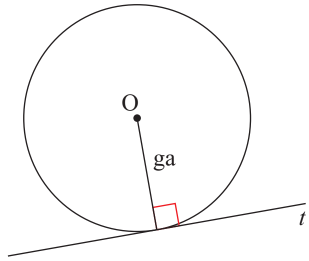
Nóta **1.** Is féidir leas a bhaint as cothromóid ghinearálta an chiorcail, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, chun an cheist i Sampla 4 a réiteach. Má chuirimid na pointí (1, 1) agus (2, −1) isteach i gcothromóid an chiorcail, faighimid dhá chothromóid in g, f agus c.

Ós rud é go bhfuil an lárphointe $(-g, -f)$ ar an líne $3x - y - 7 = 0$, faighimid an chothromóid $-3g + f - 7 = 0$.

Réitímid na trí chothromóid ansin go bhfaighimid luach g, luach f agus luach c.

2. Is tadhlaí le ciorcal í líne nach mbuaileann leis an gciorcal ach ag aon phointe amháin.

Is ionann ga an chiorcail agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí tadhlaí.



3. A léiriú gur tadhlaí le ciorcal í líne

Is tadhlaí le ciorcal í líne más ionann an ga agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí an líne.

Sampla 5

Léirigh gur tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 8 = 0$ é an líne $x + 6y - 9 = 0$.

Lárphointe an chiorcail $= (2, -5)$ Ga an chiorcail $= \sqrt{(2)^2 + (-5)^2 + 8} = \sqrt{37}$.

Is é an fad ingearach ó ((2, −5) go dtí an líne $x + 6y - 9 = 0$ ná

$$\frac{|2(1) + 6(-5) - 9|}{\sqrt{1^2 + 6^2}} = \frac{|2 - 30 - 9|}{\sqrt{37}} = \frac{|-37|}{\sqrt{37}} = \frac{37\sqrt{37}}{37} = \sqrt{37}$$

De bhrí go bhfuil an fad ingearach sin cothrom leis an nga

$\Rightarrow$ is tadhlaí leis an gciorcal í an líne

Cleachtadh 4.3

1. Faigh lárphointe agus ga an chiorcail $x^2 + y^2 = 10$.
Faigh an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí an líne l: $3x + y + 10 = 0$, agus, bunaithe air sin, léirigh gur tadhlaí leis an gciorcal é l.

2. Scríobh síos lárphointe agus ga an chiorcail $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 50$.
Léirigh ansin gur tadhlaí leis an gciorcal é an líne $x - y + 3 = 0$.

3. Cothromóid chiorcail é $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$.
Fiosraigh an tadhlaí leis an gciorcal sin an líne $3x - 4y - 12 = 0$.

4. Is tadhlaí leis an gciorcal k an líne $2x - 3y - 5 = 0$. Más é (−1, 2) lárphointe k, faigh cothromóid k.

5. Faigh cothromóid an chiorcail dar lárphointe (2, 1) agus a theagmhaíonn leis an líne $x - y + 5 = 0$.

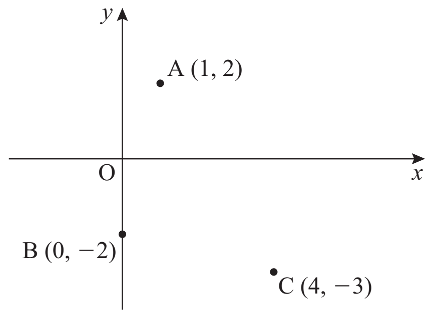
6. Is é $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ cothromóid chiorcail.
(i) Scríobh síos comhordanáidí lárphointe an chiorcail.
(ii) Faigh ga an chiorcail.
(iii) Tarraing sceitse den chiorcal.
(iv) Teagmhaíonn an ciorcal leis an dá ais. Mínigh cén chaoi arb eol dúinn é sin.

7. Scríobh síos cothromóid an chiorcail dar lárphointe (2, 2) agus a theagmhaíonn leis an dá ais.

8. Faigh cothromóid an chiorcail dar lárphointe (2, 3) agus a theagmhaíonn leis an y-ais.

9. Is é $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ cothromóid an chiorcail s.
(i) Faigh comhordanáidí lárphointe agus ga s.
(ii) Faigh luachanna k más tadhlaí le s é an líne $3x + 4y - k = 0$.

10. Tá na pointí A(1, 2), B(0, −2) agus C(4, −3) le feiceáil sa léaráid thíos.



(i) Faigh cothromóid dhéroinnteoir ingearach [AB].
(ii) Faigh cothromóid dhéroinnteoir ingearach [BC].
(iii) Faigh pointe trasnaithe an dá dhéroinnteoir sin.
(iv) Scríobh síos ga an chiorcail a ghabhann trí na trí phointe sin.
(v) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

11. Bain leas as cothromóid ghinearálta an chiorcail $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ chun cothromóid an chiorcail a ghabhann trí na pointí (0, 0), (2, 0) agus (3, −1) a fháil.

12. Faigh cothromóid an chiorcail a ghabhann trí na pointí (0, 0), (−2, 4) agus (−1, 7).

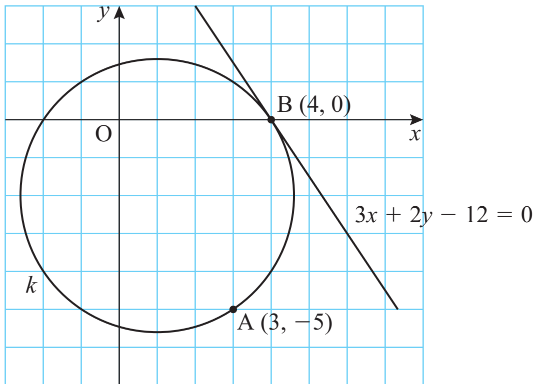
13. Gabhann ciorcal trí na pointí (3, 5) agus (−1, 3).
Tá lárphointe an chiorcail ar an líne $x + 2y - 6 = 0$.
Bain leas as an gcothromóid ghinearálta $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ chun an ciorcal a léiriú.
Ansin tabhair trí chothromóid in g, f agus c chun an t-eolas atá tugtha a léiriú.
Scríobh síos cothromóid an chiorcail bunaithe air sin.

14. Is é $(-g, -f)$ lárphointe an chiorcail $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
Má tá lárphointe an chiorcail ar an x-ais, faigh luach f.
Anois, faigh cothromóid an chiorcail a bhfuil a lárphointe ar an x-ais agus a ghabhann trí na pointí (4, 5) agus (−2, 3).

15. Teagmhaíonn an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 6y + k = 0$ leis an x-ais ag an bpointe T.
(i) Scríobh síos ga an chiorcail.
(ii) Bunaithe air sin faigh luach k agus comhordanáidí T.

16. Tá lárphointe an chiorcail k sa chéad cheathrú. Teagmhaíonn sé leis an x-ais agus leis an y-ais.
(i) Más é $(-g, -f)$, lárphointe an chiorcail, cad is féidir a rá faoi luachanna g agus f?
(ii) Más é $3\sqrt{2}$ an fad ó lárphointe an chiorcail go dtí an bunphointe, faigh cothromóid an chiorcail k.

17. Is tadhlaí leis an gciorcal k é an líne $3x + 2y - 12 = 0$. Is é B(4, 0) an pointe tadhaill. Gabhann an ciorcal tríd an bpointe A(3, -5) freisin.

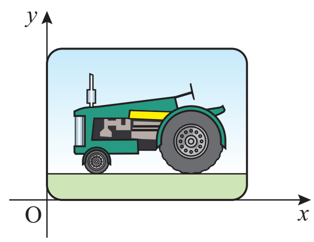


(i) Mínigh cén fáth a ngabhann an t-ingear leis an líne $3x + 2y - 12 = 0$ ag an bpointe B trí lárphointe an chiorcail.
(ii) Faigh cothromóid an ingir sin.
(iii) Faigh cothromóid dhéroinnteoir ingearach [AB].
(iv) Bunaithe air sin faigh lárphointe agus ga an chiorcail.
(v) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

18. Gabhann ciorcal trí na pointí (7, 2) agus (7, 10). Is tadhlaí leis an gciorcal é an líne $x = -1$. Faigh cothromóid an chiorcail.

19. Tá an pointe $(-1, 3)$ ar chiorcal dar ga $\sqrt{20}$.
Tá lárphointe an chiorcail ar an líne $x + y = 0$.
Faigh cothromóid an dá chiorcal fhéideartha.

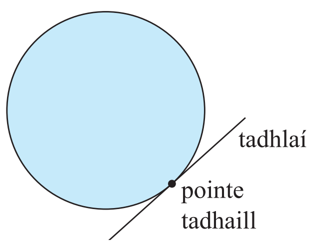
20. Tá pictiúr de tharracóir i gcluiche ríomhaire.
Is é $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$ cothromóid fhonsa an rotha tosaigh.



(i) Líne cothrom leis an x-ais í an talamh.
Scríobh síos cothromóid na líne sin.
(ii) Tá ga fhonsa an rotha cúil trí oiread níos mó ná ga fhonsa an rotha tosaigh. Má tá pointí tadhaill na rothaí leis an talamh 10 n-aonad ó chéile, faigh cothromóid fhonsa an rotha cúil.
(iii) Gluaiseann an tarracóir 2 aonad ar chlé. Faigh cothromóid nua fhonsa an rotha cúil.

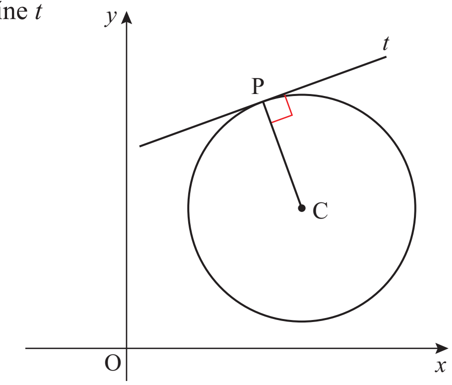
Mír 4.4 Tadhlaithe le ciorcal

Más tadhlaí le ciorcal í líne áirithe, ní thrasnóidh an líne sin an ciorcal ach ag aon phointe amháin.



1. Cothromóid tadhlaí le ciorcal ag an bpointe P ar an gciorcal a fháil

Sa léaráid ar dheis, is tadhlaí leis an gciorcal ag an bpointe P é an líne *t* agus is é C lárphointe an chiorcail.
Tá CP ingearach le *t*.

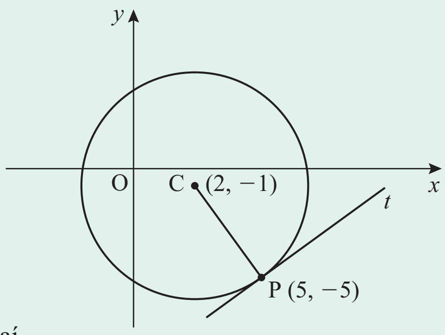


Chun cothromóid *t* a fháil:

(i) Faigh fána CP.
(ii) Scríobh síos fána *t*.
(iii) Faigh cothromóid *t* le cabhair na foirmle
$y - y_1 = m(x - x_1)$.

Sampla 1

Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ ag an bpointe $(5, -5)$ ar an gciorcal.



$C(2, -1)$ lárphointe an chiorcail.

$$\text{Fána CP} = \frac{-1+5}{2-5} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \text{fána } t = \frac{3}{4}$$

Cothromóid *t*: $\quad y + 5 = \frac{3}{4}(x - 5)$

$$\Rightarrow \quad 4y + 20 = 3x - 15$$

$\Rightarrow \quad 3x - 4y - 35 = 0$ cothromóid an tadhlaí

2. Tadhlaithe le ciorcal atá comhthreomhar nó ingearach le líne ar leith

Línte comhthreomhara agus ingearacha.

1. Is é $ax + by + k = 0$ cothromóid aon líne atá comhthreomhar le $ax + by + c = 0$

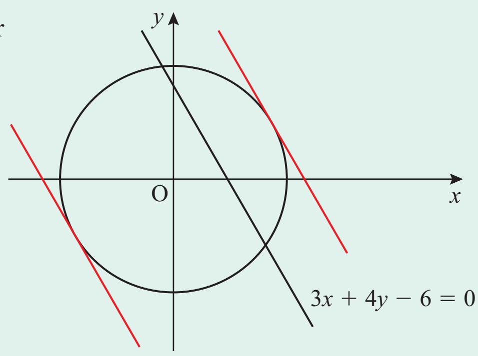
2. Is é $bx - ay + k = 0$ cothromóid aon líne atá ingearach le $ax + by + c = 0$

Sampla 2

Faigh cothromóidí an dá líne atá comhthreomhar leis an líne $3x + 4y - 6 = 0$ agus ar tadhlaithe iad leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 25$.

Tugtar sceitse den líne agus den chiorcal ar dheis.

Tá dath dearg ar an dá thadhlaí atá comhthreomhar le $3x + 4y - 6 = 0$.



T&T4.indb 126 10/07/2018 17:46:25

Baineann an chothromóid $3x + 4y + k = 0$ le haon líne atá comhthreomhar le $3x + 4y - 6 = 0$.

Tá ga an chiorcail $\sqrt{25} = 5$.

Is é 5 an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail (0, 0) go dtí $3x + 4y + k = 0$.

$$\Rightarrow \quad \frac{|3(0) + 4(0) + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|k|}{5} = 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{5} = 5 \quad \text{nó} \quad \frac{k}{5} = -5$$

$$\Rightarrow \quad k = 25 \quad \text{nó} \quad k = -25$$

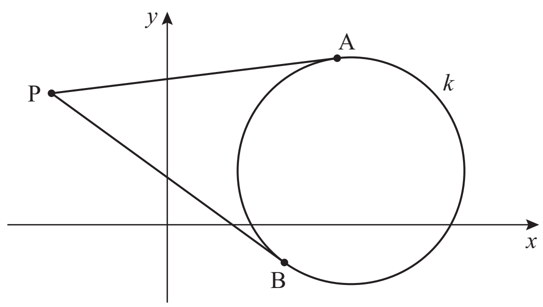
Má tá $|x| = 5$
$\Rightarrow \quad x = 5 \quad$ nó $\quad x = -5$

Is iad cothromóidí an dá thadhlaí:

$3x + 4y + 25 = 0$ nó $3x + 4y - 25 = 0$.

3. Tadhlaithe le ciorcal ón bpointe P taobh amuigh den chiorcal

Léirítear thíos gur féidir dhá thadhlaí a tharraingt go dtí ciorcal ó phointe atá taobh amuigh den chiorcal, i.e. gur tadhlaithe leis an gciorcal k iad PA agus PB.



Má iarrtar orainn, mar shampla, cothromóidí dhá thadhlaí le ciorcal áirithe a fháil ón bpointe (2, 3), ní mór ar dtús cothromóid líne ar bith trí (2, 3) a fháil, i dtéarmaí na fána m.

Is é an chothromóid sin: $y - 3 = m(x - 2)$

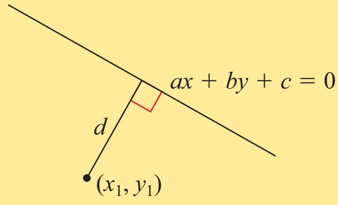
i.e. $mx - y + 3 - 2m = 0$.

Ansin, faighimid an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí an líne sin. Is ionann an fad sin agus ga an chiorcail. Is féidir linn é sin a úsáid chun an dá luach ar m a fháil.

Cuimhnigh

Is ionann an fad ingearach ón bpointe (x_1, y_1) go dtí an líne $ax + by + c = 0$ agus

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



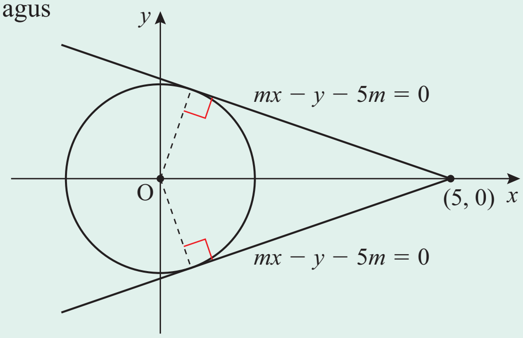
T&T4.indb 127 10/07/2018 17:46:25

Sampla 3

Faigh cothromóidí na dtadhlaithe leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 5$ ón bpointe (5, 0).

Is ionann cothromóid líne ar bith trí (5, 0) agus

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\Rightarrow \quad y - 0 = m(x - 5)$$
$$\Rightarrow \quad y = m(x - 5)$$
$$\Rightarrow \quad mx - y - 5m = 0$$



Lárphointe an chiorcail = (0, 0)

Ga an chiorcail = $\sqrt{5}$

Más tadhlaí leis an gciorcal é an líne $mx - y - 5m = 0$ is ionann fad an gha agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail, i.e. (0, 0), go dtí an líne.

$$\Rightarrow \quad \frac{|0.m + 0(-1) - 5m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$
$$= \frac{|-5m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{25m^2}{m^2 + 1} = 5$$
$$\Rightarrow \quad 25m^2 = 5(m^2 + 1)$$
$$\Rightarrow \quad 20m^2 = 5$$
$$\Rightarrow \quad m^2 = \tfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad m = \pm\tfrac{1}{2}$$

Is iad seo cothromóidí na dtadhlaithe:

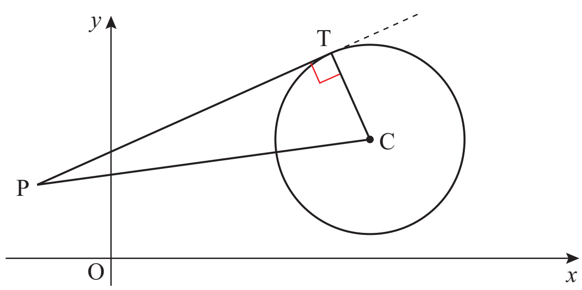
$m = \frac{1}{2}$: $\quad y - 0 = \frac{1}{2}(x - 5)$
$$\Rightarrow \quad 2y = x - 5$$
$$\Rightarrow \quad x - 2y - 5 = 0$$

$m = -\frac{1}{2}$: $\quad y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 5)$
$$2y = -x + 5$$
$$\Rightarrow \quad x + 2y - 5 = 0$$

Is iad cothromóidí an dá thadhlaí
$x - 2y - 5 = 0$ agus $x + 2y - 5 = 0$.

4. Fad tadhlaí le ciorcal ó phointe ar leith

Nuair a bhíonn fadhbanna a bhaineann le tadhlaithe idir lámha againn, ní mór cuimhneamh go mbíonn an líne ó lárphointe an chiorcail go dtí an pointe tadhaill ingearach leis an tadhlaí.



Is féidir leas a bhaint as an eolas sin chun fad tadhlaí le ciorcal ó phointe ar leith a fháil.
Tá léiriú air sin sa sampla seo a leanas.

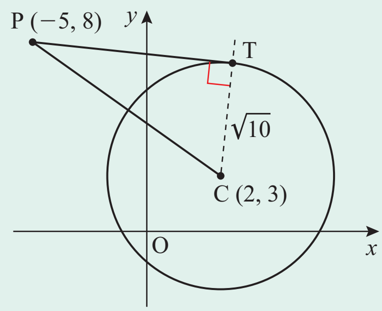
Chun fad an tadhlaí [PT] a fháil,

$$|CP|^2 = |PT|^2 + |CT|^2$$
$$\Rightarrow \quad |PT|^2 = |CP|^2 - |CT|^2$$

T&T4.indb 128 10/07/2018 17:46:26

Sampla 4

Faigh fad an tadhlaí ón bpointe $(-5, 8)$ go dtí an ciorcal
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.



$(2, 3)$ lárphointe an chiorcail.

$$\text{An ga} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$
$$= \sqrt{4 + 9 - 3} = \sqrt{10}$$

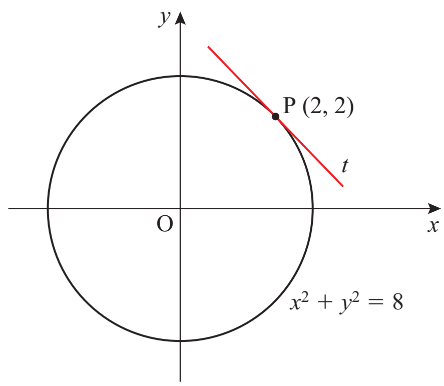
$$\Rightarrow \quad |CT| = \sqrt{10}$$
$$|CP| = \sqrt{(2 + 5)^2 + (3 - 8)^2}$$
$$= \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$$

Tá $\triangle CTP$ dronuilleach $\quad \Rightarrow \quad |PT|^2 = |CP|^2 - |CT|^2$
$$= 74 - 10 = 64$$
$$\Rightarrow \quad |PT| = \sqrt{64} = 8$$

$\therefore$ is é 8 fad an tadhlaí

Cleachtadh 4.4

1. Faigh cothromóid an tadhlaí, t, leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 8$ ag an bpointe $P(2, 2)$.



2. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 10$ ag an bpointe $(-3, 1)$.

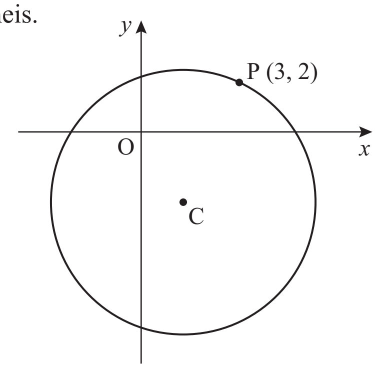
3. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 17$ ag an bpointe $(4, -1)$.

4. Is é $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$ cothromóid an chiorcail ar dheis.

(i) Cruthaigh go bhfuil an pointe $P(3, 2)$ ar an gciorcal.

(ii) Scríobh síos comhordanáidí C, lárphointe an chiorcail.

(iii) Bunaithe air sin faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal ag an bpointe P.



5. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 17$ ag an bpointe $(0, 2)$.

6. Faigh lárphointe agus ga an chiorcail $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 8 = 0$.
Bunaithe air sin faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal ag an bpointe $(3, 1)$.

7. Faigh an fad ingearach ó $(0, 0)$ go dtí an líne $3x - 4y - 25 = 0$.
Bunaithe air sin léirigh gur tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 25$ é an líne $3x - 4y - 25 = 0$.

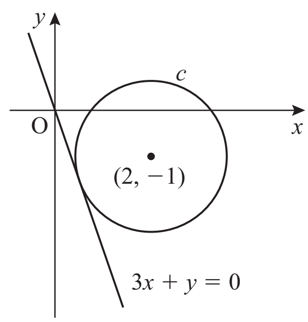
8. Faigh lárphointe agus ga an chiorcail $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$.
Bunaithe air sin léirigh gur tadhlaí leis an gciorcal é $x + 2y - 12 = 0$.
Mínigh do fhreagra.

9. Scríobh síos lárphointe agus ga an chiorcail $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.
Más tadhlaí leis an gciorcal seo an líne $3x + 4y + c = 0$, faigh an dá luach ar c.

10. Cad iad luachanna k más tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 5 = 0$ é an líne $2x - ky - 3 = 0$?

11. Léirigh go bhfuil an tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 13$ ag an bpointe $(-2, 3)$ ina thadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 26 = 0$ freisin.

12. Faigh cothromóid an chiorcail, c, dar lárphointe $(2, -1)$ agus a theagmhaíonn leis an líne $3x + y = 0$.



13. Scríobh síos cothromóid na líne ar a bhfuil an bunphointe agus a mbaineann fána m léi.
Bunaithe air sin scríobh síos cothromóidí na dtadhlaithe ón mbunphointe go dtí an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

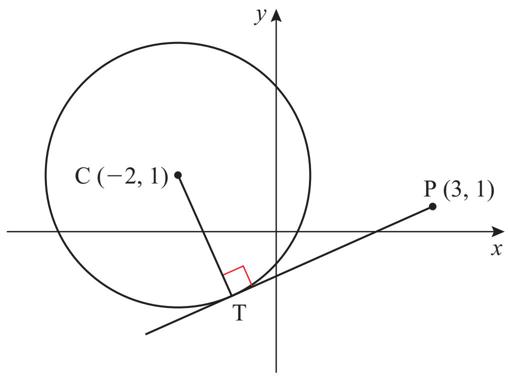
14. Faigh cothromóid na líne a théann tríd an bpointe $(3, 5)$ agus a mbaineann fána m léi.
Bunaithe air sin scríobh síos cothromóidí an dá thadhlaí ón bpointe $(3, 5)$ go dtí an ciorcal $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

15. Scríobh síos cothromóid aon líne atá comhthreomhar le $3x + 4y - 6 = 0$.
Bunaithe air sin scríobh síos cothromóidí na dtadhlaithe leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ atá comhthreomhar leis an líne $3x + 4y - 6 = 0$.

16. $(3, 5)$ is ea lárphointe ciorcail. Teagmhaíonn an ciorcal leis an líne $y = 2x + 4$.
(i) Faigh ga an chiorcail.
(ii) Faigh cothromóid an chiorcail.
(iii) Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal ag an bpointe $(1, 4)$.

17. Is é 7 ga an chiorcail $x^2 + y^2 - 10kx + 6y + 60 = 0$, áit a bhfuil $k > 0$.
(i) Faigh lárphointe an chiorcail i dtéarmaí k.
(ii) Faigh luach k.
(iii) Is tadhlaí leis an gciorcal é an líne $3x + 4y + d = 0$, $d \in Z$.
Léirigh go bhfuil 17 ar cheann de luachanna d.
Faigh an luach eile ar d.

18. Léirítear thíos an ciorcal $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$.



(i) Scríobh síos ga an chiorcail.
(ii) Más tadhlaí leis an gciorcal é PT, mínigh cén fáth a bhfuil PT ingearach leis an nga [CT].
(iii) Bunaithe air sin faigh fad an tadhlaí leis an gciorcal [PT].

19. Faigh lárphointe agus ga an chiorcail $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 34 = 0$.
Bunaithe air sin faigh fad an tadhlaí ón bpointe (2, 5) go dtí an ciorcal.

20. Faigh fad an tadhlaí ón mbunphointe go dtí an ciorcal $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$.

21. Faigh fad an tadhlaí ón bpointe (7, 8) go dtí an ciorcal $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

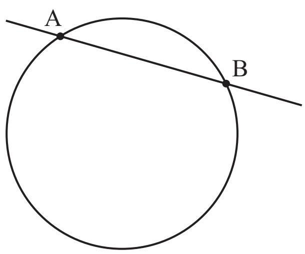
22. Más é 2 aonad fad an tadhlaí ón bpointe (1, 1) go dtí an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$, faigh luach c.

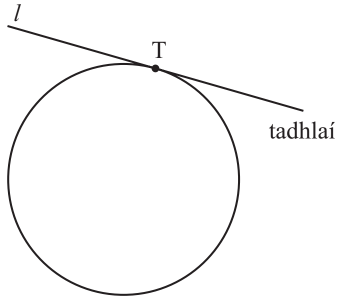
Mír 4.5 Línte agus ciorcail: An comhchorda

1. Na pointí ag a dtrasnaíonn líne agus ciorcal a chéile

Úsáidimid cothromóidí comhuaineacha chun an pointe/na pointí ag a dtrasnaíonn líne agus ciorcal a chéile a fháil. Má bhíonn dhá réiteach ann, trasnaíonn an líne an ciorcal ag dhá phointe.

Mura mbíonn ach pointe trasnaithe amháin ann, is tadhlaí leis an gciorcal í an líne, mar a léirítear thíos.





Sampla 1

Faigh na pointí ag a dtrasnaíonn an líne $x + 2y - 1 = 0$ agus an ciorcal $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$ a chéile.

Tosaigh le cothromóid na líne; scríobh x i dtéarmaí y nó y i dtéarmaí x.
(Is fearr codáin a sheachaint, más féidir.)

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2y + 1$$

Cuir $(-2y + 1)$ in áit x i gcothromóid an chiorcail.

$$(-2y + 1)^2 + y^2 + 2(-2y + 1) + 8y - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 4y + 2 + 8y - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 5y^2 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (y - 1)(y + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad y = 1 \quad \text{nó} \quad y = -1$$

I gcás gach ceann de luachanna y, faighimid an x-luach a fhreagraíonn dó.

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1; \qquad y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Is iad $(-1, 1)$ agus $(3, -1)$ na pointí trasnaithe.

Sampla 2

Faigh an pointe/na pointí ag a dtrasnaíonn an líne $2x - y + 8 = 0$ agus an ciorcal $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$ a chéile. Bunaithe air sin léirigh gur tadhlaí leis an gciorcal í an líne.

Líne: $2x - y + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 8$

Ciorcal: $x^2 + (2x + 8)^2 + 4x + 2(2x + 8) = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 4x^2 + 32x + 64 + 4x + 4x + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 5x^2 + 40x + 80 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 8x + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x + 4)(x + 4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = -4 \ \ldots \ \text{níl ann ach luach amháin}$$

Is é luach y a fhreagraíonn do luach x: $2(-4) - y + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

Is é $(-4, 0)$ an pointe trasnaithe.

Ós rud é nach bhfuil ach pointe trasnaithe amháin ann, is tadhlaí leis an gciorcal í an líne.

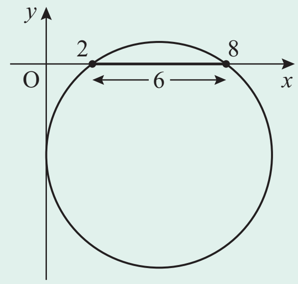
2. Áit a dtrasnaíonn ciorcal na haiseanna

Trasnaíonn ciorcal an x-ais ag na pointí a mbíonn $y = 0$.

Trasnaíonn ciorcal an y-ais ag na pointí a mbíonn $x = 0$.

Sampla 3

Faigh fad na hidirlíne a dhéanann an ciorcal $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 16 = 0$ ar an x-ais.



Trasnaíonn ciorcal an x-ais ag na pointí a mbíonn $y = 0$.

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 8)(x - 2) = 0$$
$$\Rightarrow x = 8 \quad \text{nó} \quad x = 2$$

Trasnaíonn an ciorcal an x-ais ag na pointí (2, 0) agus (8, 0).

$\therefore$ tá an idirlíne ar an x-ais $= 6$.

3. Comhchorda nó comhthadhlaí dhá chiorcal

Cuir i gcás na ciorcail s_1: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

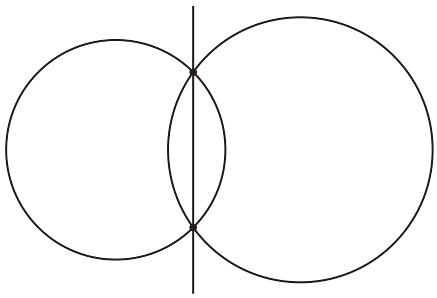
agus s_2: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

$s_1 - s_2$: $2x - 6y - 1 = 0$

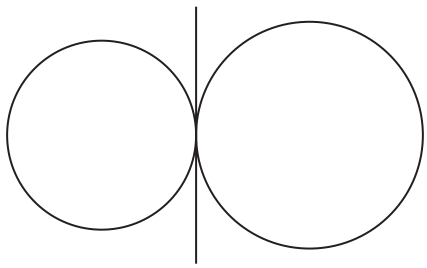
Sin é cothromóid na líne a ghabhann trí phointí trasnaithe an dá chiorcal.

(i) Má thrasnaíonn an dá chiorcal a chéile, is ionann an líne agus comhchorda an dá chiorcal.

(ii) Má theagmhaíonn na ciorcail le chéile go hinmheánach nó go seachtrach, is comhthadhlaí leis an dá chiorcal í an líne.



Comhchorda



Comhthadhlaí

Tá pointí trasnaithe dhá chiorcal le fáil mar a leanas:

(i) faigh cothromóid an chomhchorda

(ii) faigh na pointí ag a dtrasnaíonn an corda agus ceann ar bith den dá chiorcal a chéile.

Sampla 4

Faigh cothromóid chomhchorda an dá chiorcal $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$ agus $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$.

Cothromóid an chomhchorda:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 - x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$$
$$\Rightarrow \quad -8x + 6y + 10 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4x - 3y - 5 = 0 \text{ an chothromóid a theastaíonn}$$

Comhchorda dhá chiorcal, $s_1 = 0$ agus $s_2 = 0$:

$s_1 - s_2 = 0$.

Nóta: Chun pointí trasnaithe an dá chiorcal i Sampla 4 a fháil, réitímid na cothromóidí $4x - 3y - 5 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$.

Cleachtadh 4.5

1. Faigh na pointí ag a dtrasnaíonn an líne $3x - y + 5 = 0$ agus an ciorcal $x^2 + y^2 = 5$ a chéile.

2. Léirigh gur tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 10$ é an líne $x - 3y - 10 = 0$ agus faigh comhordanáidí an phointe tadhaill.

3. Faigh an pointe ag a dtrasnaíonn an líne $2x - y - 5 = 0$ agus an ciorcal $x^2 + y^2 = 5$ a chéile.

4. Faigh na pointí ag a dtrasnaíonn an líne agus an ciorcal a chéile i ngach cás díobh seo a leanas:
   (i) $x + y = 6$ agus $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$
   (ii) $2x + y - 2 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 11 = 0$
   (iii) $3x - y - 5 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.

5. Léirigh gur tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 - x - 31 = 0$ é an líne $x - 2y + 12 = 0$ trí chomhordanáidí an phointe tadhaill a fháil.

6. Trasnaíonn an líne $x - 2y - 1 = 0$ an ciorcal $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ ag na pointí L agus M.
   (i) Faigh comhordanáidí L agus M.
   (ii) Faigh lárphointe [LM].
   (iii) Faigh cothromóid an chiorcail dar trastomhas [LM].

7. Faigh comhordanáidí na bpointí ag a dtrasnaíonn an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ an x-ais. Bunaithe air sin scríobh síos fad na hidirlíne a dhéanann an ciorcal ar an x-ais.

8. Faigh na comhordanáidí ag a dtrasnaíonn an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$ agus an y-ais a chéile.
   Bunaithe air sin scríobh síos fad an chorda a dhéanann an ciorcal ar an y-ais.

9. Teagmhaíonn an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x + 11y - 12 = 0$ leis an x-ais dheimhneach agus leis an y-ais dheimhneach ag A(a, 0) agus B(0, b) faoi seach.
   Faigh luachanna a agus b.

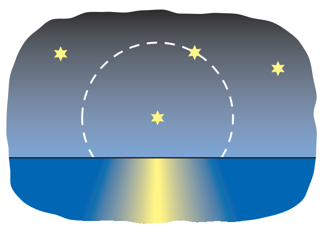
10. Is é k an ciorcal $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$.
    Faigh fad na hidirlíne a dhéanann an ciorcal ar an x-ais.

11. Faigh cothromóid chomhchorda na gciorcal $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$ agus $x^2 + y^2 - x + 4y - 7 = 0$.
    Bunaithe air sin faigh comhordanáidí phointí trasnaithe an dá chiorcal.

12. Faigh cothromóid chomhthadhlaí na gciorcal $x^2 + y^2 + 14x - 10y - 26 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 28 = 0$.
    Úsáid an tadhlaí sin chun pointe trasnaithe an dá chiorcal a fháil.

13. Faigh pointí trasnaithe na gciorcal $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ agus $x^2 + y^2 + 14x - 12y + 65 = 0$.

14. Imrothlaíonn na réaltaí thart ar an Réalta Thuaidh uair amháin gach oíche. Rianaíonn réalta áirithe amháin an ciorcal
    $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 4 = 0$,
    i dtacar roghnaithe d'aiseanna comhordanáideacha.
    Tá an chothromóid $y = 1$ ag fíor na spéir.
    (i) Scríobh síos cothromóidí na Réalta Thuaidh.
    (ii) Maidir leis an réalta eile thuas, scríobh síos na comhordanáidí ag a n-éiríonn sí agus ag a dtéann sí faoi.

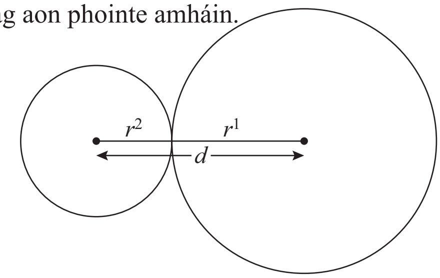


Mír 4.6 Ciorcail a theagmhaíonn – Cordaí agus ciorcail

1. Ciorcail a theagmhaíonn le chéile go seachtrach nó go hinmheánach

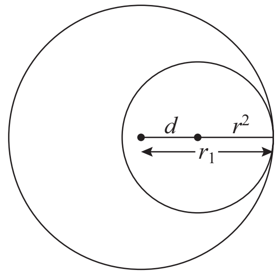
Teagmhaíonn ciorcail le chéile mura mbuaileann siad le chéile ach ag aon phointe amháin.

Má theagmhaíonn siad le chéile go seachtrach, is ionann an fad idir a gcuid lárphointí agus suim a gcuid gathanna. Is ionann *d* sa léaráid ar dheis agus an fad atá an dá lárphointe ó chéile.
An dá chiorcal ag teagmháil le chéile go seachtrach:



$$d = r_1 + r_2$$

Má theagmhaíonn siad le chéile go hinmheánach, is ionann difríocht an dá gha iontu agus an fad idir an dá lárphointe.
An dá chiorcal ag teagmháil le chéile go hinmheánach:



$$d = r_1 - r_2$$

Sampla 1

Léirigh gur go seachtrach a theagmhaíonn an dá chiorcal seo a leanas le chéile:
$s_1: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$ agus s_2: $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$.

s_1: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0 \Rightarrow$ an lárphointe $= (3, 2)$ agus
an ga $= \sqrt{3^2 + 2^2 - 11} = \sqrt{2}$

s_2: $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0 \Rightarrow$ an lárphointe $= (-2, -3)$ agus
an ga $= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 19} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

An fad idir na lárphointí $= \sqrt{(3 + 2)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{50}$
$= 5\sqrt{2}$

Suim an dá gha $= \sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Ó tá an fad idir na lárphointí = suim na ngathanna $= 5\sqrt{2}$,
is go seachtrach a theagmhaíonn an dá chiorcal seo le chéile.

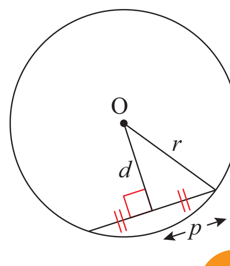
2. Cordaí agus ciorcail

Is eol dúinn cheana féin an t-airí céimseatúil an-úsáideach i dtaobh an chiorcail:

An t-ingear ó lárphointe ciorcail go dtí corda, déroinneann sé an corda sin.

Sa léaráid ar dheis, is ionann *d* agus fad an ingir ón lárphointe,
O, go dtí an corda.

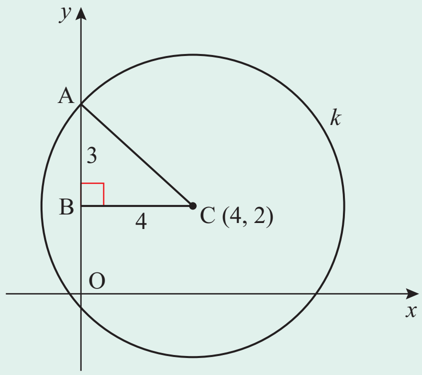
Is féidir Teoirim Phíotagarás a úsáid chun *d*, *r* nó *p* a fháil, de réir mar a theastaíonn.



Sampla 2

Is é C(4, 2) lárphointe an chiorcail k. Déanann an ciorcal corda atá 6 aonad ar fad ar an y-ais. Faigh cothromóid k.

Más é (4, 2) an lárphointe, tá ingear [BC] 4 aonad ar fad.



$|AB| = \frac{1}{2}$ fhad an chorda ar an y-ais

$\Rightarrow \quad |AB| = 3$

$|AC|^2 = 3^2 + 4^2$

$\Rightarrow \quad |AC|^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad |AC| = 5 \quad \Rightarrow \quad$ ga $= 5$

$\therefore$ Is é (4, 2) lárphointe an chiorcail agus 5 an ga.

Cothromóid an chiorcail: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Cleachtadh 4.6

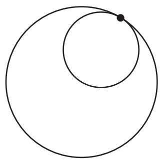
1. Faigh lárphointe agus ga gach ceann de na ciorcail seo a leanas:
s_1: $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ and s_2: $x^2 + y^2 - 14x - 16y + 77 = 0$.
Léirigh ansin go dteagmhaíonn na ciorcail le chéile go seachtrach.

2. Léirigh go dteagmhaíonn na ciorcail seo a leanas le chéile go hinmheánach:
$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 12x + 6y - 76 = 0$.

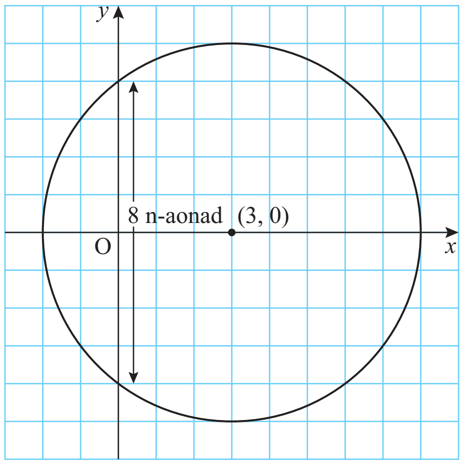
3. Faigh lárphointe agus ga gach ceann de na ciorcail seo a leanas,
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 16x - 18y + 120 = 0$.
Léirigh go dteagmhaíonn na ciorcail le chéile go seachtrach.

4. Deimhnigh cé acu go hinmheánach nó go seachtrach a theagmhaíonn na ciorcail seo a leanas le chéile: $x^2 + y^2 - 16y + 32 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 18x + 2y + 32 = 0$.

5. Dhá chiorcal iad $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ agus $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 23 = 0$.
   (i) Cruthaigh go dteagmhaíonn na ciorcail le chéile go hinmheánach.
   (ii) Faigh cothromóid an chomhthadhlaí.
   (iii) Bunaithe air sin faigh na comhordanáidí atá ag pointe tadhaill an dá chiorcal.



6. Tá ciorcal dar lárphointe (3, 0) le feiceáil sa léaráid thíos. Déanann an ciorcal idirlíne atá 8 n-aonad ar fad ar an y-ais.

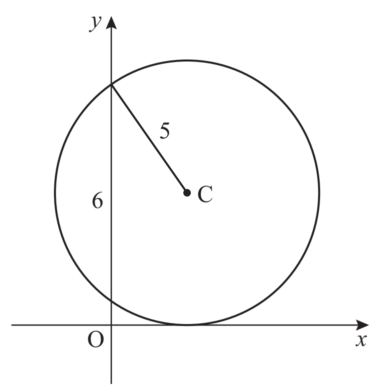


(i) Úsáid Teoirim Phíotagarás chun an ga a fháil.
(ii) Bunaithe air sin scríobh síos cothromóid an chiorcail san fhoirm

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

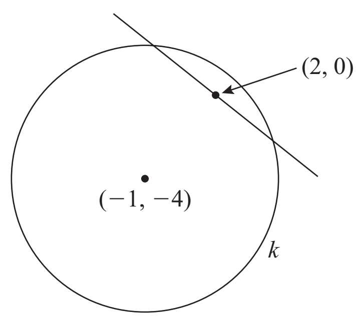
7. Is é (2, 3) lárphointe ciorcail agus is é 4 aonad an ga.
(i) Tarraing sceitse den chiorcal.
(ii) Léirigh go bhfuil fad $4\sqrt{3}$ idir na pointí ag a dteagmhaíonn an ciorcal leis an y-ais.
(iii) Faigh fad na hidirlíne a dhéanann an ciorcal ar an x-ais.

8. Is sa chéad cheathrú atá lárphointe ciorcail dar ga 5 aonad. Teagmhaíonn an ciorcal leis an x-ais agus déanann sé idirlíne atá 6 aonad ar fad ar an y-ais, mar a fheictear sa léaráid.
(i) Faigh comhordanáidí an lárphointe, C.
(ii) Faigh cothromóid an chiorcail.



9. Tá lárphointe ciorcail áirithe sa chéad cheathrú. Teagmhaíonn sé leis an y-ais ag an bpointe (0, 2). Déanann an ciorcal corda atá 3 aonad ar fad ar an x-ais. Faigh cothromóid an chiorcail.

10. Is é $(-1, -4)$ lárphointe an chiorcail k.
Is é (2, 0) lárphointe corda atá $2\sqrt{5}$ ar fad.
(i) Faigh ga k.
(ii) Scríobh síos cothromóid k.



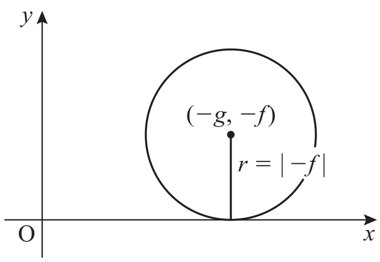
11. Gabhann ciorcal trí na pointí (0, 0) agus (0, 8).
Tá lárphointe an chiorcail sa chéad cheathrú. 5 aonad ar fad atá an ga.
(i) Faigh comhordanáidí lárphointe an chiorcail.
(ii) Faigh cothromóid an chiorcail.

12. Is é $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ cothromóid chiorcail.
Scríobh síos comhordanáidí lárphointe an chiorcail agus fad a gha.
Is cothromóid chiorcail eile é $x^2 + y^2 + 12x - 20y + k = 0$, $k \in R$.
Má theagmhaíonn an dá chiorcal seo le chéile go seachtrach, faigh luach k.

Mír 4.7 Ciorcail a theagmhaíonn leis an x-ais nó leis an y-ais

Má theagmhaíonn ciorcal leis an x-ais nó leis an y-ais, is ionann ga an chiorcail agus ceann de chomhordanáidí an lárphointe sa chiorcal sin.

1. Ciorcal a theagmhaíonn leis an x-ais



Ga $= |-f|$

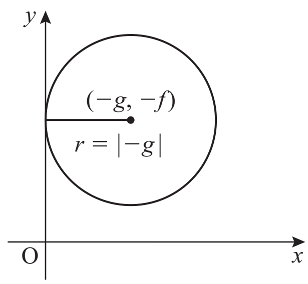
$\Rightarrow \sqrt{g^2 + f^2 - c} = |-f|$

$\Rightarrow g^2 + f^2 - c = f^2$

$\Rightarrow g^2 - c = 0$

$\Rightarrow g^2 = c$

2. Ciorcal a theagmhaíonn leis an y-ais



Ga $= |-g|$

$\Rightarrow \sqrt{g^2 + f^2 - c} = |-g|$

$\Rightarrow g^2 + f^2 - c = g^2$

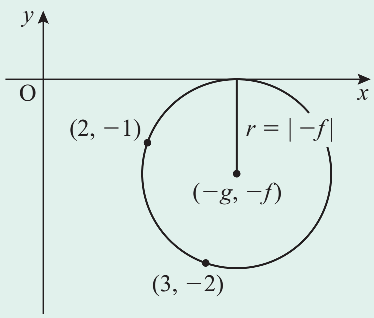
$\Rightarrow f^2 - c = 0$

$\Rightarrow f^2 = c$

Sampla 1

Faigh cothromóidí an dá chiorcal a ghabhann trí na pointí $(3, -2)$ agus $(2, -1)$ agus a theagmhaíonn leis an x-ais.

Bíodh $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
ina chothromóid ar an gciorcal



$(2, -1) \in$ den chiorcal

$\Rightarrow \quad 4 + 1 + 2g(2) + 2f(-1) + c = 0$

$\Rightarrow \quad 4g - 2f + c = -5 \ldots ①$

$(3, -2) \in$ den chiorcal

$\Rightarrow \quad 9 + 4 + 2g(3) + 2f(-2) + c = 0$

$\Rightarrow \quad 6g - 4f + c = -13 \ldots ②$

Má theagmhaíonn an ciorcal leis an x-ais, tá an ga $= |-f|$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{g^2 + f^2 - c} = |-f|$$
$$\Rightarrow \quad g^2 + f^2 - c = f^2$$
$$\Rightarrow \quad g^2 = c \ldots ③$$

Is féidir linn cothromóidí ① agus ② a úsáid chun fáil réidh le f.

①: $4g - 2f + c = -5$ ① × 2: $8g - 4f + 2c = -10$

②: $6g - 4f + c = -13$ ②: $\underline{6g - 4f + c = -13}$

$2g \qquad + c = 3$

$\Rightarrow \quad c = -2g + 3$

Anois, cuirimid $(-2g + 3)$ isteach in áit c i gcothromóid ③

③: $g^2 = c$

$$\Rightarrow \quad g^2 = -2g + 3$$
$$\Rightarrow \quad g^2 + 2g - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (g - 1)(g + 3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad g = 1 \quad \text{or} \quad g = -3$$

$g = 1 \quad \Rightarrow \quad c = -2(1) + 3 \quad \Rightarrow \quad c = 1$

$g = -3 \quad \Rightarrow \quad c = -2(-3) + 3 \quad \Rightarrow \quad c = 9$

Má chuirimid na luachanna sin isteach in áit g agus c i gcothromóid ①, faighimid:

$$4g - 2f + c = -5 \ldots ①$$

$g = 1$ agus $c = 1$: $\quad 4(1) - 2f + 1 = -5$

$\Rightarrow \quad -2f = -10 \quad \Rightarrow \quad f = 5$

$g = -3$ agus $c = 9 \quad \Rightarrow \quad 4(-3) - 2f + 9 = -5$

$\Rightarrow \quad -12 - 2f + 9 = -5$

$\Rightarrow \quad -2f = -2 \quad \Rightarrow \quad f = 1$

Is iad an dá luach ar g, f agus c ná

Ciorcal 1: $g = 1, f = 5$ agus $c = 1$ **Ciorcal 2:** $g = -3, f = 1$ agus $c = 9$

Ciorcal 1: $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 1 = 0$

Ciorcal 2: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$

Cleachtadh 4.7

1. $(3, -4)$ lárphointe ciorcail. Tadhlaí leis an gciorcal is ea an x-ais.
   Faigh cothromóid an chiorcail.

2. Tadhlaí leis an gciorcal k is ea an y-ais.
   Más é $(-3, 2)$ lárphointe k, faigh cothromóid an chiorcail.

3. Is iad $(5, y)$ comhordanáidí lárphointe ciorcail, $y > 0$.
Tadhlaithe leis an gciorcal sin iad an x-ais agus an y-ais.
(i) Scríobh síos luach y.
(ii) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.
(iii) Scríobh síos cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal atá comhthreomhar leis an y-ais.

4. Tadhlaithe leis an gciorcal k iad an x-ais agus an líne $y = 8$.
Tá lárphointe an chiorcail ar an líne $2x - 3y = 0$.
(i) Tarraing sceitse garbh den chiorcal.
(ii) Scríobh síos an ga.
(iii) Faigh comhordanáidí lárphointe an chiorcail.
(iv) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

5. Tadhlaithe le ciorcal áirithe iad an y-ais agus an líne $x = 8$.
Tá lárphointe an chiorcail ar an líne $2x - y - 3 = 0$.
(i) Scríobh síos ga an chiorcail.
(ii) Faigh comhordanáidí lárphointe an chiorcail.
(iii) Faigh cothromóid an chiorcail.

6. Tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ í an x-ais.
Léirigh go bhfuil $g^2 = c$.
Tadhlaí leis an gciorcal k ag an bpointe $(4, 0)$ í an x-ais.
Má ghabhann an ciorcal tríd an bpointe $(1, 3)$, faigh cothromóid an chiorcail.

7. Tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ í an y-ais.
Cruthaigh go bhfuil $f^2 = c$.
Tadhlaíonn ciorcal leis an y-ais ag an bpointe $(0, -3)$ agus gabhann sé tríd an bpointe $(4, 1)$.
Faigh cothromóid an chiorcail sin.

8. Tadhlaithe le ciorcal áirithe iad an x-ais agus an líne $y = 10$.
Má ghabhann an ciorcal tríd an bpointe $(1, 5)$, faigh cothromóidí an dá chiorcal a shásaíonn na coinníollacha sin.

Cuir triail ort féin 4

Ceisteanna A

1. Is é $(-1, 5)$ lárphointe ciorcail a ghabhann tríd an bpointe $(1, 2)$.
(i) Faigh ga an chiorcail.
(ii) Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

2. Faigh comhordanáidí lárphointe agus ga an chiorcail $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$.
Bunaithe air sin scríobh síos cothromóid an chiorcail a bhfuil an bunphointe ina lárphointe ann agus a bhfuil a gha ar comhfhad le ga an chiorcail atá luaite.

3. Faigh cothromóid an chiorcail dar lárphointe $(2, 3)$ agus a theagmhaíonn leis an x-ais.

4. Léirigh gur tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 = 25$ é an líne $3x - 4y + 25 = 0$.

5. Is iad $A(-1, -3)$ agus $B(3, 1)$ foircinn an trastomhais ar chiorcal áirithe.
Scríobh síos cothromóid an chiorcail.

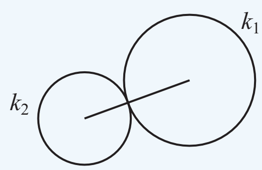
6. Teagmhaíonn an ciorcal $(x - 5)^2 + y^2 = 36$ leis an x-ais ag P agus Q.
Faigh comhordanáidí P agus Q.

7. Scríobh síos lárphointe agus ga an chiorcail

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$$

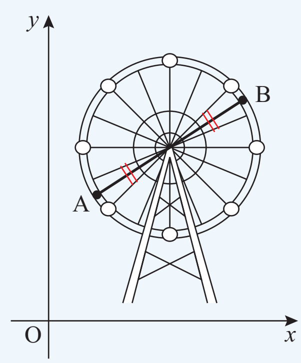
Tarraing sceitse den chiorcal sin.
Más tadhlaí leis an gciorcal é an líne $x = k$, faigh an dá luach ar k.

8. Teagmhaíonn na ciorcail k_1 agus k_2 go seachtrach le chéile.
Baineann lárphointe (8,5) agus ga 6 le ciorcal k_1.
Baineann lárphointe $(2, -3)$ le ciorcal k_2.
Faigh ga k_2.



9. Léirigh go bhfuil $(0, 0)$ taobh istigh den chiorcal $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 30$.

10. Thóg Daithí grianghraf den Roth Mór ag an Seó Aonaigh.
Bunaithe ar na haiseanna atá le feiceáil ar dheis rinne sé meastachán gurbh é $(1, 6)$ A agus gurbh é $(11, 10)$ B.
Faigh cothromóid an chuid chiorclach den Roth Mór trí A agus B.



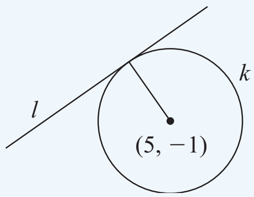
Ceisteanna B

1. Scríobh síos lárphointe agus ga an chiorcail

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0.$$

Bunaithe air sin faigh cothromóid an tadhlaí leis an gciorcal seo ag an bpointe (5, 4).

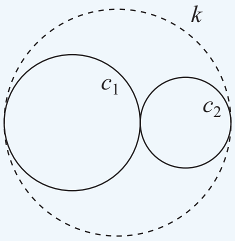
2. Is é $(5, -1)$ lárphointe an chiorcail k.
Is tadhlaí le k é an líne l: $3x - 4y + 11 = 0$.
(i) Léirigh gurb é 6 ga k.
(ii) Is tadhlaí eile le k é an líne $x + py + 1 = 0$.
Faigh dhá luach fhéideartha ar p.



3. Faigh an dá luach ar k más tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 12 = 0$ é $8x + 3y + k = 0$.

4. Tá an pointe A(5, 2) ar an gciorcal k: $x^2 + y^2 + px - 2y + 5 = 0$.
(i) Faigh luach p.
(ii) Trasnaíonn an líne $x - y - 1 = 0$ an ciorcal k.
Faigh comhordanáidí na bpointí trasnaithe.

5. Dhá chiorcal iad c_1: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$
agus c_2: $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 41 = 0$.
(i) Cruthaigh go dteagmhaíonn c_1 agus c_2 le chéile go seachtrach.
(ii) Is ciorcal eile é k.
Teagmhaíonn c_1 agus c_2 go hinmheánach le k.
Faigh cothromóid k.



6. Baineann an chothromóid $x^2 + y^2 - 10y + 20 = 0$ le ciorcal dar lárphointe C.
(i) Scríobh síos comhordanáidí C.
(ii) Faigh ga an chiorcail. Fág do fhreagra i bhfoirm surda.
Baineann cothromóid $y = 2x$ le líne.
(iii) Léirigh gur tadhlaí leis an gciorcal thuas é an líne $y = 2x$ agus faigh comhordanáidí an phointe tadhaill.

7. Faigh lárphointe agus ga an dá chiorcal $x^2 + y^2 = 4$ agus $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$. Léirigh go dteagmhaíonn siad le chéile go seachtrach.
Scríobh síos cothromóid an chomhthadhlaí leis na ciorcail sin.

8. Tá na pointí (2, 5) agus $(-2, 1)$ ar an gciorcal $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + 7 = 0$.
(i) Déan dhá chothromóid in g agus f.
(ii) Réitigh an péire cothromóidí chun luachanna g agus f a fháil.
(iii) Bunaithe air sin faigh cothromóid an chiorcail agus scríobh síos a lárphointe agus a gha.

9. Baineann an chothromóid $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ le ciorcal dar lárphointe C.
Scríobh síos (i) comhordanáidí C
(ii) ga an chiorcail.
Deimhnigh go bhfuil N(0, -2) ar an gciorcal.
Is iad (2, 6) comhordanáidí an phointe P.
Faigh fad an tadhlaí a tharraingítear ó P go dtí an ciorcal.

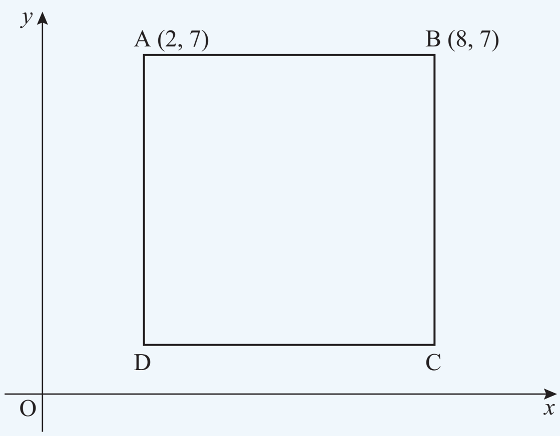
10. Tá lárphointe ciorcail ar an líne $x - 2y - 1 = 0$.
Is tadhlaithe leis an gciorcal iad an x-ais agus an líne $y = 6$.
Faigh cothromóid an chiorcail.

Ceisteanna C

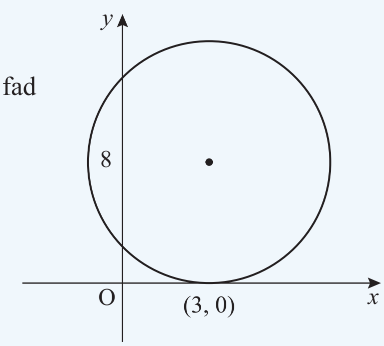
1. Faigh fad na hidirlíne a dhéanann an ciorcal $x^2 + y^2 - 8x - 7y + 12 = 0$ ar an y-ais.
Faigh fad an tadhlaí leis an gciorcal ón bpointe (9, 2).

2. Scríobh síos cothromóid aon líne atá comhthreomhar leis an líne $3x - 4y + 1 = 0$.
Bunaithe air sin faigh cothromóidí an dá thadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ atá comhthreomhar leis an líne $3x - 4y + 1 = 0$.

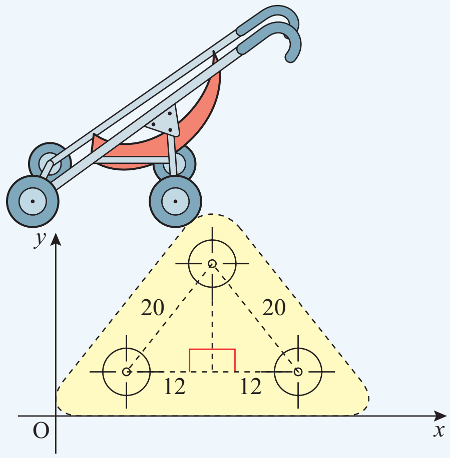
3. Reanna cearnóige iad A, B, C agus D.
Is iad (2, 7) agus (8, 7) comhordanáidí A agus B faoi seach.
(i) Scríobh síos comhordanáidí C agus D.
(ii) Scríobh síos comhordanáidí lárphointe an chiorcail a ghabhann trí A, B, C agus D.
(iii) Faigh cothromóid an chiorcail is mó is féidir a tharraingt taobh istigh den chearnóg ABCD.



4. Tá lárphointe ciorcail sa chéad cheathrú.
Is tadhlaí leis an gciorcal ag an bpointe (3, 0) í an x-ais.
Gearrann an ciorcal an y-ais ag dhá phointe atá 8 n-aonad ar fad óna chéile. Faigh cothromóid an chiorcail.



5. Úsáidtear pláta miotail chun fráma naíchóiste a neartú. 4 aonad atá i nga na bpoll sa phláta. Déanann lárphointí na bpoll triantán comhchosach a bhfuil sleasa 20, 20 agus 24 aonad air.
Más é $(x - 20)^2 + (y - 18)^2 = 16$, cothromóid imeall an phoill ar barr, faigh cothromóidí imill an dá pholl eile.



6. Gabhann ciorcal tríd an mbunphointe agus tríd an bpointe (4, 2).
Má tá an lárphointe ar an líne $x + y = 1$, faigh cothromóid an chiorcail.

7. Is tadhlaí le ciorcal ag an bpointe (3, 3) é an líne $3x - y - 6 = 0$.
Tá an pointe (4, 1) ar an gciorcal freisin.
   (i) Tarraing sceitse garbh den chiorcal.
   (ii) Faigh cothromóid an chiorcail.

An t-ingear le tadhlaí ag an bpointe tadhaill, gabhann sé trí lárphointe an chiorcail.

8. Trasnaíonn ciorcal an x-ais ag na pointí (1, 0) agus (7, 0).
Má theagmhaíonn an ciorcal leis an y-ais dheimhneach, faigh cothromóid an chiorcail.

9. Is tadhlaí leis an gciorcal $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ í an y-ais.
   (i) Cruthaigh go bhfuil $f^2 = c$
   (ii) Faigh cothromóidí na gciorcal a ghabhann trí na pointí $(-3, 6)$ agus $(-6, 3)$ agus ar tadhlaí leo an y-ais.

10. Is é $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + b^2 = 0$ cothromóid chiorcail.
   (i) Faigh lárphointe agus ga an chiorcail.
   (ii) Cruthaigh go dteagmhaíonn an ciorcal leis an y-ais.
   (iii) Faigh cothromóidí an dá chiorcal a ghabhann trí na pointí (1, 2) agus (2, 3) agus a thadhlaíonn leis an y-ais.
   (iv) Faigh an fad idir lárphointí na gciorcal sin.

Achoimre ar na Príomhphointí

Cothromóid chiorcail

Cothromóid chiorcail dar lárphointe (0, 0) agus dar ga r:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Cothromóid chiorcail dar lárphointe (h, k) agus dar ga r:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

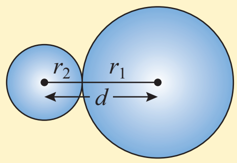
Lárphointe agus ga ciorcail a fháil ó chothromóid an chiorcail

Léiríonn an chothromóid $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ciorcal

(i) dar lárphointe $= (-g, -f)$ (ii) dar ga $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

Ciorcail a theagmhaíonn le chéile

Má theagmhaíonn dhá chiorcal go seachtrach le chéile,

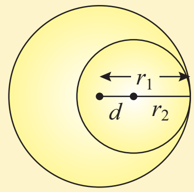


$$d = r_1 + r_2$$

nuair is é d an fad idir an dá lárphointe.

Má theagmhaíonn dhá chiorcal go hinmheánach le chéile,

$$d = r_1 - r_2.$$



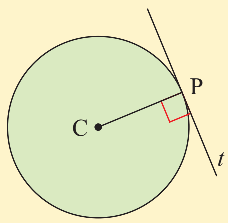
Tadhlaithe agus ciorcail

Chun cothromóid an tadhlaí, t, a fháil

(i) faigh fána CP

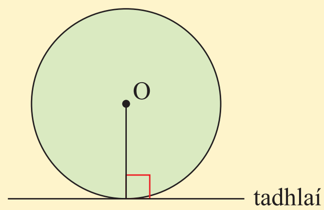
(ii) faigh fána an tadhlaí, t

(iii) úsáid an pointe P agus fána t.



90° atá san uillinn idir tadhlaí agus ga.

Is ionann ga an chiorcail agus an fad ingearach ó lárphointe an chiorcail go dtí an tadhlaí.



Comhchorda – comhthadhlaí

Maidir leis na ciorcail s_1 agus s_2 scríofa i bhfoirm $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, is é $s_1 - s_2 = 0$ **cothromóid an chomhchorda** nó **an chomhthadhlaí**.

Ciorcail a theagmhaíonn leis an *x*-ais nó leis an *y*-ais

Má theagmhaíonn an ciorcal $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(i) leis an x-ais, ansin $\boldsymbol{g^2 = c}$ agus ga $= |-\boldsymbol{f}|$

(ii) leis an y-ais, ansin $\boldsymbol{f^2 = c}$ agus ga $= |-\boldsymbol{g}|$.

caibidil

5 An Triantánacht 2

Focail thábhachtacha

ionannas **ciorcal an aonaid** **riail an tsínis** **riail an chomhshínis** **uillinn chomhshuite** **foirm surda** **uillinn dhúbailte** **foirmlí leathuillinneacha** **foirmlí táirgí** **$\sin^{-1} x$ (arc sin x)**

Mír 5.1 Ionannais triantánachta

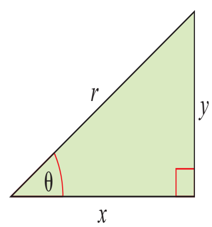
Tá tuiscint againn cheana féin ar na trí bhunchóimheas triantánachta: síneas, comhshíneas agus tangant.

Tá trí chóimheas eile atá bainteach leo agus is mar seo a shainmhínítear iad sin:

$$\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

I gcás an triantáin ar dheis

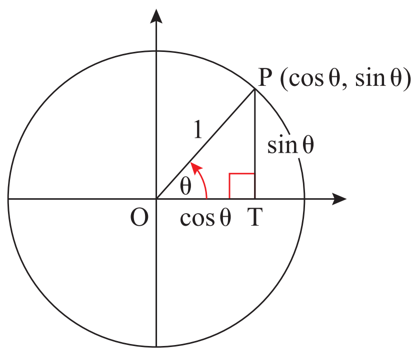
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r} = \frac{y}{r} \times \frac{r}{x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$



$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

Ionannas a thugtar ar an ngaol seo idir na cóimheasa triantánachta mar gur fíor é i gcás **gach luacha** ar θ.

Léiríodh cheana gur leis na comhordanáidí (**$\cos\theta$, $\sin\theta$**) a dhéantar pointe ar bith ar **chiorcal an aonaid** a shainiú.



Sa léaráid ar dheis $|OP| = 1$

$\Rightarrow \quad |OP|^2 = 1$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(\cos\theta - 0)^2 + (\sin\theta - 0)^2} = 1$

$\Rightarrow \quad \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$ … (an dá thaobh a chearnú) *

Roinntear gach téarma den chothromóid $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ar $\cos^2\theta$, agus is é an freagra:

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\Rightarrow \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$

Ba chóir na hionannais thuas a chur de ghlanmheabhair mar go mbaintear an-leas astu agus ionannais níos casta á gcruthú. Tá siad leagtha amach sa bhosca a leanas.

1. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$	**2.** $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	**3.** $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
4. $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	**5.** $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	**6.** $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

Tá le tuiscint as ionannas **5** go bhfuil $\boldsymbol{\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta}$ agus $\boldsymbol{\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta}$.

Is gnách ionannas a chruthú trí dhíriú ar an taobh clé agus a léiriú, le hionannais eile atá ar eolas againn, gur féidir é a shimpliú sa chaoi go mbeidh sé san fhoirm chéanna le taobh na láimhe deise.

Léirítear é sin sna samplaí a leanas.

Sampla 1

Cruthaigh na hionannais seo:

(i) $\sec A - \tan A \sin A = \cos A$ (ii) $\tan\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sin\theta$.

(i) Athraigh gach cóimheas ina shíneas agus ina chomhshíneas ar dtús.

$$\sec A - \tan A \sin A = \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}\cdot \sin A$$

$$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin^2 A}{\cos A}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A}{\cos A} = \cos A = \text{Taobh na láimhe deise (TLD)}$$

(ii) $$\tan\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sqrt{\cos^2\theta} \quad \ldots\ 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{1} = \sin\theta = \text{TLD}$$

Sampla 2

Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{\tan\theta + \sin\theta}{\sec\theta + 1} = \sin\theta$.

$$\frac{\tan\theta + \sin\theta}{\sec\theta + 1} = \frac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1}}{\dfrac{1}{\cos\theta} + 1}$$

$$= \frac{\sin\theta + \sin\theta\cos\theta}{1 + \cos\theta} \quad \ldots$$ (iolraigh gach téarma os cionn na líne agus thíos faoin líne faoi $\cos\theta$)

$$= \frac{\sin\theta(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)} = \sin\theta = \text{TLD}$$

Ionannais a chruthaítear le cabhair *Riail an tSínis* nó *Riail an Chomhshínis*

De réir *Riail an tSínis* tá $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

Is féidir é sin a scríobh mar seo chomh maith: $\sin A = \dfrac{a \sin B}{b}$

De réir *Riail an Chomhshínis* tá $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Is féidir é sin a scríobh mar seo chomh maith: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Ionannais a mbíonn na sleasa a, b, c ar thriantán i gceist iontu, is gnách iad a chruthú le cabhair *Riail an tSínis* nó *Riail an Chomhshínis*.

Sampla 3

Cruthaigh i dtaobh triantán ar bith go bhfuil $c \cos B - b \cos C = \dfrac{c^2 - b^2}{a}$

De réir Riail an Chomhshínis tá

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \text{ agus } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\begin{aligned} c \cos B - b \cos C &= \frac{c(c^2 + a^2 - b^2)}{2ac} - \frac{b(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab} \\ &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2a} \\ &= \frac{c^2 + a^2 - b^2 - a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \frac{2c^2 - 2b^2}{2a} \\ &= \frac{c^2 - b^2}{a} = \text{TLD} \end{aligned}$$

Cleachtadh 5.1

Cruthaigh na hionannais seo a leanas:

1. $\cos A \tan A = \sin A$
2. $\sin \theta \sec \theta = \tan \theta$
3. $\sin \theta \tan \theta + \cos \theta = \sec \theta$
4. $\dfrac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \tan \theta$
5. $\sec A - \sin A \tan A = \cos A$
6. $1 - \tan^2 \theta \cos^2 \theta = \cos^2 \theta$
7. $\dfrac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$
8. $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
9. $\dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\tan \theta} = \cos \theta$
10. $(1 + \tan^2 \theta) \cos^2 \theta = 1$
11. $(\cos \theta + \sin \theta)^2 + (\cos \theta - \sin \theta)^2 = 2.$
12. $(1 + \tan^2 A)(1 - \sin^2 A) = 1$
13. $(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1$
14. $\dfrac{1 - \cos^2 A}{\sin A \cos A} = \tan A$
15. $\dfrac{1}{1 - \sin A} + \dfrac{1}{1 + \sin A} = 2 \sec^2 A$
16. $(1 - \sin^2 A) \tan^2 A + \cos^2 A = 1$
17. $\operatorname{cosec}^2 \theta(\tan^2 \theta - \sin^2 \theta) = \tan^2 \theta$
18. $(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = \cos A$

T&T4.indb 148 10/07/2018 17:46:34

Cruthaigh na hionannais seo a leanas le cabhair riail an tsínis nó riail an chomhshínis:

19. $b \cos C + c \cos B = a$

20. $bc \cos A + ca \cos B = c^2$

21. $c = b \cos A + a \cos B$

22. $a \cos B - b \cos A = \dfrac{a^2 - b^2}{c}$

23. $ab \cos C - ac \cos B = b^2 - c^2$

24. $c \cos B - b \cos C = \dfrac{c^2 - b^2}{a}$

25. Cruthaigh, le cabhair riail an tsínis, go bhfuil $\dfrac{\sin A - \sin B}{\sin B} = \dfrac{a - b}{b}$.

26. Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$.

Mír 5.2 Uillinneacha comhshuite

Más dhá uillinn iad A agus B, **uillinneacha comhshuite** a thugtar ar $(A + B)$ agus $(A - B)$.

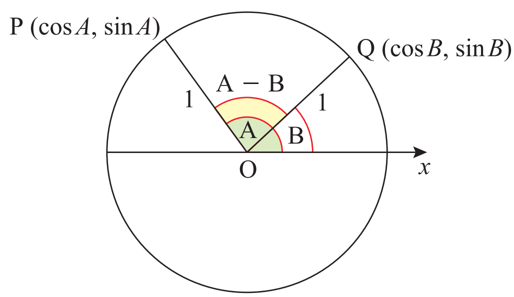
Sa roinn seo, gheobhaimid na foirmlí le haghaidh $\cos(A \pm B)$, $\sin(A \pm B)$ agus $\tan(A \pm B)$ trína scríobh i dtéarmaí $\sin A$, $\cos A$ agus $\tan A$.

Gheobhaimid an fhoirmle le haghaidh $\cos(A - B)$ ar dtús, agus ansin is féidir na foirmlí eile a chruthú le cabhair ionannais atá ar eolas cheana.

An fhoirmle le haghaidh cos(A − B)*

Déanadh an ga [OP] an uillinn A leis an x-ais dheimhneach agus déanadh an ga [OQ] an uillinn B léi.

$|\angle POQ| = A - B$



Is féidir $|PQ|$ a fháil anois ar dhá mhodh éagsúla:

1. foirmle an fhaid idir dhá phointe

2. riail an chomhshínis.

1. Má úsáidimid an fhoirmle $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$:

$$|PQ|^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2$$
$$= \cos^2 A - 2 \cos A \cos B + \cos^2 B + \sin^2 A - 2 \sin A \sin B + \sin^2 B$$

Ach $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ agus $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$.

$$\Rightarrow \quad |PQ|^2 = 1 - 2 \cos A \cos B + 1 - 2 \sin A \sin B$$
$$= 2 - 2(\cos A \cos B + \sin A \sin B) \ \dots \ ①$$

2. Má úsáidimid riail an chomhshínis ansin chun $|PQ|$ a fháil:

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP|\,|OQ| \cos(A - B)$$
$$= 1 + 1 - 2(1)(1) \cos(A - B) \ \dots \ |OP| = |OQ| = 1 = \text{ga}$$
$$= 2 - 2 \cos(A - B) \ \dots \ ②$$

Cothromaímid an dá luach ar $|PQ|^2$ ansin go bhfaighimid:

$$2 - 2(\cos A \cos B + \sin A \sin B) = 2 - 2 \cos(A - B)$$
$$\Rightarrow \quad -(\cos A \cos B + \sin A \sin B) = -\cos(A - B)$$

*⇒ $\mathbf{\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B}$ …… **(i)**

Ó tá foirmle $\cos(A - B)$ faighte againn is féidir na foirmlí eile a fháil uaithi sin trí úsáid a bhaint as na hionannais atá sa bhosca ar dheis.

$\cos(-B) = \cos B$
$\sin(-B) = -\sin B$
$\sin(90° - A) = \cos A$
$\cos(90° - A) = \sin A$

Nóta: Aon fhoirmle atá marcáilte le réiltín (*), b'fhéidir go n-iarrfaí ort í a dhíorthú i scrúdú na hArdteistiméireachta.

An fhoirmle le haghaidh cos($A + B$)*

Gheobhaimid an fhoirmle le haghaidh cos($A + B$) má chuirtear ($-B$) in áit B i bhfoirmle **(i)** thuas:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$
$$\Rightarrow \quad \cos[A - (-B)] = \cos A \cos(-B) + \sin A \sin(-B)$$
$$= \cos A \cos B + \sin A(-\sin B)$$

$*\Rightarrow$ $\quad$ **$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ...... (ii)**

Na foirmlí le haghaidh sin($A + B$) agus sin($A - B$)

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ … ó **(i)**

Chun an fhoirmle le haghaidh sin($A + B$) a fháil cuirimid ($90° - A$) in áit A.

$$\Rightarrow \quad \cos(A - B) = \cos[(90° - A) - B] = \cos(90° - A)\cos B + \sin(90° - A)\sin B$$
$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\Rightarrow \quad \cos[90° - (A + B)] = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$* \Rightarrow$ $\quad$ **$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ...... (iii)**

Nuair a chuirtear ($-B$) in áit B i bhfoirmle **(iii)**:

$$\sin(A - B) = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$

$\sin(-B) = -\sin B$

$* \Rightarrow$ $\quad$ **$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ ...... (iv)**

Na foirmlí le haghaidh tan($A + B$) agus tan($A - B$)

Is féidir slonn ar tan($A + B$) agus slonn ar tan($A - B$) a bhaint as na foirmlí **(i)** go dtí **(iv)** atá bunaithe thuas:

$$\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

Roinn gach téarma san uimhreoir agus san ainmneoir ar cos A cos B.

$$\tan(A + B) = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{1 - \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}$$

$*\Rightarrow$ $\quad$ $$\mathbf{\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}} \text{ ...... } \mathbf{(v)}$$

Nuair a chuirtear ($-B$) in áit B i bhfoirmle **(v)**:

$$\mathbf{\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}} \text{ ...... } \mathbf{(vi)}$$

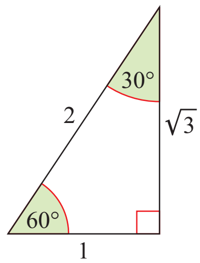
$\tan(-B) = -\tan B$

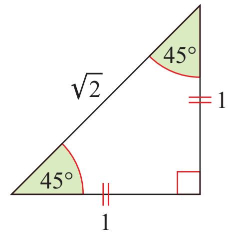
Foirmlí uillinneacha comhshuite

$$\mathbf{\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B}$$
$$\mathbf{\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B}$$
$$\mathbf{\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B}$$
$$\mathbf{\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B}$$
$$\mathbf{\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}; \quad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}}$$

Nóta: Tugtar luachanna beachta an tsínis, an chomhshínis agus an tangaint le haghaidh 30°, 45° agus 60° ar leathanach 13 de *Foirmlí agus Táblaí.*

Is féidir cóimheasa triantánachta beachta 30°, 45° agus 60° a fháil le cabhair na dtriantán ar dheis freisin.





Sampla 1

Scríobh i bhfoirm surda (i) sin 15° (ii) tan 105°

(i) $\sin 15° = \sin(60° - 45°)$

$= \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\tan 105° = \tan(60° + 45°)$

$= \frac{\tan 60° + \tan 45°}{1 - \tan 60° \tan 45°}$

$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

$= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2}$ … rinneamar uimhir chóimheasta den ainmneoir.

$= -2 - \sqrt{3}$

$\tan 60° = \sqrt{3}$

$\tan 45° = 1$

Sampla 2

Má tá $\tan A = \frac{1}{4}$ agus $\tan B = \frac{3}{5}$, faigh luach $(A + B)$ gan áireamhán a úsáid.

$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

$= \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}}$

$= \frac{5 + 12}{20 - 3}$ … iolraigh gach téarma os cionn na líne agus thíos faoin líne faoi 20

$\Rightarrow \quad \tan(A + B) = \frac{17}{17} = 1 \quad \Rightarrow \quad (A + B) = \tan^{-1} 1$

$= 45°$

T&T4.indb 151 10/07/2018 17:46:35

Sampla 3

Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{\sin(A + B)}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B$.

$$\frac{\sin(A + B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B}$$

Roinn gach téarma san uimhreoir agus san ainmneoir ar $\cos A \cos B$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A + B)}{\cos A \cos B} = \frac{\dfrac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}}$$

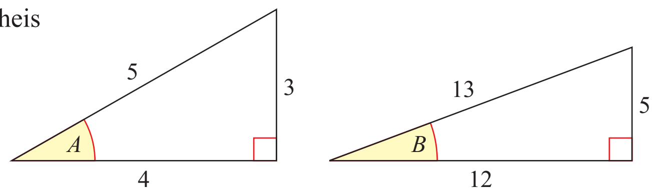
$$= \frac{\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\sin B}{\cos B}}{1} = \tan A + \tan B$$

Cleachtadh 5.2

1. Scríobh luach gach ceann díobh seo i bhfoirm surda
(i) $\cos 15°$ (ii) $\sin 75°$ (iii) $\cos 105°$

2. Scríobh gach ceann díobh seo i bhfoirm surda:
(i) $\tan 15°$ (ii) $\sin 135°$ (iii) $\tan 75°$

3. Bain leas as na triantáin ar dheis chun luach a fháil do
(i) $\cos(A + B)$
(ii) $\tan(A - B)$.



4. Scríobh gach ceann díobh seo ina fheidhm d'uillinn chomhshuite agus faigh a luach:
(i) $\sin 45° \cos 15° + \cos 45° \sin 15°$ (ii) $\cos 40° \cos 50° - \sin 40° \sin 50°$
(iii) $\cos 80° \cos 20° + \sin 80° \sin 20°$ (iv) $\dfrac{\tan 25° + \tan 20°}{1 - \tan 25° \tan 20°}$

5. Simpligh gach ceann díobh seo:
(i) $\dfrac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$ (ii) $\sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta$

6. Bain leas as foirmlí na n-uillinneacha comhshuite chun an méid a leanas a léiriú
(i) $\sin(90° - A) = \cos A$ (ii) $\cos(90° + A) = -\sin A$.

7. Má tá $\tan(A - B) = 2$ agus $\tan B = \frac{1}{4}$, faigh $\tan A$.

8. Má tá $\tan A = \frac{1}{2}$ agus $\tan B = \frac{1}{3}$, áit a bhfuil A agus $B < \frac{\pi}{2}$, faigh luach na huillinne $(A + B)$.

9. Má tá $\tan(A + B) = 1$ agus $\tan A = \frac{1}{3}$, scríobh $\tan B$ ina chodán.

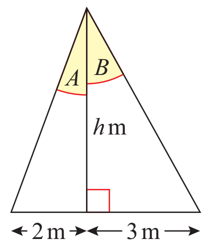
10. Má tá $\sin x = \frac{1}{2}$, agus $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, faigh luach $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ gan áireamhán a úsáid.

11. Scríobh luach $\tan 15°$ i bhfoirm surda.
Bunaithe air sin scríobh luach $\tan^2 15°$ san fhoirm $p + q\sqrt{r}$, áit ar slánuimhreacha iad p, q agus r.

12. Cruthaigh go bhfuil $\tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = \frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}$.

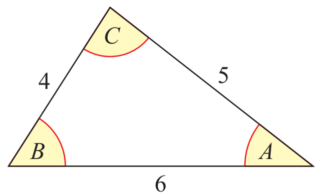
13. Léirigh go bhfuil $\cos(A + B)\cos B + \sin(A + B)\sin B = \cos A$.

14. Tá an triantán ar dheis h m ar airde.
Is uillinneacha iad A agus B sa chaoi is go bhfuil $A + B = 45°$.
Bain leas as an bhforbairt ar $\tan(A + B)$, nó bealach eile, chun luach h a fháil.



15. Má tá $\sin A = \sin(A + 30°)$, léirigh go bhfuil $\tan A = 2 + \sqrt{3}$.

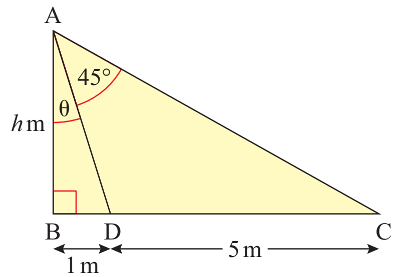
16. Tá sleasa 4, 5 agus 6 ar fad ar thriantán.
Is iad A, B agus C uillinneacha an triantáin, mar atá le feiceáil.
(i) Bain leas as riail an chomhshínis chun a léiriú go bhfuil $\cos A + \cos C = \frac{7}{8}$
(ii) Léirigh go bhfuil $\cos(A + C) = -\frac{9}{16}$.



17. Tá an triantán dronuilleach ABC le feiceáil ar dheis.
$|AB| = h$ m agus $|BC| = 6$ m.
Tá an pointe D ar [BC] sa chaoi is go bhfuil $|BD| = 1$ m agus $|DC| = 5$ m.

$|\angle CAD| = 45°$ agus $|\angle BAD| = \theta$.

Úsáid an fhoirmle le haghaidh $\tan(\theta + 45°)$, nó bealach eile, chun an dá luach a d'fhéadfadh a bheith ar h a fháil.



Mír 5.3 Foirmlí uillinneacha dúbailte agus leathuillinneacha

Leis an dá uillinn A agus B a bhaineann na foirmlí uillinneacha comhshuite sa mhír roimhe seo.
Má chuirtear A in áit B gheobhaimid foirmlí an-úsáideach le haghaidh $\sin 2A$, $\cos 2A$ agus $\tan 2A$.

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

Má chuirtear A in áit B gheobhaimid:

$$\sin 2A = \sin(A + A) = \sin A\cos A + \cos A\sin A = 2\sin A\cos A$$
$$\cos 2A = \cos(A + A) = \cos A\cos A - \sin A\sin A = \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$\tan 2A = \tan(A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A\tan A} = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Má bhaintear úsáid as an ionannas $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, gheobhaimid dhá ionannas eile le haghaidh $\cos 2A$:

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A\\ &= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A\\ &= 1 - 2\sin^2 A\end{aligned}$$

nó

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A\\ &= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)\\ &= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A\\ &= 2\cos^2 A - 1\end{aligned}$$

Foirmlí uillinneacha dúbailte

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A \qquad \tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Má chuirtear atheagar ar na foirmlí le haghaidh cos $2A$ is féidir $\cos^2 A$ agus $\sin^2 A$ a scríobh i dtéarmaí cos $2A$, mar a leanas:

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \quad \text{nó} \quad \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\Rightarrow\ 2\cos^2 A = 1 + \cos 2A \qquad \Rightarrow\ 2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$$

$$\Rightarrow\ \cos^2 A = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2A) \qquad \Rightarrow\ \sin^2 A = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2A)$$

$$\cos^2 A = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2A) \qquad \sin^2 A = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2A)$$

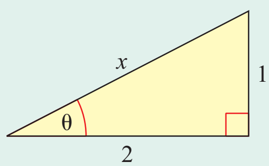
Sampla 1

Scríobh sin $3A$ i dtéarmaí sin A.

$$\begin{aligned}
\sin 3A &= \sin(2A + A)\\
&= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A\\
&= 2\sin A \cos A \cos A + (1 - 2\sin^2 A)(\sin A)\\
&= 2\sin A(\cos^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A\\
&= 2\sin A(1 - \sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A\\
&= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2\sin^3 A\\
\Rightarrow\ \sin 3A &= 3\sin A - 4\sin^3 A
\end{aligned}$$

Sampla 2

Más géaruillinn é θ agus má tá $\tan\theta = \frac{1}{2}$, faigh a luach seo:
(i) $\sin 2\theta$ (ii) $\cos 2\theta$.



Má tá $\tan\theta = \frac{1}{2}$, tá a fhios againn ón triantán dronuilleach:

$$x^2 = 2^2 + 1^2 \ \Rightarrow\ x^2 = 5 \ \Rightarrow\ x = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ agus } \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(i) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$

(ii) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Má bhíonn cos 2A san ionannas atá le cruthú, is minic nach féidir sin a dhéanamh mura roghnaítear an fhoirmle cheart le haghaidh cos 2A. Is gnách go gcaitear roghnú idir $(2\cos^2 A - 1)$ agus $(1 - 2\sin^2 A)$.

Más é $1 + \cos 2A$ a thugtar dúinn, is féidir an 1 sin a chealú ach $(2\cos^2 A - 1)$ a roghnú le haghaidh cos $2A$. Sa chaoi sin is ionann $1 + \cos 2A$ agus $1 + 2\cos^2 A - 1 = 2\cos^2 A$.

Sampla 3

Léirigh go bhfuil (i) $\dfrac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$ (ii) $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos 2\theta$.

$$\text{(i)} \quad \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{2 \sin A \cos A}{1 + 2\cos^2 A - 1}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{2 \cos^2 A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

$$\text{(ii)} \quad \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= (1)(\cos 2\theta)$$

$$= \cos 2\theta$$

$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$

sin 2*A*, cos 2*A* agus tan 2*A* a scríobh i dtéarmaí tan *A*

Nuair atá ionannais á gcruthú is minic a bhíonn sé ina chúnamh sin 2*A*, cos 2*A* agus tan 2*A* a scríobh i dtéarmaí tan *A*.

Tá sé cruthaithe cheana againn go bhfuil $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$.

Tá na foirmlí seo a leanas le feiceáil ar leathanach 14 de *Foirmlí agus Táblaí*:

(i) $\sin 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$ * (ii) $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$ *

Tá cruthú ar na foirmlí sin i Sampla 4 thíos.

Nóta: Nuair a scríobhtar sin 2*A*, cos 2*A* agus tan 2*A* i dtéarmaí tan *A* is gnách **foirmlí leathuillinneacha** a thabhairt orthu.

Sampla 4

Cruthaigh (i) $\sin 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$ (ii) $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$.

Is é an bealach leis na hionannais a chruthú ná a léiriú go bhfuil an taobh deas cothrom leis an taobh clé i ngach cás:

$$\text{(i)} \quad \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} = \frac{\dfrac{2 \sin A}{\cos A}}{1 + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2 \sin A \cos A}{\cos^2 A + \sin^2 A} \ \ldots \text{(iolraigh thíos agus thuas faoi } \cos^2 A\text{)}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{1} = \sin 2A$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1 + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A} = \frac{\cos 2A}{1} = \cos 2A$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \qquad \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \qquad \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

T&T4.indd 155 10/07/2018 17:46:36

Sampla 5

Má tá $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$, faigh na luachanna ar $\sin\theta$ i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2\sin^2\theta = \frac{7}{25} \quad \Rightarrow \quad 2\sin^2\theta = \frac{18}{25}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \pm\frac{3}{5}$$

Sampla 6

Má tá $\sin 2A = \frac{3}{5}$, faigh an dá luach ar $\tan A$ i gcás $0° < A < 90°$.

I dtéarmaí tan A a scríobhtar $\tan A$ sa chás seo.

$$\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad 3 + 3\tan^2 A = 10\tan A$$

$$\Rightarrow \quad 3\tan^2 A - 10\tan A + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3\tan A - 1)(\tan A - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\tan A = 1 \quad \text{nó} \quad \tan A = 3$$

$$\Rightarrow \quad \tan A = \frac{1}{3} \quad \text{nó} \quad \tan A = 3$$

Nóta: Ós rud é go bhfuil $\sin 2A = 2\sin A\cos A$, tá, chomh maith:

(i) $\sin 4A = 2\sin 2A\cos 2A$
(ii) $\sin 6A = 2\sin 3A\cos 3A$
(iii) $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

Ar an gcaoi chéanna, ós rud é go bhfuil $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

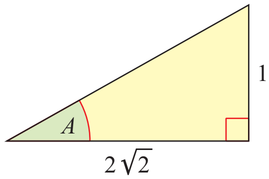
(iv) $\cos 4A = 2\cos^2 2A - 1$
(v) $\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$

Cleachtadh 5.3

1. Má tá $\sin A = \frac{3}{5}$ agus $0° < A < 90°$, faigh luach
(i) $\sin 2A$ (ii) $\cos 2A$ (iii) $\tan 2A$

2. Más géaruillinn é A agus má tá $\tan A = \frac{1}{2}$, faigh luach
(i) $\tan 2A$ (ii) $\sin 2A$.

3. Gan áireamhán a úsáid, faigh luach $\cos 2A$ ón léaráid ar dheis.



4. Má tá $\cos 2A = \frac{3}{8}$ agus $0° < A < 90°$, faigh luach $\sin A$ agus $\cos A$.

5. Má tá $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ agus $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$, faigh luach gach ceann díobh seo a leanas, gan áireamhán a úsáid:
(i) $2 \sin 15° \cos 15°$ (ii) $2 \sin 75° \cos 75°$ (iii) $\cos^2 22\frac{1}{2}° - \sin^2 22\frac{1}{2}°$.

6. Simpligh $\dfrac{2 \tan 22\frac{1}{2}°}{1 - \tan^2 22\frac{1}{2}°}$.

7. Cruthaigh go bhfuil $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$.

8. Cruthaigh gach ceann de na hionannais seo a leanas:
(i) $(\sin A + \cos A)^2 = 1 + \sin 2A$ (ii) $\dfrac{\cos 2A}{\cos A + \sin A} = \cos A - \sin A$.

9. Léirigh go bhfuil $1 - (\cos x - \sin x)^2 = \sin 2x$.

10. Má tá $\tan A = \frac{1}{2}$, agus más géaruillinn é A, faigh $\tan 2A$ gan áireamhán a úsáid.

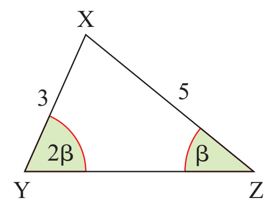
11. Má tá $\cos A = \frac{3}{5}$, i gcás $0 < A < 90°$, faigh luach
(i) $\sin 2A$ (ii) $\cos 2A$

12. Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{1 - \cos 2A}{\sin 2A} = \tan A$.

13. Léirigh go bhfuil $\dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} = \sin 2A$.

14. Má tá $\tan 2\theta = \frac{4}{3}$, faigh na luachanna ar $\tan \theta$ i gcás $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$.

15. I gcás an triantáin XYZ, $|\angle XYZ| = 2\beta$ agus $|\angle XZY| = \beta$.
$|XY| = 3$ agus $|XZ| = 5$.
(i) Bain úsáid as an eolas sin chun $\sin 2\beta$ a scríobh san fhoirm $\dfrac{a}{b} \sin \beta$, nuair atá $a, b \in \mathbb{N}$.
(ii) Bunaithe air sin scríobh $\tan \beta$ san fhoirm $\dfrac{\sqrt{c}}{d}$, nuair atá $c, d \in \mathbb{N}$.



16. Dhá ghéaruillinn iad A agus B sa chaoi is go bhfuil $\tan A = \frac{4}{3}$ agus $\tan(A + B) = -1$.
Gan luach A ná luach B a fháil,
(i) léirigh go bhfuil $\tan B = 7$
(ii) faigh luach $\sin 2B$.

17. (i) Léirigh go bhfuil $\dfrac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$.
(ii) Bunaithe air sin, nó ar bhealach eile, cruthaigh go bhfuil $\tan 22\frac{1}{2}° = \sqrt{2} - 1$.

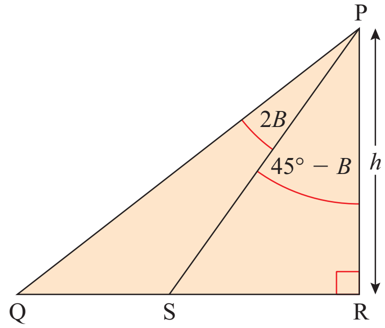
18. Má tá $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$ nó $2 \cos^2 A - 1$, scríobh $\cos 4A$ i dtéarmaí
(i) $\sin 2A$ (ii) $\cos 2A$.
Bunaithe air sin léirigh go bhfuil $\dfrac{1 - \cos 4A}{1 + \cos 4A} = \tan^2 2A$.

19. 21, 17 agus 10 ar fad atá sleasa triantáin áirithe.
Is é A an uillinn is lú sa triantán.
(i) Léirigh go bhfuil $\cos A = \frac{15}{17}$.
(ii) Gan luach A a fháil, faigh $\tan \dfrac{A}{2}$.

20. I gcás an triantáin PQR, $|\angle QRP| = 90°$ agus $|RP| = h$.
Is pointe ar [QR] é S sa chaoi go bhfuil $|\angle SPQ| = 2B$ agus $|\angle RPS| = 45° - B$, $0° < B < 45°$.

(i) Léirigh go bhfuil $|SR| = h \tan(45° - B)$.

(ii) Bunaithe air sin, nó ar bhealach eile, léirigh go bhfuil
$|QS| = 2h \tan 2B$.



Mír 5.4 Suimeanna agus difríochtaí a athrú ina dtorthaí

Tá foirmlí tábhachtacha ar leathanach 15 de *Foirmlí agus Táblaí* le suimeanna agus difríochtaí a athrú ina dtorthaí. Na foirmlí sin, gan chruthú, a thugtar thíos.

Torthaí a athrú ina suimeanna nó ina ndifríochtaí

$$\begin{aligned}
2 \sin A \cos B &= \sin(A + B) + \sin(A - B)\\
2 \cos A \sin B &= \sin(A + B) - \sin(A - B)\\
2 \cos A \cos B &= \cos(A + B) + \cos(A - B)\\
-2 \sin A \sin B &= \cos(A + B) - \cos(A - B)
\end{aligned}$$

Suimeanna agus difríochtaí a athrú ina dtorthaí

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}\\
\sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}\\
\cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}\\
\cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}
\end{aligned}$$

Nóta: Moltar an uillinn is mó a bheith chun tosaigh agus suim nó difríocht á hathrú ina toradh. Dá réir sin, ba chóir sin $3x + \sin 5x$ a scríobh mar $\sin 5x + \sin 3x$, mar shampla. Ar an gcaoi chéanna, má thugtar an toradh $2 \sin 2x \cos 3x$ dúinn, is san fhoirm $2 \cos 3x \sin 2x$ is cóir é sin a scríobh.

Sampla 1

Scríobh ina shuim nó ina dhifríocht: (i) $2 \cos 3x \sin x$ (ii) $\cos \theta \cos 5\theta$

(i) $\begin{aligned}2 \cos 3x \sin x &= \sin(3x + x) - \sin(3x - x)\\ &= \sin 4x - \sin 2x\end{aligned}$

(ii) $\begin{aligned}\cos \theta \cos 5\theta &= \cos 5\theta \cos \theta\\ &= \tfrac{1}{2}[2 \cos 5\theta \cos \theta]\\ &= \tfrac{1}{2}[\cos(5\theta + \theta) + \cos(5\theta - \theta)]\\ &= \tfrac{1}{2}[\cos 6\theta + \cos 4\theta]\end{aligned}$

Bíodh an uillinn is mó chun tosaigh i gcónaí.

Sampla 2

Scríobh ina thoradh (i) $\cos 5A + \cos 3A$ (ii) $\sin 3A - \sin A$

(i) $\cos 5A + \cos 3A = 2\cos\left(\frac{5A + 3A}{2}\right)\cos\left(\frac{5A - 3A}{2}\right)$

$= 2\cos 4A \cos A$

(ii) $\sin 3A - \sin A = 2\cos\left(\frac{3A + A}{2}\right)\sin\left(\frac{3A - A}{2}\right)$

$= 2\cos 2A \sin A$

Sampla 3

Léirigh go bhfuil $\dfrac{\sin 3A - \sin 2A + \sin A}{\cos 3A + \cos A - \cos 2A} = \tan 2A$.

$$\frac{\sin 3A - \sin 2A + \sin A}{\cos 3A + \cos A - \cos 2A} = \frac{(\sin 3A + \sin A) - \sin 2A}{(\cos 3A + \cos A) - \cos 2A}$$

$$= \frac{2\sin 2A \cos A - \sin 2A}{2\cos 2A \cos A - \cos 2A}$$

$$= \frac{\sin 2A(2\cos A - 1)}{\cos 2A(2\cos A - 1)} = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \tan 2A$$

Cleachtadh 5.4

1. Scríobh gach ceann díobh seo ina thoradh:
(i) $\sin 5x + \sin 3x$ (ii) $\sin 4x - \sin 2x$ (iii) $\cos 3x + \cos x$
(iv) $\cos 7\theta - \cos 5\theta$ (v) $\cos 3\theta - \cos \theta$ (vi) $\sin 3\theta - \sin 7\theta$

2. Scríobh gach ceann díobh seo ina thoradh agus ansin simpligh é:
(i) $\cos 80° + \cos 40°$ (ii) $\sin 125° - \sin 55°$ (iii) $\cos 75° - \cos 15°$

3. Gan áireamhán a úsáid, léirigh gur fíor gach ceann díobh seo a leanas:
(i) $\sin 75° - \sin 15° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sin 10° + \sin 80° = \sqrt{2}\cos 35°$.

4. Scríobh gach ceann díobh seo ina thoradh, agus tabhair do fhreagra san fhoirm is simplí:
(i) $\cos(x + 45°) + \cos(x - 45°)$ (ii) $\cos(x + 60°) - \cos(x - 60°)$.

5. Scríobh gach ceann díobh seo ina shuim nó ina dhifríocht:
(i) $2\sin 3A \cos 2A$ (ii) $2\cos 4x \sin x$ (iii) $2\cos 5A \cos 2A$
(iv) $-2\sin 6A \sin 2A$ (v) $\sin 2A \sin A$ (vi) $\sin x \cos 5x$

6. Scríobh gach ceann díobh seo ina shuim nó ina dhifríocht agus ansin simpligh é:
(i) $2\sin 75° \cos 45°$ (ii) $10\sin 67\tfrac{1}{2}° \sin 22\tfrac{1}{2}°$.

7. Léirigh go bhfuil
(i) $2\cos(A + 45°)\sin(A - 45°) = \sin 2A - 1$ (ii) $\dfrac{\cos 50° - \cos 70°}{\sin 70° - \sin 50°} = \sqrt{3}$.

8. Léirigh go bhfuil $\dfrac{\sin(\theta + 15°) + \sin(\theta - 15°)}{\cos(\theta + 15°) + \cos(\theta - 15°)} = \tan \theta.$

9. Léirigh go bhfuil $\dfrac{\sin 4A + \sin 2A}{2 \sin 3A} = \cos A.$

10. Léirigh go bhfuil $\dfrac{\sin 5A - \sin 3A}{\cos 5A + \cos 3A} = \tan A.$

11. Léirigh go bhfuil $2 \sin(135° + A) \sin(45° + A) = \cos 2A.$

12. Má tá $\tan 3\theta = 2$, faigh a luach seo, gan áireamhán a úsáid
$\dfrac{\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta}{\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta}.$

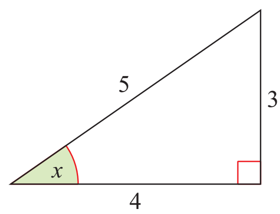
Mír 5.5 Feidhmeanna triantánachta inbhéartacha

I gcás an triantáin ar dheis, sin $= \frac{3}{5}$.

D'fhéadfaí a rá freisin gurb é 'x an uillinn ar síneas di $\frac{3}{5}$.'

Mar seo a scríobhtar é sin: $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = x$.

'arc sín' a thugtar ar $\sin^{-1}$.



Agus má tá (i) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

(ii) $\tan x = 1 \Rightarrow x = \tan^{-1}(1) = 45°$.

Is léir ón dá shampla sin gur **uillinneacha** iad $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ agus $\tan^{-1}(1)$, agus gur **cóimheasa** iad cos 30° agus tan 45°.

Sampla 1

Scríobh síos luach gach ceann de na huillinneacha seo a leanas sa raon 0° go dtí 90°.

(i) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ (iv) $\cos^{-1}(0.8)$.

(i) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 30°$

(ii) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

(iii) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60°$

(iv) $\cos^{-1}(0.8) = 36.9°$ (le háireamhán)

Sampla 2

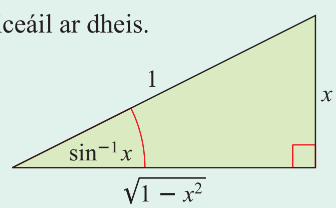
(i) Scríobh $\cos(\sin^{-1} x)$ i dtéarmaí x.

(ii) Faigh luach $\sin\left(2 \tan^{-1} \frac{4}{3}\right)$.

(i) Is é $\sin^{-1} x$ an uillinn dar síneas x, mar atá le feiceáil ar dheis.

Is é $\sqrt{1 - x^2}$ an tríú slios.

$$\cos(\sin^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}$$

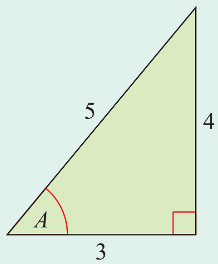


(ii) Is uillinn dhúbailte é $2\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

Bíodh $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = A$.

Léirítear A sa triantán ar dheis.

$$\sin\left(2\tan^{-1}\frac{4}{3}\right) = \sin 2A$$
$$= 2\sin A\cos A$$
$$= 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$



Cleachtadh 5.5

1. Scríobh síos luach gach ceann de na huillinneacha seo sa raon 180° go dtí −90°, gan áireamhán a úsáid:

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (iii) $\tan^{-1}(1)$

(iv) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (v) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (vi) $\tan^{-1}(-1)$

(vii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (viii) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. I gcás gach ceann díobh seo a leanas, tarraing triantán le léiriú go bhfuil

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(iii) $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ (iv) $\tan^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

3. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas, agus scríobh do chuid freagraí i dtéarmaí x:

(i) $\sin(\sin^{-1}x)$ (ii) $\cos(\sin^{-1}x)$ (iii) $\sin(\tan^{-1}x)$.

4. Faigh luach gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ (ii) $\cos(\tan^{-1}1)$ (iii) $\sin\left(\tan^{-1}\frac{8}{15}\right)$.

5. Faigh luach

(i) $\sin\left(2\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ (ii) $\cos\left(2\sin^{-1}\frac{5}{13}\right)$.

6. Bain úsáid as an bhfoirmle le haghaidh $\sin(A+B)$ chun a léiriú go bhfuil,

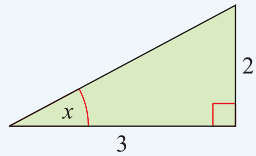
(i) $\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right] = \frac{63}{65}$. (ii) $\sin\left[\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. Faigh luach $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13}\right)$.

8. Cruthaigh go bhfuil $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sin\left(\cos^{-1}\frac{7}{25}\right)$.

Cuir triail ort féin 5

Ceisteanna A



1. Faigh luach sin $2x$ sa léaráid ar dheis, gan áireamhán a úsáid.

2. Géaruillinneacha iad A agus B sa chaoi is go bhfuil $\tan A = \frac{5}{12}$ agus $\tan B = \frac{3}{4}$. Faigh $\cos(A - B)$ ina chodán.

3. Léirigh go bhfuil $(\cos A + \sin A)^2 = 1 + \sin 2A$.

4. Má tá $\cos x = \frac{4}{5}$ agus $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, faigh luach $\tan 2x$.

5. Cruthaigh go bhfuil $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

6. Géaruillinn é A sa chaoi is go bhfuil $\tan A = \frac{8}{15}$.
Gan luach A a fháil faigh
(i) $\cos A$ (ii) $\sin 2A$.

7. (i) Scríobh $\sin 75° \cos 15° - \cos 75° \sin 15°$ ina fheidhm d'uillinn chomhshuite agus simpligh é.
(ii) Cruthaigh go bhfuil $2 + 2\cos 2x = 4\cos^2 x$.

8. Má tá $\tan 75° = a + b\sqrt{3}$, faigh luach a agus luach b, áit a bhfuil $a, b \in \mathbb{Z}$.

9. (i) Léirigh go bhfuil $\tan\theta \sin\theta + \cos\theta = \sec\theta$.
(ii) Más géaruillinn é θ agus má tá $\cos\theta = \frac{5}{13}$, faigh luach $\sin 2\theta$.

10. (i) Faigh an luach ar k a fhágann go bhfuil $\sin 75° - \sin 15° = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N}$.
(ii) Má tá $A = \sin^{-1}\frac{1}{2}$, faigh luach $\tan 2A$.

Ceisteanna B

1. (i) Bain leas as $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$, nó bealach éigin eile, chun a chruthú go bhfuil
$$\cos^2 A = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2A).$$
(ii) Scríobh síos luach beacht
$$\sin 40° \cos 20° + \cos 40° \sin 20°.$$

2. (i) Más géaruillinn é θ agus má tá $\sin\theta = \frac{4}{5}$, faigh luach $\cos 2\theta$.
(ii) Léirigh go bhfuil $2\cos^2 A - \cos 2A - 1 = 0$.

3. (i) Scríobh $2\sin 4\theta \cos 2\theta$ ina shuim nó ina dhifríocht de dhá fheidhm thriantánachta.
(ii) Léirigh gur féidir $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$ a shimpliú ina thairiseach agus scríobh síos a luach.

4. (i) Cruthaigh go bhfuil $\cos(45° + \theta) - (\cos 45° - \theta) = -\sqrt{2}\sin\theta$.
(ii) Cruthaigh go bhfuil $\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta \sin\theta$.

5. (i) Bain leas as foirmle uillinneacha dúbailte chun a luach seo a scríobh i bhfoirm surda

$\cos^2 15° - \sin^2 15.$

(ii) Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin \theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos \theta} = 2.$

6. (i) Léirigh go bhfuil $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

(ii) Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{\cos 5\theta - \cos 3\theta}{\sin 4\theta} = -2 \sin \theta.$

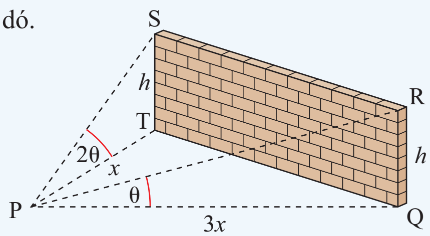
7. Cruthaigh go bhfuil $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

8. Má tá $A + B = \dfrac{\pi}{4}$, scríobh $\tan A$ i dtéarmaí $\tan B$.

Bunaithe air sin cruthaigh go bhfuil $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$.

9. Faigh luach $\sin 105° - \sin 15°$ i bhfoirm surda, gan áireamhán a úsáid.

10. Balla ceartingearach ar thalamh cothrom é QRST. h is airde dó. Is pointe ar an talamh os comhair an bhalla é P. Is é θ an uillinn airde ó P go R agus is é 2θ an uillinn airde ó P go S. $|PQ| = 3|PT|$.
Faigh θ.



Ceisteanna C

1. Má tá $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, cruthaigh go bhfuil

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$

Bunaithe air sin, trí $\sin 3x$ a scríobh san fhoirm $\sin(2x + x)$, cruthaigh go bhfuil

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$

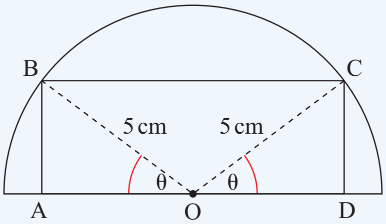
2. Léirigh go bhfuil $(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2 = 2 + 2\cos(A - B)$.

3. Sa léaráid ar dheis tá an dronuilleog ABCD taobh istigh de leathchiorcal dar lárphointe O agus dar ga 5 cm, sa chaoi is go bhfuil $|\angle BOA| = |\angle COD| = \theta$.

(i) p cm atá in imlíne na dronuilleoige.
Léirigh go dtugann an chothromóid seo luach p:

$p = 20 \cos \theta + 10 \sin \theta.$

(ii) Faigh an luach ar k a d'fhágfadh gurb é $k \sin 2\theta$ cm^2 achar na dronuilleoige.



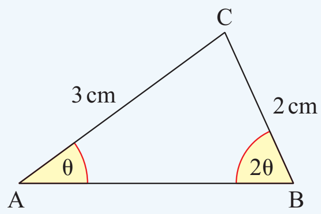
4. Bain úsáid as an bhfoirmle $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, chun foirmle a dhíorthú le haghaidh $\cos(A - B)$. Bunaithe air sin cruthaigh go bhfuil $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

5. (i) Léirigh go bhfuil $\sqrt{2\sin^2\theta + 6\cos^2\theta - 2} = 2\cos\theta$, i gcás gach θ.

(ii) Is dhá réiteach iad $x = 0°$ agus $x = 60°$ ar an gcothromóid $a \sin^2 2x + \cos 2x - b = 0$, áit a bhfuil $a, b \in \mathbb{N}$.
Faigh luach a agus luach b.

6. I gcás an triantáin ABC, $|AC| = 3$ cm, $|BC| = 2$ cm, $|\angle BAC| = \theta$ agus $|\angle ABC| = 2\theta$.
Ríomh luach θ ceart go dtí an deichiú cuid is gaire de chéim.

Bunaithe air sin faigh méid na huillinne ACB agus, gan aon rud eile a ríomh, mínigh cén fáth a bhfuil fad [AB] níos mó ná 2 cm.

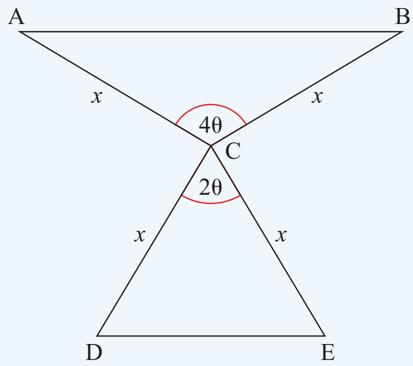


7. (i) Má tá $\sin 2\theta = 1$ agus más géaruillinn é θ, faigh luach beacht
(a) $\sin \theta$ (b) $\tan \theta$

(ii) Léirigh go bhfuil $\dfrac{\sin 4\theta\,(1 - \cos 2\theta)}{\cos 2\theta\,(1 - \cos 4\theta)} = \tan \theta$.

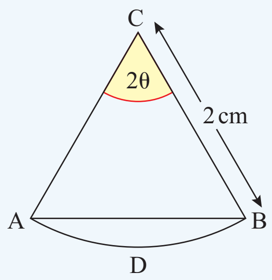
8. Sa léaráid ar dheis
$|AC| = |CB| = |DC| = |EC| = x$,
$|\angle ACB| = 4\theta$ agus $|\angle DCE| = 2\theta$.

(i) Má tá achar $\triangle ACB$ = achar $\triangle DCE$, léirigh go bhfuil $\theta = 30°$.
(ii) Bain úsáid as $\theta = 30°$, chun luach x a fháil, má tá $|AB|^2 + |DE|^2 = 24$.
Tabhair do fhreagra i bhfoirm surda.



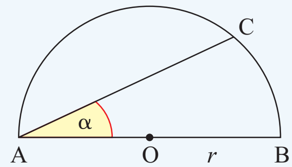
9. Sa léaráid ar dheis, is lárphointe ciorcail dar ga 2 cm é C.
Teascóg den chiorcal é ADBC ina bhfuil uillinn 2θ raidian.
Faigh (i) achar na teascóige ADBC i dtéarmaí θ.
(ii) achar an triantáin ABC i dtéarmaí $\sin 2\theta$.

Más ionann achar $\triangle ABC$ agus trí cheathrú den achar sa teascóg ADBC, léirigh go bhfuil
$2 \sin 2\theta = 3\theta$.
Más $\sqrt{3}$ cm^2 atá in achar $\triangle ABC$, faigh θ ina raidiain.



10. Is é [AB] trastomhas leathchiorcail dar lárphointe O agus dar ga r.
Is corda é [AC] sa chaoi is go bhfuil $|\angle CAB| = \alpha$, áit a bhfuil α ina raidiain.

(i) Faigh $|AC|$ i dtéarmaí r agus α.
(ii) Déroinneann [AC] an leathchiorcal ó thaobh achair de.
Léirigh go bhfuil $2\alpha + \sin 2\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.



Achoimre ar na Príomhphointí

Ionannais triantánachta

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ $\quad \cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$ $\quad \sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ $\quad \operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ $\quad \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$\cos(-A) = \cos A$

$\sin(-A) = -\sin A$

$\tan(-A) = -\tan A$

Foirmlí uillinneacha comhshuite

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Foirmlí uillinneacha dúbailte

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$

$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

Torthaí a athrú ina suimeanna nó ina ndifríochtaí

$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$

$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$

$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$

Suimeanna agus difríochtaí a athrú ina dtorthaí

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$

T&T4.indb 165 10/07/2018 17:46:40

An Chéimseata 2: Méaduithe agus Tógálacha

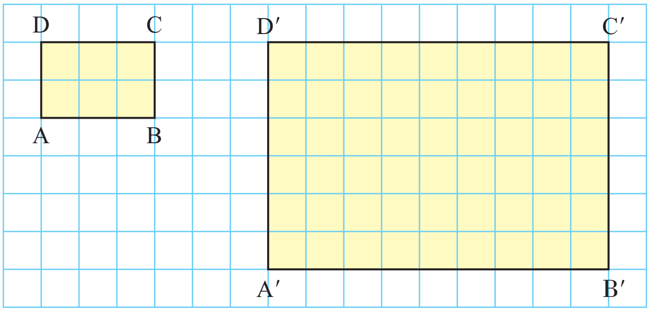
Focail thábhachtacha

méadú **bunfhíor** **íomhá** **rinn** **fachtóir scála** **lárphointe an mhéadaithe** **déroinnteoir** **déroinnteoir ingearach** **inchiorcal** **meánlíne** **meánlár** **imchiorcal** **ingearlár** **ar comhfhad**

Mír 6.1 Méaduithe

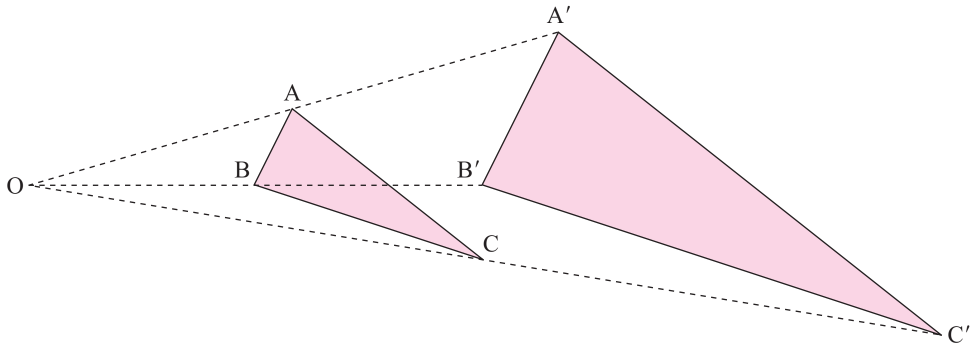
Sa léaráid seo is **méadú** í an dronuilleog $A'B'C'D'$ ar an dronuilleog ABCD.

Anseo tá $|AB| = 3$ agus $|A'B'| = 9$
$|AD| = 2$ agus $|A'D'| = 6$



Tá sleasa na dronuilleoige $A'B'C'D'$ trí oiread níos faide ná sleasa na dronuilleoige ABCD.
Dá réir sin, is é 3 an **fachtóir scála**.

Dhá thriantán, ABC agus $A'B'C'$, atá léirithe thíos.



Is méadú é an triantán $A'B'C'$ ar an triantán ABC.

Lárphointe an mhéadaithe a thugtar ar an bpointe O.

Ós rud é go bhfuil $|OA'| = 2|OA|$, is é 2 an fachtóir scála.

Ós rud é gurb é 2 an fachtóir scála, tá $|A'B'| = 2|AB|$, $|A'C'| = 2|AC|$ agus $|B'C'| = 2|BC|$.

An **bhunfhíor** a thugtar ar an triantán ABC.

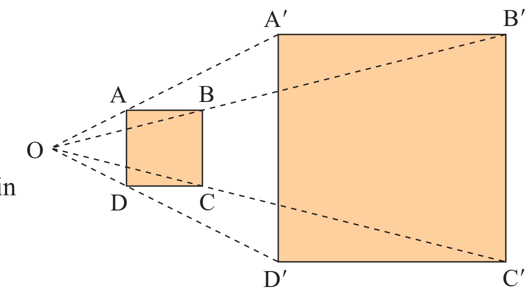
An **íomhá** a thugtar ar an triantán $A'B'C'$.

‘Línte teilgin’ nó **gatháin** a thugtar ar na línte briste.

Méaduithe a tharraingt

Chun íomhá mhéadaithe d'fhíor áirithe a thógáil, beidh an dá rud seo a leanas ag teastáil:

(i) lárphointe an mhéadaithe
(ii) fachtóir scála an mhéadaithe.



Sa léaráid ar dheis, tugtar an chearnóg ABCD agus lárphointe an mhéadaithe, O.

Méadóimid ABCD agus O mar lárphointe an mhéadaithe agus 3 mar fhachtóir scála againn.

Gheobhaimid íomhá A ach O a cheangal le A agus an líne sin a leanúint go dtí A′, ionas go mbeidh $|OA'| = 3|OA|$.

Ar an gcaoi chéanna, ceangail O le B agus lean an líne sin go dtí B′, ionas go mbeidh $|OB'| = 3|OB|$.

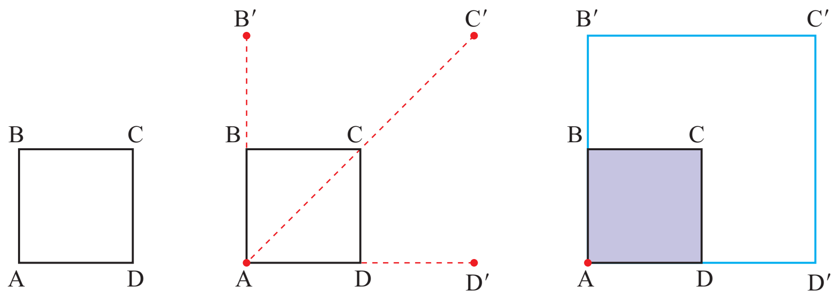
Déan an rud céanna arís le haghaidh pointí C agus D.

Is íomhá na cearnóige ABCD í an chearnóg A′B′C′D′.

Ós rud é gurb é 3 an fachtóir scála, tá $|A'B'| = 3|AB|$ agus $|A'D'| = 3|AD|$.

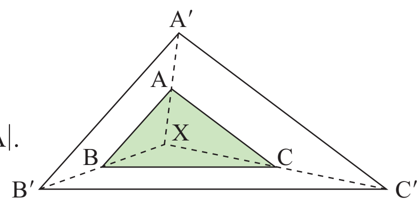
Nuair is rinn é lárphointe an mhéadaithe

Sa léaráid thíos léirítear an chaoi leis an gcruth ABCD a mhéadú de réir fhachtóir scála 2, agus A mar lárphointe an mhéadaithe.



Tabhair faoi deara nach mbogann lárphointe an mhéadaithe, A.

San fhíor dheireanach, tá $|AB'| = 2|AB|$, $|AD'| = 2|AD|$ agus $|AC'| = 2|AC|$.



Sa léaráid ar dheis tugtar méadú ina bhfuil lárphointe an mhéadaithe, X, taobh istigh den fhíor.

Sa mhéadú sin, is é 2 an fachtóir scála.

Tarraing an líne [XA] agus lean í sa chaoi is go mbeidh $|XA'| = 2|XA|$.

Lean [XB] ionas go mbeidh $|XB'| = 2|XB|$.

Déan an rud céanna i gcás [XC].

Tá gach slios ar an triantán A′B′C′ dhá oiread níos faide ná an slios comhfhreagrach ar ABC.

Maidir le méadú ar bith, faightear an fachtóir scála ach fad shlios na híomhá a roinnt ar fhad shlios comhfhreagrach na bunfhíorach.

An fachtóir scála:

$$\frac{\text{fad shlios na híomhá}}{\text{fad shlios comhfhreagrach na bunfhíorach}}$$

T&T4.indb 167 10/07/2018 17:46:41

Méaduithe nuair atá an fachtóir scála níos lú ná 1

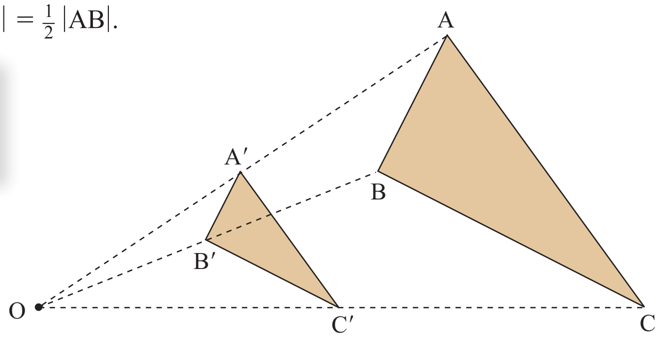
Más fachtóir scála níos lú ná 1 atá ag an méadú, is fíor níos lú a gheofar agus í níos gaire do lárphointe an mhéadaithe.

Is é $A'B'C'$ san fhíor thíos íomhá ABC faoi mhéadú nuair is é $\frac{1}{2}$ an fachtóir scála.

Dá bhrí sin, tá $|OA'| = \frac{1}{2}|OA|$ agus $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$.

> Más é k an fachtóir scála:
> (i) má tá $k > 1$, méadófar an fhíor
> (ii) má tá $k < 1$, laghdófar an fhíor.

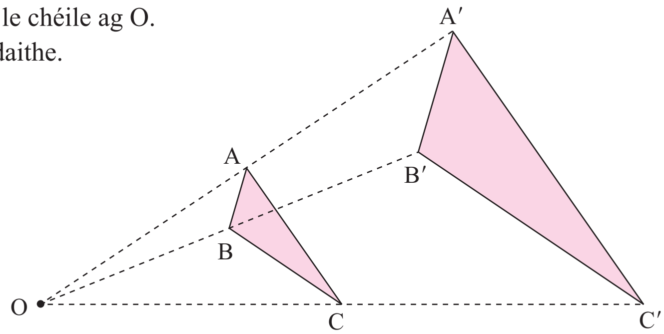
Nuair is ionann an fachtóir scála agus codán deimhneach níos lú ná 1, is laghdú ar an mbunfhíor a fhaightear.



Lárphointe an mhéadaithe a fháil

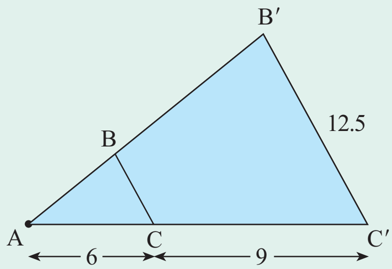
Nuair atá fíor agus méadú na fíorach sin againn, gheobhaimid lárphointe an mhéadaithe ach dhá thacar de phointí comhfhreagracha a cheangal dá chéile agus na línte a leanúint go dtí go mbuailfidh siad le chéile.

Sa léaráid thall, buaileann $A'A$ agus $C'C$ le chéile ag O.
Is é an pointe sin, O, lárphointe an mhéadaithe.



Sampla 1

Méadú ar an triantán ABC is ea an fhíor $AB'C'$ sa léaráid thíos, áit arb é A lárphointe an mhéadaithe.



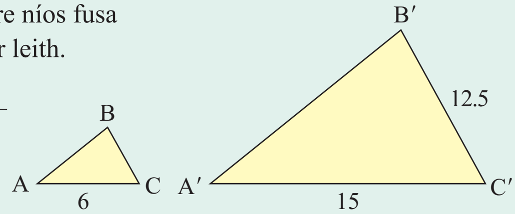
Má tá $|AC| = 6$, $|CC'| = 9$ agus $|B'C'| = 12.5$, faigh
(i) fachtóir scála an mhéadaithe
(ii) $|BC|$
(iii) an cóimheas $|AB| : |AB'|$.

T&T4.indb 168 10/07/2018 17:46:42

(i) B'fhéidir go ndéanfadh sé do chuid oibre níos fusa an dá thriantán a tharraingt ar léaráidí ar leith.

An fachtóir scála $= \dfrac{\text{fad na híomhá}}{\text{fad na bunfhíorach}}$

$= \dfrac{|AC'|}{|AC|} = \dfrac{15}{6} = 2.5$



(ii) Ós rud é gurb é $2\frac{1}{2}$ an fachtóir scála, tá $|B'C'| = 2\frac{1}{2}|BC|$

$|B'C'| = 2\frac{1}{2}|BC| \Rightarrow |BC| = \dfrac{|B'C'|}{2\frac{1}{2}} = \dfrac{12.5}{2.5} = 5$

$\therefore \quad |BC| = 5$

(iii) $|AB'| = 2\frac{1}{2}\,|AB|$

$\therefore \quad \dfrac{|AB'|}{|AB|} = 2\frac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

$\therefore \quad |AB'| : |AB| = 5 : 2$

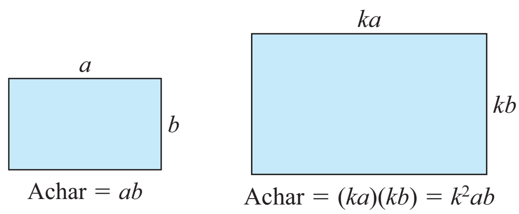
$\Rightarrow \quad |AB| : |AB'| = 2 : 5$

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$
$\Rightarrow \quad x : y = 3 : 4$

Méadú agus achar

Méadú í an dronuilleog ar dheis ar an dronuilleog ar chlé. Is é k fachtóir scála an mhéadaithe.

Is ionann achar na fíorach méadaithe agus k^2 méadaithe faoi achar na bunfhíorach.

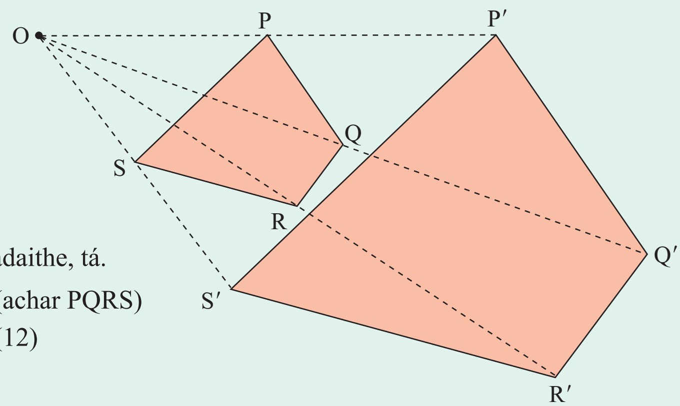


Léiríonn sé sin riail ghinearálta a bhaineann le cruthanna comhchosúla.

Más de réir fhachtóir scála k a mhéadaítear fíor, is méadú de réir fhachtóir scála k^2 a thiocfaidh ar achar fhíor na híomhá.

Sampla 2

Méadú ar an bhfíor PQRS is ea P′Q′R′S′.
Más é 12 cm^2 achar PQRS agus más é 48 cm^2 achar P′Q′R′S′, faigh fachtóir scála an mhéadaithe.



Más é k fachtóir scála an mhéadaithe, tá.

Achar P′Q′R′S′ $= k^2$ (achar PQRS)

$\Rightarrow \quad 48 = k^2\,(12)$

$12k^2 = 48$

$k^2 = 4$

$k = 2$

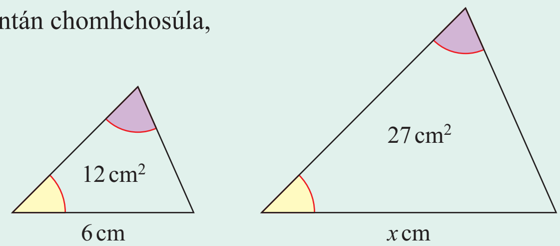
$\therefore$ is é 2 fachtóir scála an mhéadaithe.

T&T4.indb 169 10/07/2018 17:46:43

Sampla 3

Tá achar 12 cm^2 agus 27 cm^2 in dhá thriantán chomhchosúla, mar atá léirithe.

Má tá bonn an triantáin is lú 6 cm ar fad, faigh bonn an triantáin is mó.



Más é k fachtóir scála an mhéadaithe,

tá achar an triantáin is mó $= k^2$ (achar an triantáin is lú)

$$\Rightarrow \quad 27 = k^2(12)$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = \tfrac{27}{12} = \tfrac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \tfrac{3}{2}$$

Fad an tsleasa is mó $= k$ (fad an tsleasa is lú)

$$\Rightarrow \quad x = 6k$$

$$\Rightarrow \quad x = 6\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = 9 \text{ cm}$$

Bonn an triantáin is mó $= 9$ cm

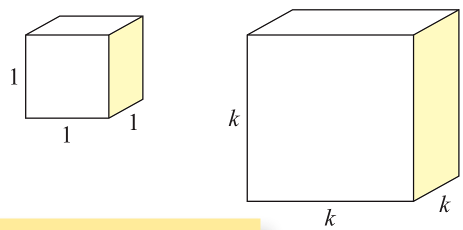
Méadú agus toirt

1 aonad amháin ar fad atá an slios ar an gciúb is lú ar dheis.

Toirt $= 1 \times 1 \times 1 = 1$ aonad ciúbach

Méadaítear an ciúb faoi fhachtóir scála k.

Toirt an chiúib mhéadaithe $k \times k \times k = k^3$ aonad ciúbach

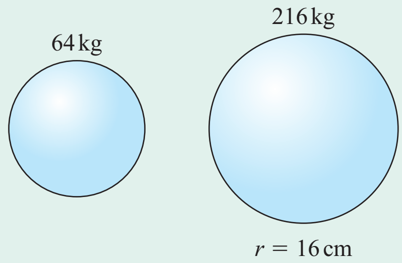


Cóimheas toirteanna

Más de réir fhachtóir scála k a mhéadaítear fíor, méadaítear toirt na fíorach méadaithe faoi fhachtóir scála k^3.

Sampla 4

Is den ábhar céanna atá dhá sféar chomhchosúla déanta. Mais 64 kg atá sa cheann is lú agus mais 216 kg atá sa cheann is mó.



Más 16 cm, atá i nga an sféir is mó, faigh ga an sféir is lú.
[Glac leis gurb ionann cóimheas na maiseanna agus cóimheas na dtoirteanna.]

T&T4.indb 170 10/07/2018 17:46:43

Más é k fachtóir scála an mhéadaithe.

Toirt an sféir is mó $= k^3$ (toirt an sféir is lú)

$$\Rightarrow \quad 216 = k^3(64)$$

$$\Rightarrow \quad k^3 = \frac{216}{64} \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt[3]{\frac{216}{64}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Ga an sféir is mó $= k$ (ga an sféir is lú)

Más é r ga an sféir is lú.

$$\Rightarrow \quad 16 = k(r)$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{3}{2}r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}r = 16 \quad \Rightarrow \quad 3r = 32 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{32}{3}\text{ cm}$$

$\therefore$ ga an sféir is lú $= 10\frac{2}{3}$ cm

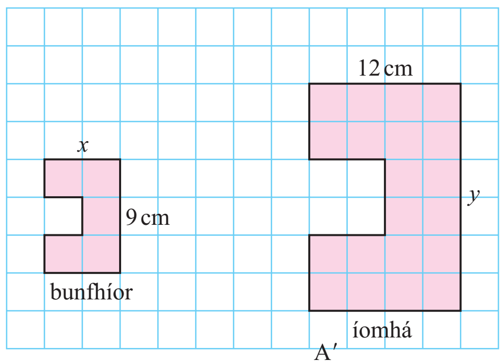
Cleachtadh 6.1

1. Tá fíor agus a méadú sa léaráid ar dheis.

(i) Bain úsáid as an ngreille chun fachtóir scála an mhéadaithe a fháil.

(ii) Tugtar faid dhá shlios. Faigh faid na sleasa x agus y.

(iii) Más é k fachtóir scála an mhéadaithe, fíoraigh gurb ionann achar na fíorach méadaithe agus k^2 iolraithe faoin mbunfhíor.

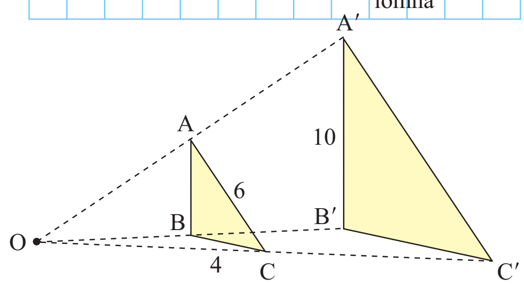


2. Íomhá an triantáin ABC faoi mhéadú is ea an triantán A′B′C′ ar dheis, áit arb é O lárphointe an mhéadaithe agus 2 an fachtóir scála.

Má tá $|BC| = 4$, $|AC| = 6$ agus $|A'B'| = 10$, faigh

(i) $|B'C'|$ (ii) $|A'C'|$ (iii) $|AB|$.

Más é 30 aonad cearnach achar $\triangle A'B'C'$, faigh achar an triantáin ABC.



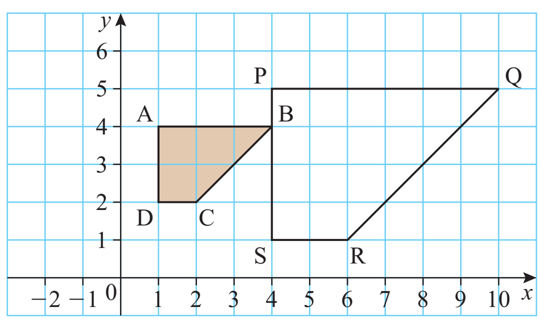
3. An fhíor ABCD agus a méadú PQRS atá sa léaráid thall.

(i) Úsáid an ghreille chun fachtóir scála an mhéadaithe a fháil.

(ii) Déan cur síos ar an gcaoi le lárphointe an mhéadaithe a fháil.

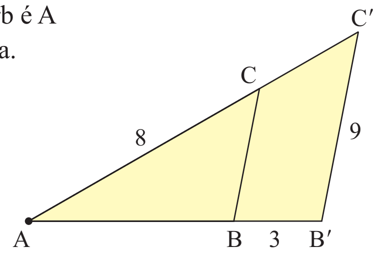
(iii) Úsáid rialóir le comhordanáidí lárphointe an mhéadaithe a fháil.

(iv) Más é 30 aonad cearnach achar ABCD, faigh achar PQRS.

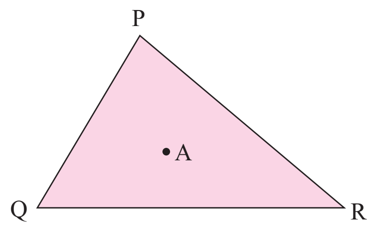


4. Is méadú é an triantán $AB'C'$ ar an triantán ABC, áit arb é A lárphointe an mhéadaithe agus arb é $1\frac{1}{2}$ an fachtóir scála.
Má tá $|AC| = 8$, $|B'C'| = 9$ agus $|BB'| = 3$, faigh
(i) $|AC'|$ (ii) $|BC|$ (iii) $|AB|$.

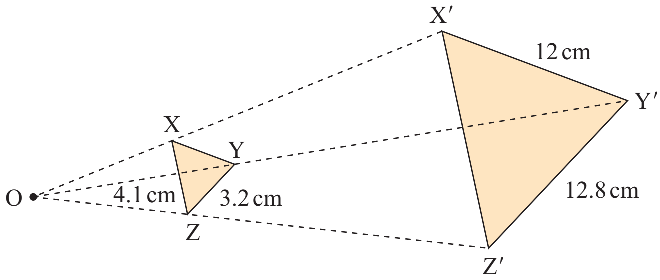
Má tá achar $\triangle ABC = 20$ aonad cearnach, faigh achar $\triangle AB'C'$.



5. Déan cóip den triantán PQR thall.
Anois tarraing méadú ar an triantán agus lárphointe A agus fachtóir scála 2 agat.

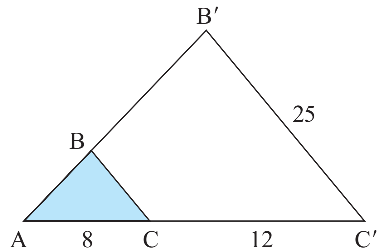


6. Íomhá an triantáin XYZ faoi mhéadú is ea an triantán $X'Y'Z'$, áit arb é O lárphointe an mhéadaithe.

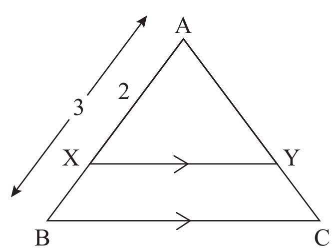


$|YZ| = 3.2$ cm, $|XZ| = 4.1$ cm, $|X'Y'| = 12$ cm agus $|Y'Z'| = 12.8$ cm.
Faigh (i) fachtóir scála an mhéadaithe.
(ii) $|X'Z'|$
(iii) $|XY|$
(iv) an cóimheas $|OZ| : |ZZ'|$
(v) achar an triantáin XYZ más é 64 cm^2 achar an triantáin $X'Y'Z'$.

7. Méadú ar an triantán ABC is ea $AB'C'$ sa léaráid ar dheis, áit arb é A lárphointe an mhéadaithe.
Má tá $|AC| = 8$, $|CC'| = 12$ agus $|B'C'| = 25$, faigh
(i) fachtóir scála an mhéadaithe
(ii) $|BC|$ (iii) an cóimheas $|AB| : |AB'|$
(iv) achar $\triangle AB'C'$ má tá achar $\triangle ABC$ cothrom le 16 aonad chearnacha.



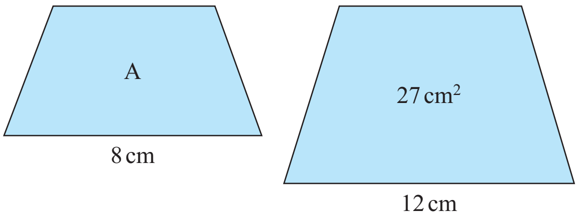
8. I gcás an triantáin ABC, $XY \| BC$ agus $\dfrac{|AB|}{|AX|} = \dfrac{3}{2}$.
Más é 4 cm^2 achar an triantáin AXY faigh achar an triantáin ABC.



9. Déantar dearadh a réiteach do mhósáic. Tá achar 176 cm^2 sa dearadh.
Méadú ar an dearadh is ea an mhósáic féin agus is é 2.5 an fachtóir scála.
Cad é achar na mósáice féin?

10. Má theastaíonn uait grianghraf a mhéadú sa chaoi is go mbeidh a achar iolraithe faoi 4, cén fachtóir scála ba chóir duit a úsáid?
Cén fachtóir scála ba chóir duit a úsáid má theastaíonn uait an t-achar a dhúbailt?

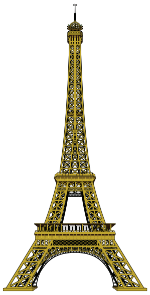
11. Tá na cruthanna ar dheis comhchosúil.
Faigh achar chruth A.



12. Rinneadh an léaráid seo ar dheis a laghdú ar ghléas fótachóipeála go $\frac{2}{3}$ dá bunmhéid.

(i) Más é 156 mm airde na bunléaráide, cén airde a bheidh sa léaráid laghdaithe?
(ii) Más é 28 mm airde an lipéid ar an léaráid laghdaithe, faigh airde an lipéid ar an mbunléaráid.

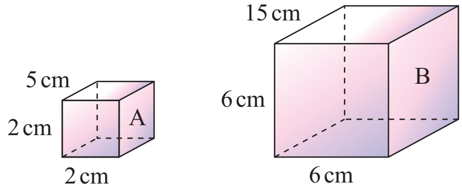
13. Tá Túr Eiffel 300 m ar airde.
Tá samhail de Thúr Eiffel 15 cm ar airde agus is 25.5 cm^2 atá in achar a bhoinn.
Cén t-achar atá i mbonn an túir féin?



14. Tarraingítear plean de ghairdín beag de réir scála 1 : 25.
(i) Clúdaíonn lochán 24 cm^2 den phlean.
Cad é achar an locháin féin, ina m^2?
(ii) 17 m^2 den ghairdín féin atá clúdaithe le féar.
Cén t-achar a chlúdófar le féar ar an bplean? Tabhair do fhreagra ina cm^2.

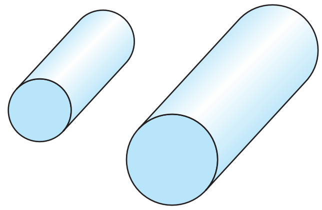
15. Is é 1 : 1000 an scála ar léarscáil.
Déanann Áine an léarscáil a mhéadú de réir fhachtóir scála 2.
(i) Cad é an scála ar an léarscáil mhéadaithe?
(ii) Tá sráid Áine 6 cm ar fad ar an mbunléarscáil.
Cad é fad iarbhír na sráide?
Tabhair do fhreagra ina mhéadair.
Glacann Seán bunléarscáil Áine ar iasacht uaithi agus méadaíonn sé í de réir fhachtóir scála $\frac{1}{2}$.
(iii) Cad é an scála ar léarscáil mhéadaithe Sheáin?
(iv) Má tá 1 km idir dhá stáisiún traenach, cá fhad atá siad óna chéile ar léarscáil mhéadaithe Sheáin?

16. Is méadú é bosca B ar bhosca A sa léaráid thall.
(i) Scríobh síos luach k, fachtóir scála an mhéadaithe.
(ii) Cad é an gaol idir k agus an fachtóir scála maidir leis an toirt?

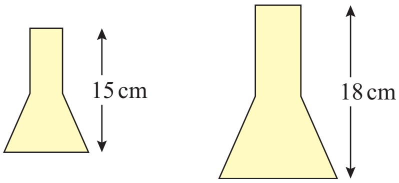


17. Déanann dealbhóir samhail chré ar scála beag de dhealbh atá beartaithe aici.
Tá an tsamhail 40 cm ar airde. Beidh an dealbh dheiridh 100 cm ar airde.
(i) Cad é fachtóir scála an mhéadaithe?
(ii) Cad é an fachtóir scála maidir le toirt na deilbhe?
(iii) 240 cm^3 atá i dtoirt na samhla.
Cén toirt a bheidh sa dealbh dheiridh?

18. Tá dhá shorcóir chomhchosúla le feiceáil sa léaráid.
Ga an tsorcóra is lú, is ionann é agus leath gha an tsorcóra is mó.
200 cm^3 atá i dtoirt an tsorcóra is lú.
Faigh toirt an tsorcóra is mó.



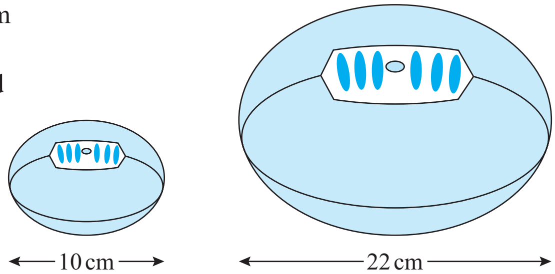
19. Tá dhá bhuidéal seampú le feiceáil sa léaráid. Tá na buidéil comhchosúil lena chéile ó thaobh na matamaitice de.
Is féidir 400 ml de sheampú a chur sa bhuidéal is lú acu.
Ríomh cé mhéad seampú is féidir a chur sa bhuidéal is mó.
Tabhair do fhreagra ina ml, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.



20. Díoltar piseanna i gcannaí de dhá mhéid éagsúla, 300 g agus 400 g. Tá na cannaí comhchosúil lena chéile ó thaobh na matamaitice de.
Má tá an canna beag 10 cm ar airde, ríomh airde an channa mhóir, ceart go dtí an cm is gaire.

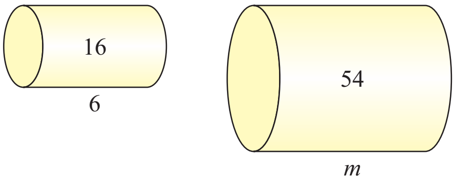
21. 5 cm^2 agus 45 cm^2 faoi seach atá in achair dromchla dhá dhlúthsféar, agus 2 kg atá i mais an sféir is lú.
Faigh mais an sféir is mó.

22. Tá liathróid rugbaí atá oiriúnach do pháiste 10 cm ar fad agus tá 200 cm^3 ina toirt.
Ó thaobh crutha de, tá sí comhchosúil le liathróid lánmhéide. Tá liathróid lánmhéide 22 cm ar fad.
Faigh toirt na liathróide lánmhéide.

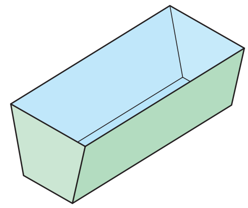


23. Tá linn ornáideach 8 m ar leithead agus tá 50 m^3 d’uisce ann.
Cé mhéad uisce is féidir a chur i samhail den lochán atá 20 cm ar leithead?
Tabhair do fhreagra ina cm^3.

24. Tá an dá shorcóir ar dheis comhchosúil lena chéile ó thaobh crutha de. 16 aonad chiúbacha atá i dtoirt an tsorcóra ar chlé agus 54 aonad ciúbach atá i dtoirt an tsorcóra ar dheis, mar atá le feiceáil.
Faigh luach m, fad an tsorcóra is mó.



25. Samhail d'umar uisce atá sa léaráid ar dheis.
Nuair a bhíonn an tsamhail lán is é 400 cm^2 achar dromchla an uisce a bhíonn istigh ann. 1.2 m^2 atá in achar dromchla an umair féin agus é lán.
Is féidir 0.1 m^3 uisce a choinneáil san umar féin.
Cé mhéad uisce is féidir a choinneáil sa tsamhail?
Tabhair do fhreagra ina cm^3, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.



26. Tháinig grúpa a bhí ag tochailt san fhásach ar dhealbh a bhí 40 cm ar airde agus a raibh toirt 12,000 cm^3 inti. D'ór ar fad a bhí an dealbh déanta. Bhí ochtar sa ghrúpa agus mar sin leáigh siad an dealbh agus rinne macasamhla beaga di don uile dhuine acu ón ór. Baineadh úsáid as gach pioc den ór.
Cén airde a bhí sna macasamhla?

Mír 6.2 Tógálacha

Sa staidéar a rinne tú ar thógálacha don Teastas Sóisearach d'fhoghlaim tú:

- conas mírlíne a dhéroinnt
- conas uillinn a dhéroinnt
- conas triantáin éagsúla a thógáil
- conas línte comhthreomhara agus ingearacha a tharraingt.

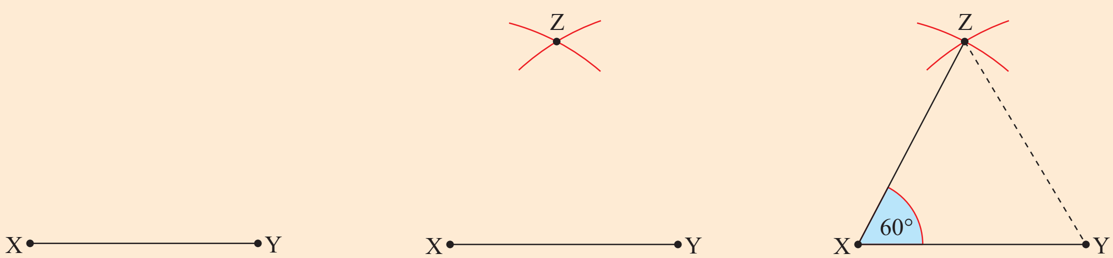
Sa mhír seo beimid ag plé le 6 thógáil nua atá ar an gcúrsa Ardteistiméireachta agus leis an gcaoi a n-úsáidtear na tógálacha sin sa ghnáthshaol. Beidh compás, rialóir agus uillinntomhas de dhíth ort chun na tógálacha seo a dhéanamh.

Nuair a úsáideann tú compás ní mór duit stuanna na tógála a fhágáil mar fhianaise gur úsáid tú an modh ceart.

1. Uillinn 60° a thógáil

60° atá i ngach uillinn i dtriantán comhshleasach. Bainfimid úsáid as an eolas sin chun uillinn 60° a tharraingt.

Ar thriantán comhshleasach, is ar comhfhad atá na sleasa.



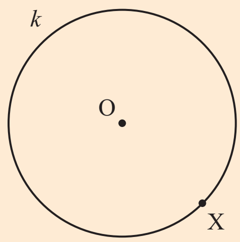
Tarraing mírlíne [XY].

Socraigh $|XY|$ mar gha ar an gcompás. Agus X mar lárphointe agus $|XY|$ mar gha, tarraing stua. Déan seo arís ag Y. Buaileann na stuanna le chéile ag Z.

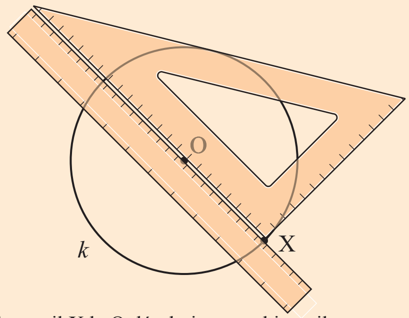
Ceangail XZ.
Tá $|\angle ZXY| = 60°$.

Is triantán comhshleasach é an triantán XYZ.

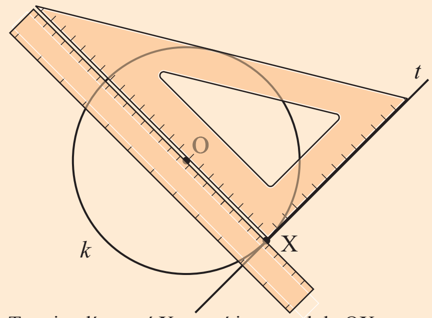
2. Tadhlaí a thógáil ag pointe áirithe ar an gciorcal



Pointe ar an gciorcal *k* is ea X. Is é O lárphointe an chiorcail.



Ceangail X le O, lárphointe an chiorcail. Leag rialóir feadh OX agus sleamhnaigh an dronbhacart feadh imeall an rialóra go sroicheann sé an pointe X.

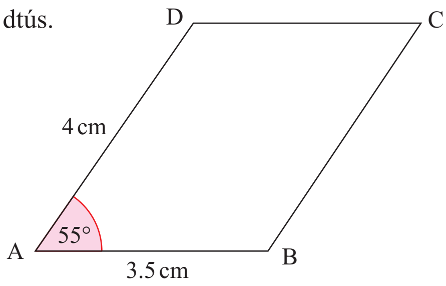


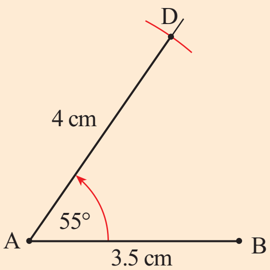
Tarraing líne t trí X agus í ingearach le OX. Is tadhlaí é *t* leis an gciorcal *k*.

3. Comhthreomharán a thógáil, agus faid na sleasa agus méideanna na n-uillinneacha ar eolas agat

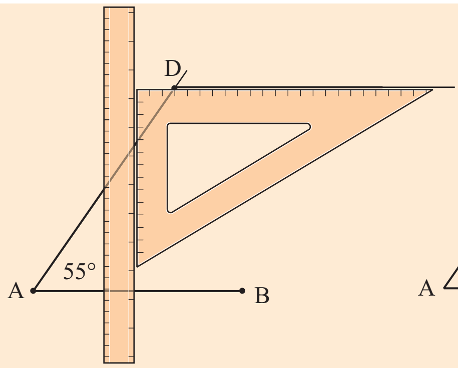
Léiríonn na treoracha thíos conas comhthreomharán ABCD a thógáil, áit a bhfuil $|AB| = 3.5$ cm, $|AD| = 4$ cm agus $|\angle DAB| = 55°$.

Déanaimid sceitse garbh de ABCD ar dtús.

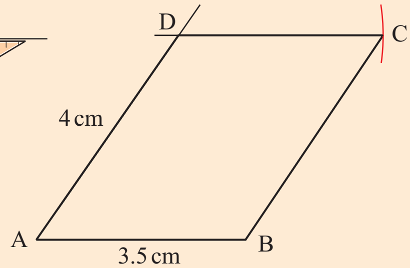




Tarraing líne chothrománach $[AB] = 3.5$ cm. Úsáid uillinntomhas chun uillinn 55° a thomhas ag A. Tarraing líne trí A agus bíodh $|AD| = 4$ cm.

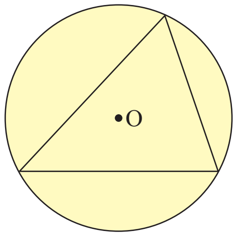


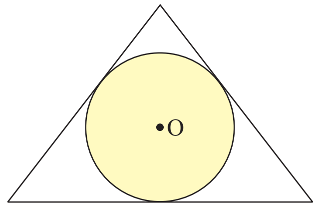
Leag dronbhacart feadh na líne AB. Úsáid rialóir agus sleamhnaigh an dronbhacart feadh imeall an rialóra go sroicheann sé an pointe D. Tarraing líne trí D comhthreomhar le AB.



Úsáid compás le ga 3.5 cm (mar an gcéanna le $|AB|$) chun stua a tharraingt ar an líne. Tá $|DC| = 3.5$ cm. Ceangail BC. Is é ABCD an comhthreomharán a theastaíonn.

Ciorcail agus triantáin





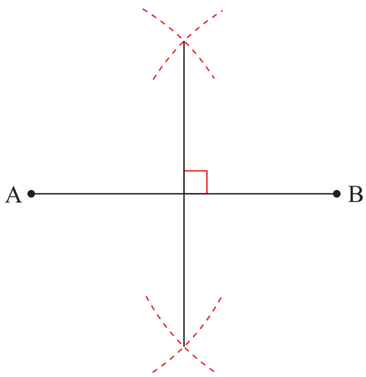
Is é is **imchiorcal** triantáin ann ná ciorcal a théann trí na trí rinn, mar a thugtar thuas. **Imlár** an triantáin a thugtar ar O, lárphointe an chiorcail sin.

Is é is **inchiorcal** triantáin ann ná ciorcal atá iniata i dtriantán sa chaoi go bhfuil gach ceann de na trí shlios ag bualadh le himlíne an chiorcail. **Ionlár** an triantáin a thugtar ar lárphointe an inchiorcail. Is é O an t-ionlár san fhíor thuas.

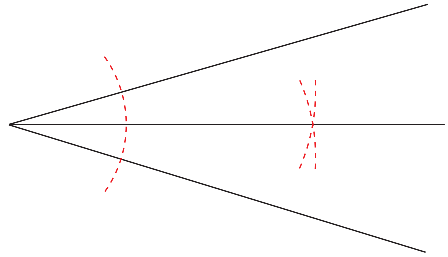
Agus inchiorcal triantáin á thógáil agat beidh dhá thógáil a bhfuil staidéar déanta agat orthu cheana do scrúdú an Teastais Shóisearaigh i gceist.

Cabhróidh na léaráidí thíos leat na céimeanna a bhaineann leis na tógálacha sin a thabhairt chun cuimhne.

Déroinnteoir ingearach mírlíne

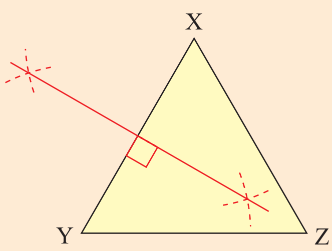


Déroinnteoir uillinne

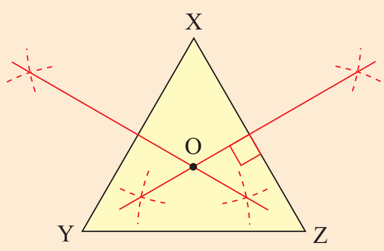


Ba chóir duit cleachtadh a dhéanamh ar na tógálacha sin sula dtugann tú iarracht ar imchiorcal agus inchiorcal triantáin a tharraingt.

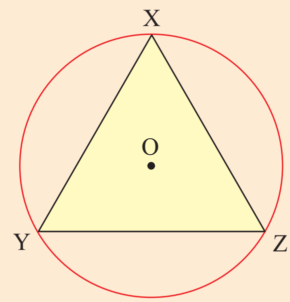
4. Imchiorcal triantáin a thógáil



Tóg déroinnteoir ingearach [XY].



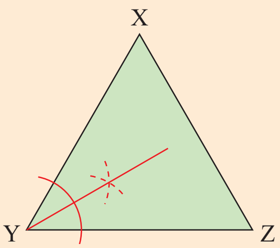
Tóg déroinnteoir ingearach [XZ]. Buaileann an dá dhéroinnteoir le chéile ag an bpointe O, mar a léirítear. Is é O an t-imlár.



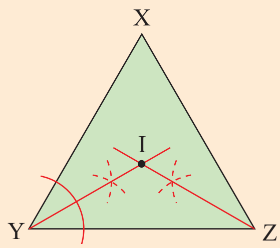
Is é O an lárphointe agus is é $|OX|$ an ga. Tarraing ciorcal trí X, Y agus Z. Is é sin imchiorcal an triantáin.

5. Inchiorcal triantáin a thógáil

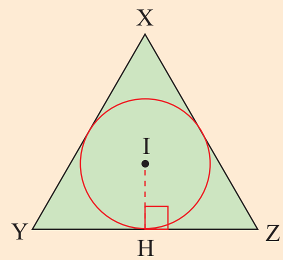
Agus inchiorcal triantáin á thógáil agat beidh ort déroinnteoir uillinne a thógáil, rud atá léirithe ar an leathanach roimhe seo.



Tóg déroinnteoir ∠XYZ, mar atá léirithe.



Ansin tóg déroinnteoir ∠XZY. Buaileann an dá dhéroinnteoir le chéile ag an bpointe I. Is é I an t-ionlár.

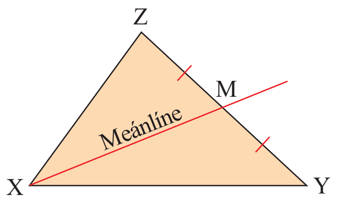


Úsáid dronbhacart chun ingear a tharraingt ó I go dtí an líne YZ. Buaileann an t-ingear le YZ ag H. Agus |IH| mar gha, tarraing ciorcal a bhuailfidh leis na trí shlios. Is é seo inchiorcal an triantáin XYZ.

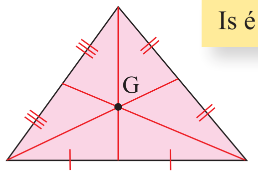
6. Meánlár triantáin a thógáil

Meánlíne a thugtar ar an mírlíne a cheanglaíonn rinn triantáin le lárphointe an tsleasa urchomhairigh.

Is meánlíne é [XM] sa triantán thíos.



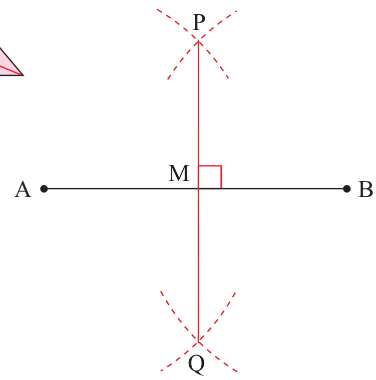
An **meánlár** a thugtar ar phointe trasnaithe na dtrí mheánlíne i dtriantán.



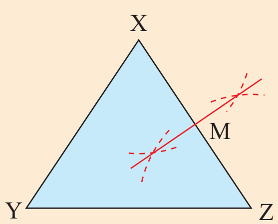
Is é G an meánlár.

Chun lárphointe mírlíne ar bith a fháil, ní mór déroinnteoir ingearach na mírlíne sin a thógáil.

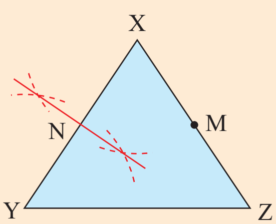
Cabhróidh an léaráid ar dheis leat na céimeanna a bhaineann leis an tógáil seo a thabhairt chun cuimhne.



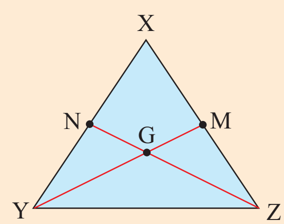
Léiríonn na trí léaráid thíos na céimeanna a bheidh le tabhairt le meánlár a thógáil i dtriantán.



Tóg déroinnteoir ingearach [XZ], mar a léirítear. Is é M lárphointe [XZ].



Ansin tóg déroinnteoir ingearach [XY]. Is é N lárphointe [XY].



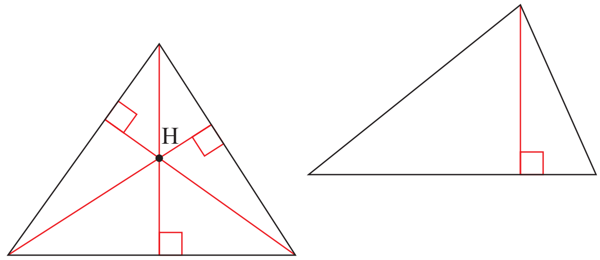
Ceangail YM agus ZN. Buaileann siad le chéile ag an bpointe G. Is é G meánlár an triantáin.

7. Ingearlár triantáin a thógáil

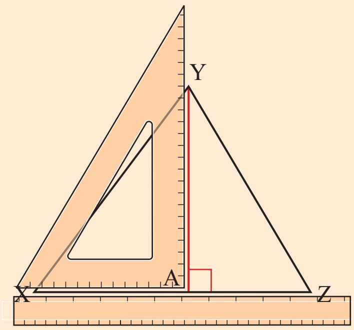
I gcás gach ceann de na trí rinn ar thriantán, tarraing mírlíne ingearach go dtí an slios urchomhaireach léi.

An t-ingearlár a thugtar ar phointe trasnaithe na dtrí mhírlíne ingearacha i dtriantán.

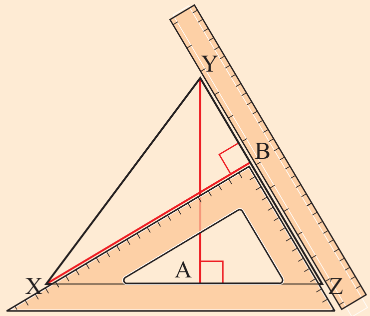
An t-ingearlár a thugtar ar an bpointe H.



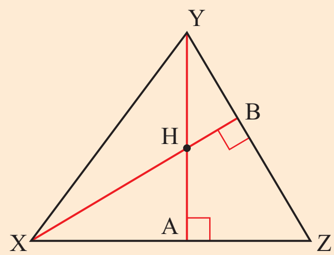
Léiríonn na trí léaráid thíos na céimeanna a bheidh le tabhairt le hingearlár a thógáil i dtriantán.



Leag rialóir feadh XZ agus úsáid dronbhacart chun an líne YA a tharraingt ingearach le XZ.



Úsáid an rialóir agus an dronbhacart chun an líne XB a tharraingt ingearach le YZ.



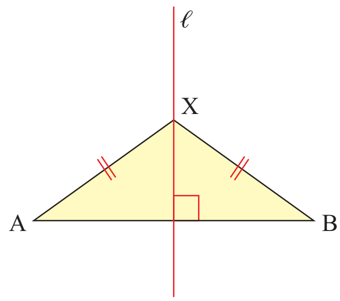
Buaileann na línte YA agus XB le chéile ag an bpointe H. Is é H ingearlár an triantáin.

Feidhmeanna na dtógálacha sin

Sa léaráid ar dheis, is é an líne ℓ déroinnteoir ingearach [AB].

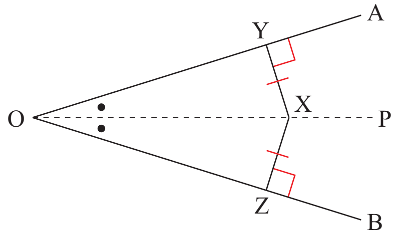
Tá gach pointe ar an déroinnteoir sin ar comhfhad ó A agus B.

Dá réir sin, tá $|AX| = |XB|$.

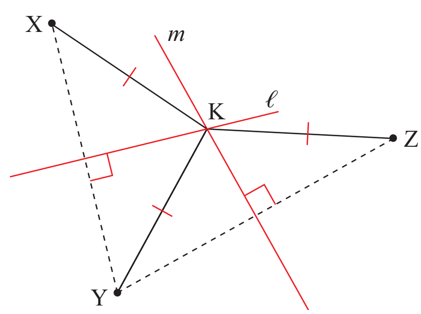


Is é OP déroinnteoir $\angle AOB$.

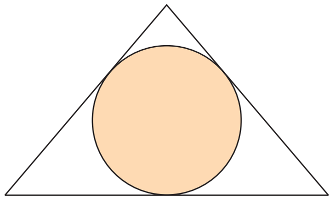
Tá gach pointe ar an déroinnteoir sin ar comhfhad ó dhá shlios na huillinne. $|XY| = |XZ|$.



Tóg trí phointe X, Y agus Z.
Conas a aimsímid pointe atá ar comhfhad ó gach ceann de na trí phointe sin?
Tóg déroinnteoirí ingearacha na línte [XY] agus [YZ].
Tabhair ℓ agus m ar na línte sin.
Tá gach pointe ar ℓ ar comhfhad ó X agus Y.
Tá gach pointe ar m ar comhfhad ó Y agus Z.
Trasnaíonn na línte ℓ agus m a chéile ag K.
Tá K ar comhfhad ó X, Y agus Z.

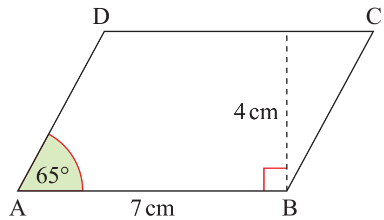


An ciorcal is mó is féidir a tharraingt taobh istigh de thriantán ná an t-inchiorcal, is é sin, an ciorcal a theagmhaíonn le gach ceann de na trí shlios.



Cleachtadh 6.2

1. (i) Is é atá sa léaráid ar dheis ná sceitse garbh den chomhthreomharán ABCD.
Más é 4 cm an airde ingearach, tóg an comhthreomharán.



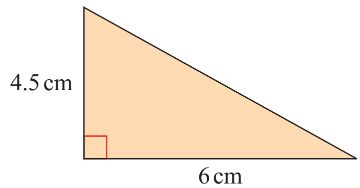
(ii) Tarraing na trasnáin [AC] agus [BD].
An bhfíoraíonn an tógáil a rinne tú go ndéroinneann na trasnáin a chéile?

(iii) Anois cruthaigh go ndéroinneann an trasnán [AC] an trasnán [BD].

2. Tarraing an comhthreomharán ABCD ar a bhfuil an bonn $[AB] = 4.5$ cm, $|BC| = 3$ cm agus $|AC| = 6$ cm. Tomhais $\angle ABC$.

3. Tarraing triantán a bhfuil sleasa 6 cm, 5 cm agus 4 cm air. Anois, tóg imchiorcal an triantáin. Léirigh na línte tógála uile.

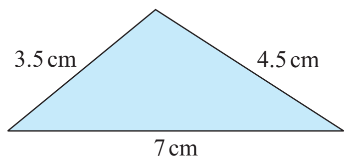
4. Tarraing an triantán dronuilleach a thugtar ar dheis.
Tóg imchiorcal an triantáin.
Cad a thugann tú faoi deara faoi imlár an triantáin?



Tarraing triantán dronuilleach ar bith eile agus tóg an t-imchiorcal.

An bhfuair tú an toradh céanna a fuair tú leis an gcéad triantán?
Cén tátal is féidir leat a bhaint maidir le himlár triantáin dronuilligh?

5. Sceitse garbh de thriantán atá sa léaráid ar dheis.
7 cm, 4.5 cm agus 3.5 cm ar fad atá sleasa an triantáin.

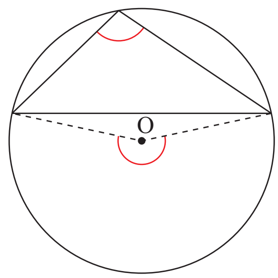


Tarraing léaráid chruinn den triantán agus tóg imchiorcal an triantáin.

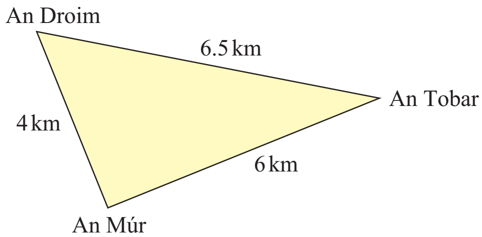
Má tá an tarraingt agus an tógáil déanta go cruinn agat, feicfidh tú go bhfuil lár an imchiorcail taobh amuigh den triantán.

Cén ceangal atá idir an saghas triantáin atá tarraingthe agat agus an áit a bhfuil an t-imlár?

Bain úsáid as an léaráid ar dheis le míniú cén fáth ar taobh amuigh den triantán a bhíonn imlár triantáin mhaoluilligh i gcónaí.



6. Trí shráidbhaile atá sa léaráid thíos; an Droim, an Múr agus an Tobar.
Tugtar na faid atá idir na sráidbhailte thíos.

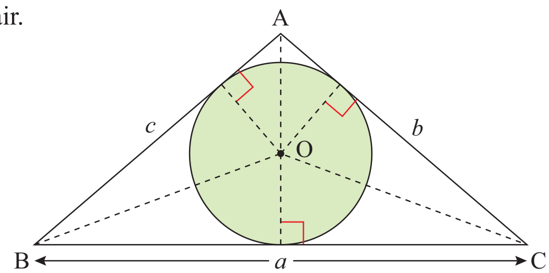


Bain úsáid as an scála 1 cm = 1 km, agus tarraing líníocht chruinn den léaráid thuas.
Tá sé beartaithe scoil a thógáil a bheidh ar comhfhad ó gach ceann de na trí shráidbhaile.
Léirigh ar do líníocht an áit a dtógfar an scoil.

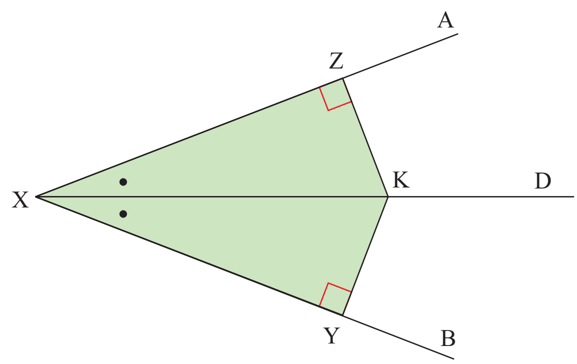
7. Gan ach compás agus rialóir in úsáid agat, tóg uillinn 60°.

8. Tarraing triantán a bhfuil sleasa 6.5 cm, 5 cm agus 4 cm air.
Bain úsáid as déroinnteoirí dhá uillinn ar bith den triantán le lárphointe an inchiorcail a fháil.
Tarraing an t-inchiorcal.

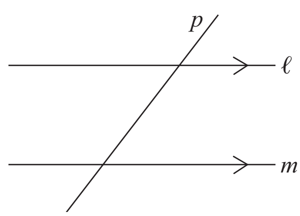
9. Is triantán é ABC. a, b agus c, ar fad atá na sleasa air.
Baineann ga r agus lárphointe O leis an inchiorcal.
(i) Scríobh achar $\triangle$BOC i dtéarmaí a agus r.
(ii) Léirigh, dá réir sin, gurb é achar $\triangle$ABC
$\frac{1}{2}r\,(a + b + c)$.



10. Is é an líne XD déroinnteoir $\angle$AXB.
Is pointe ar XD é K, tá KZ $\perp$ AX agus
KY $\perp$ XB.
Léirigh gur triantáin iomchuí
iad XKZ agus XKY
Léirigh, dá réir sin, go bhfuil $|KZ| = |KY|$.
Cén tátal is féidir leat a bhaint maidir le
pointe ar bith ar dhéroinnteoir uillinne?

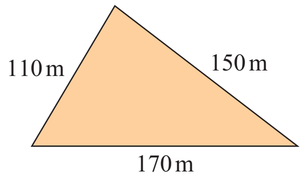


11. Sa léaráid ar dheis, is traslíne é p atá ag trasnú dhá líne
chomhthreomhara ℓ agus m.
Tarraing sceitse garbh chun suíomhanna na bpointí
X agus Y a thaispeáint, más ar comhfhad
ó na trí líne atá X agus Y.



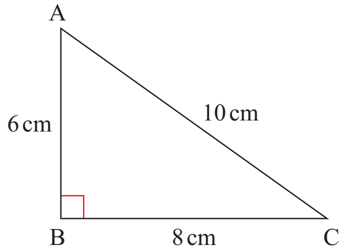
12. Cruth triantáin atá ar láithreán campála agus tá bóithre gnóthacha ag rith feadh gach ceann de thrí thaobh an láithreáin.
Tá taobhanna an láithreáin 110 m, 150 m agus 170 m ar fad.

(i) Agus scála 20 m = 1 cm in úsáid agat, tarraing léaráid de réir scála den láithreán.
(ii) Marcáil ar an léaráid an áit is fearr le puball a chur sa chaoi is go mbeidh sé chomh fada agus is féidir ó gach ceann de na trí bhóthar.



13. Triantán dronuilleach é ABC, mar atá léirithe ar dheis.

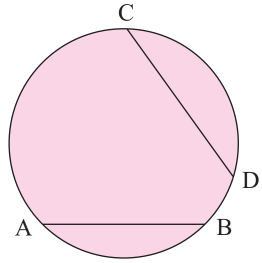
(i) Scríobh síos ga an imchiorcail gan é a tharraingt agus a thomhas.
(ii) Mínigh cén fáth arb é an pointe B ingearlár △ABC.



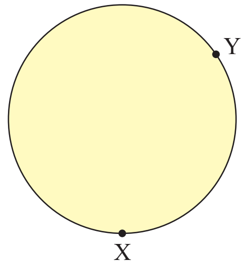
14. Tarraing triantán maoluilleach ar bith.
Anois tóg ingearlár an triantáin.
An taobh istigh nó taobh amuigh den triantán atá an t-ingearlár?
An fíor an toradh sin i gcás gach triantáin mhaoluilligh? Mínigh an fáth.

15. Tarraing ciorcal dar ga 3 cm agus marcáil an lárphointe O. Marcáil pointe X ar an gciorcal. Ansin bain úsáid as rialóir agus as dronbhacart chun tadhlaí leis an gciorcal a tharraingt ag an bpointe X.

16. San fhíor ar dheis tá ciorcal agus dhá chorda [AB] agus [CD].
Cad is féidir leat a rá faoi dhéroinnteoir ingearach [AB]?
Anois, déan cur síos ar conas is féidir an dá chorda a úsáid chun lárphointe an chiorcail a aimsiú.



17. I gCeist 16 bhaineamar úsáid as dhá chorda chun lárphointe an chiorcail a aimsiú.
Tá ciorcal sa léaráid ar dheis a bhfuil dhá phointe marcáilte air.
Déan cur síos ar shlí eile chun lárphointe an chiorcail a aimsiú agus tú ag úsáid na bpointí X agus Y.



18. Tóg triantán comhshleasach a bhfuil a chuid sleasa 5 cm ar fad.

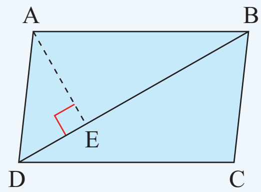
(i) Anois tóg imlár, O, an triantáin.
(ii) Mínigh cén fáth arb é O ionlár an triantáin freisin.

Cuir triail ort féin 6

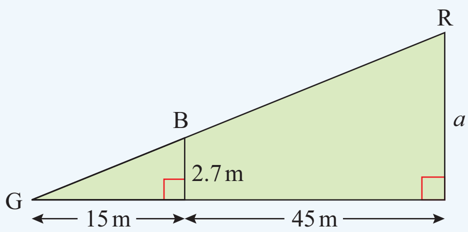
(Súil siar atá sna ceisteanna seo. Clúdaíonn siad Caibidil 3 agus Caibidil 6.)

Ceisteanna A

1. Is é 40 cm^2 achar an chomhthreomharáin ABCD.
Má tá $|DB| = 15$ cm, faigh $|AE|$, áit a bhfuil $AE \perp DB$.

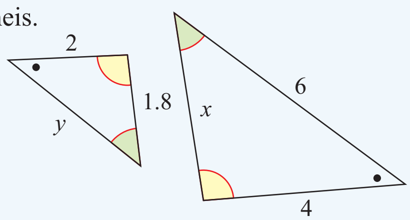


2. Tá radharc ag Gearóid, *G*, ar bharr crann tarchurtha raidió, *R*, os cionn balla, *B*.
Tá Gearóid 15 m ón mballa. Tá an balla 45 m ón gcrann tarchurtha raidió.
Tá an balla 2.7 m ar airde.

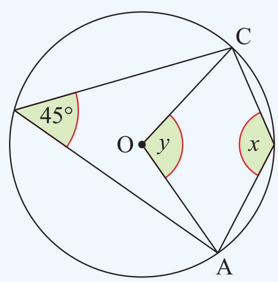


Ríomh airde an chrainn tarchurtha raidió, *a* ar an léaráid.

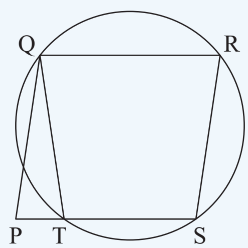
3. Tá na huillinneacha atá ar cóimhéid marcáilte sna triantáin ar dheis.
(i) Mínigh cén fáth a bhfuil an dá thriantán comhchosúil le chéile.
(ii) Faigh luach x agus luach y.



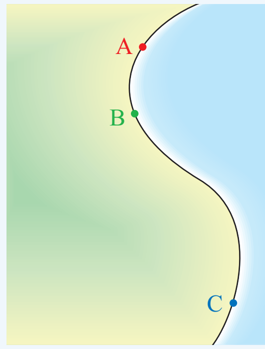
4. Is é O lárphointe an chiorcail ar dheis.
(i) Faigh méid na n-uillinneacha x agus y.
(ii) Tarraingítear ciorcal arb é [AC] a thrastomhas.
Mínigh cén fáth a gcaithfidh an ciorcal sin gabháil trí O.



5. Is comhthreomharán é PQRS san fhíor ar dheis.
Scríobh síos cé acu fíor nó bréagach atá gach ceann díobh seo a leanas. Tabhair fáth le do fhreagra i ngach cás:
(i) $|\angle TQR| + |\angle QRS| = 180°$
(ii) $|\angle PQR| + |\angle RST| = 180°$
(iii) $|\angle QTS| + |\angle QRS| = 180°$
(iv) $|\angle QPS| + |\angle QRS| = 180°$.

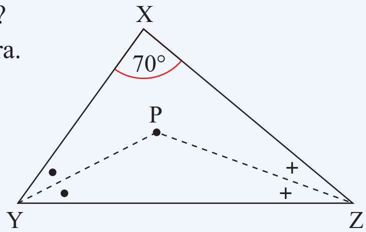


6. (i) Tá triúr, A, B agus C, ar an gcladach agus feiceann siad bád ar an bhfarraige. Tá an bád ar comhfhad ó gach duine den triúr. Déan cur síos ar an gcaoi le suíomh an bháid a aimsiú.



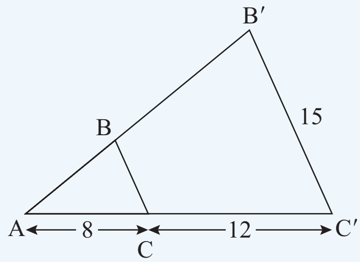
(ii) Sa triantán XYZ thíos, tá na huillinneacha XYZ agus XZY déroinnte.
Má tá $|\angle YXZ| = 70°$, faigh $|\angle YPZ|$.

(iii) An é P an t-ionlár?
Mínigh do fhreagra.

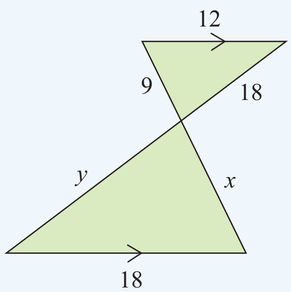


7. Tarraing triantán ar a bhfuil sleasa 5 cm, 6 cm agus 7 cm ar fad.
Anois tóg imchiorcal an triantáin. Bíodh do chuid línte tógála go léir le feiceáil.

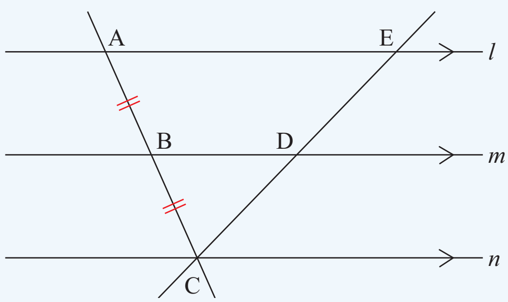
8. San fhíor thall, is méadú ar an triantán ABC é $AB'C'$, áit arb é A lárphointe an mhéadaithe.
Má tá $|AC| = 8$, $|CC'| = 12$ agus $|B'C'| = 15$, faigh
(i) fachtóir scála an mhéadaithe
(ii) $|BC|$
(iii) an cóimheas $|AB| : |AB'|$.



9. Léiríonn na saigheada ar na triantáin ar dheis go bhfuil na línte comhthreomhar lena chéile.
Marcáil isteach na huillinneacha atá ar cóimhéid agus, dá réir sin, úsáid triantáin chomhchosúla chun luach x agus luach y a fháil.



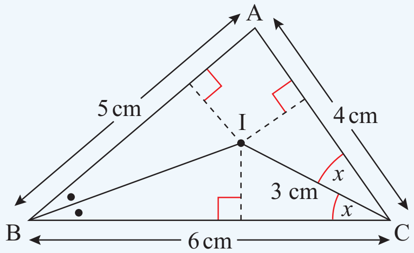
10. Tá na línte l, m agus n comhthreomhar lena chéile sa léaráid thíos.



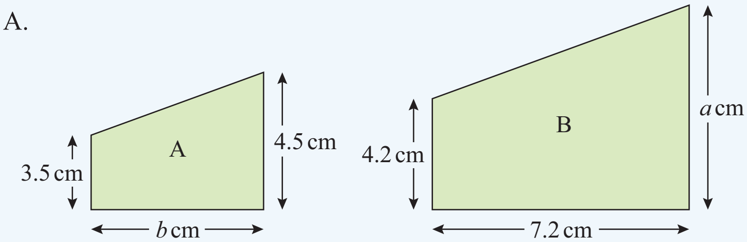
(i) Má tá $|AB| = |BC| = 7$ cm agus $|CD| = 8$ cm, faigh $|DE|$.
(ii) Má tá $|AE| = 12$ cm, faigh $|BD|$.

Ceisteanna B

1. Is é I ionlár an triantáin ABC ar dheis, agus 3 cm atá i nga an inchiorcail.
Cad é achar △BIC?
Bunaithe air sin faigh achar △ABC.

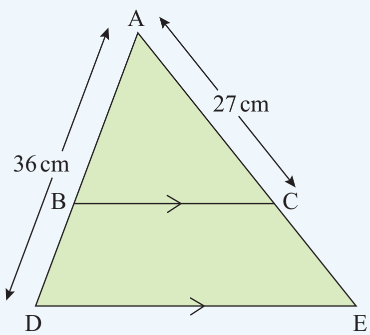


2. Tá cruth B comhchosúil le cruth A.
(i) Céard é fachtóir scála an mhéadaithe?
(ii) Faigh a agus b.

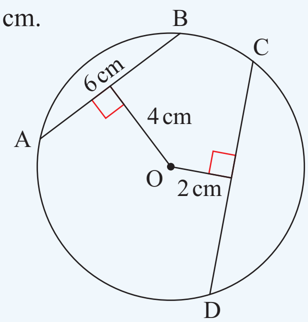


3. Tá BC comhthreomhar le DE.
Tá |AB| dhá oiread chomh fada le |BD|.
|AD| = 36 cm agus |AC| = 27 cm.

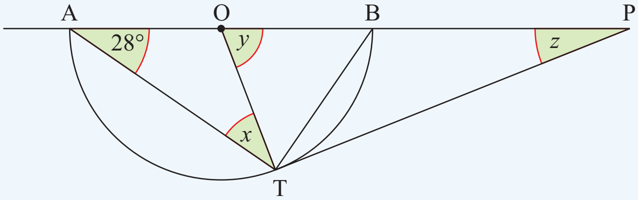
(i) Ríomh fad [AB].
(ii) Ríomh fad [AE].



4. Is é O lárphointe an chiorcail ar dheis agus tá |AB| = 6 cm.
4 cm an fad atá idir O agus AB agus 2 cm an fad atá idir O agus CD.
Faigh fad an chorda [CD].



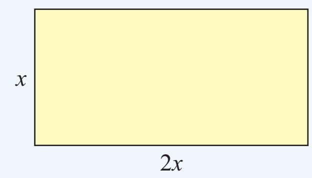
5. Tadhlaí leis an leathchiorcal dar lárphointe O is ea [PT]. Líne dhíreach é AOBP.



Má tá |∠TAO| = 28°, faigh luach x, y agus z.

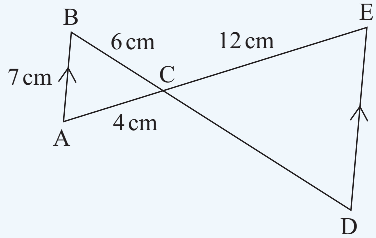
6. (i) 20 cm^2 atá in achar dromchla liathróide dar ga r cm.
Faigh, i dtéarmaí r, ga liathróide arb é 500 cm^2 achar a dromchla.

(ii) Is ionann fad dronuilleoige agus dhá oiread a leithid.
25 cm ar fad atá trasnán de chuid na dronuilleoige.
Ríomh achar na dronuilleoige.
Tabhair do fhreagra ina shlánuimhir.

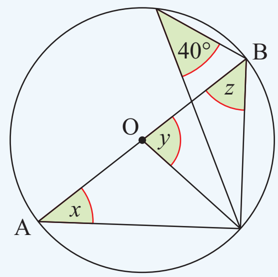


7. San fhíor ar dheis, AB || DE.

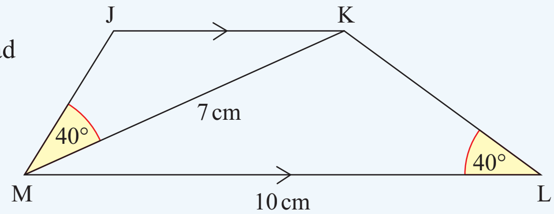
(i) Léirigh gur triantáin chomhchosúla iad ABC agus CDE.
(ii) Má tá $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm agus $|CE| = 12$ cm, faigh $|CD|$.



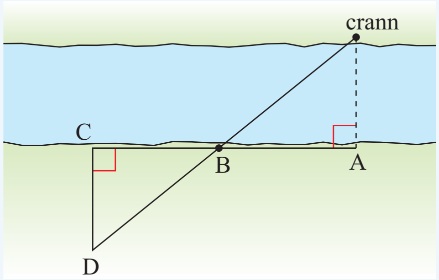
8. Is trastomhas den chiorcal dar lárphointe O é AOB.
Faigh luach x, y agus z.



9. San fhíor ar dheis, JK || ML.
(i) Mínigh cén fáth ar triantáin chomhchosúla iad na triantáin JKM agus KML.
(ii) Faigh fad [JK].



10. Is mian le taiscéalaí meastachán a dhéanamh ar leithead abhann.
Seasann sé in ionad, A, atá díreach os comhair crann atá ag fás ar an mbruach eile. Ansin siúlann sé 50 m feadh bhruach na habhann go dtí B agus cuireann sé cuaille sa talamh. Ansin siúlann sé 50 m eile go C agus casann sé ar dronuillinn leis an abhainn agus siúlann chomh fada leis an bpointe D. Tá an cuaille agus an crann ar aon líne ag an bpointe D. Má tá $|CD| = 80$ m, cén leithead atá san abhainn?



Ceisteanna C

1. Sa chóimheas 2 : 3 atá faid imill dhá chiúb.

(i) Cad é cóimheas

(a) a n-achar dromchla (b) a dtoirteanna?

(ii) Má tá imeall den chiúb is mó 12 cm ar fad, cén fad atá imeall den chiúb is lú?

(iii) Más 54 cm^2 atá in achar iomlán an dromchla ar an gciúb is lú, céard é achar iomlán an dromchla ar an gciúb is mó?

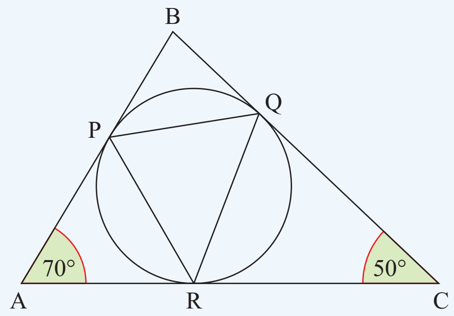
(iv) Más 108 cm^3 é toirt an chiúib is mó, cén toirt atá sa chiúb is lú?

2. Sa léaráid ar dheis, is tadhlaithe leis an gciorcal iad [AB], [BC] agus [CA] ag P, Q agus R faoi seach. Má tá $|\angle BAC| = 70°$ agus $|\angle BCA| = 50°$, faigh

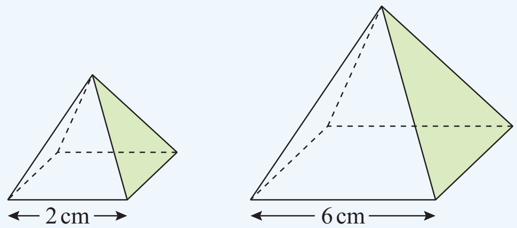
(i) $|\angle PRQ|$

(ii) $|\angle BPQ|$

(iii) $|\angle PQR|$.



3. (i) 2.75 cm^3 an toirt atá i bpirimid chearnógach. 2 cm ar fad atá slios an bhoinn uirthi.



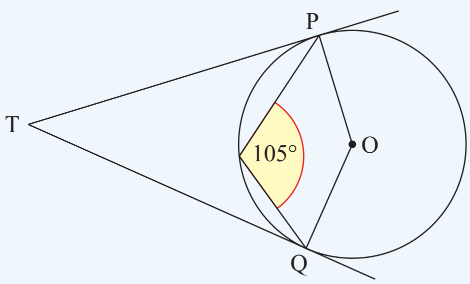
Cén toirt atá i bpirimid chearnógach chomhchosúil a bhfuil slios an bhoinn uirthi 6 cm ar fad?

(ii) Teagmhaíonn na tadhlaithe TP agus TQ leis an gciorcal dar lárphointe O, ag P agus Q.

(a) Faigh $|\angle POQ|$.

(b) Mínigh cén fáth ar ceathairshleasán ciorclach é POQT.

(c) Faigh $|\angle PTQ|$.



4. Corda dar fad 12 cm é [AB]. Baineann ga 8 cm leis an gciorcal, dar lárphointe O, agus is é [AC] an trastomhas. Faigh

(i) an fad idir lárphointe an chiorcail agus an corda [AB],

(ii) fad [BC],

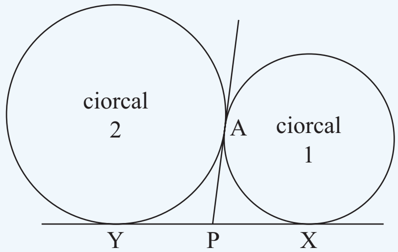
(iii) an fad idir lárphointe an chiorcail agus an corda [BC],

(iv) achar an triantáin ABC.

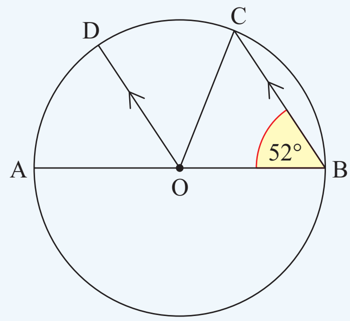
T&T4.indb 187 10/07/2018 17:46:57

5. (i) I gcás dhá chrúiscín chomhchosúla, tá ceann amháin 4 cm ar airde, agus tá an ceann eile 6 cm ar airde. Más 50 cm^3 toilleadh an chrúiscín is lú, faigh toilleadh an chrúiscín is mó.

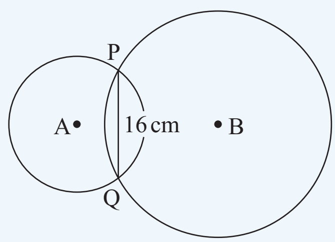
(ii) Cruthaigh
(a) go ndéroinneann an tadhlaí ag A an líne [XY]
(b) $|\angle XAY| = 90°$



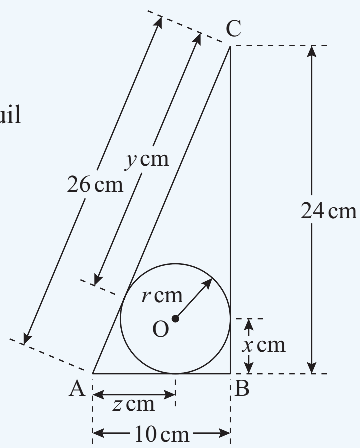
6. (i) Trastomhas ciorcail dar lárphointe O is ea AOB.
$|\angle ABC| = 52°$.
(a) Cruthaigh go ndéroinneann OD $\angle AOC$.
(b) Dá dtarraingeofaí líne ó A go D agus líne ó A go C, céard é méid na huillinne a bheadh in $\angle CAD$?
(c) Cruthaigh go bhfuil OD $\perp$ AC.



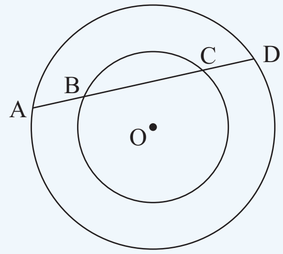
(ii) Tá dhá chiorcal sa léaráid thall. An ceann ar chlé, is é A a lárphointe agus tá a gha 10 cm ar fad. An ceann ar dheis, is é B a lárphointe agus tá a gha 17 cm ar fad. Trasnaíonn an dá chiorcal a chéile ag P agus ag Q, agus tá $|PQ| = 16$ cm.
Cá fhad óna chéile atá lárphointí an dá chiorcal?



7. Tá triantán dronuilleach sa léaráid thall:
(i) Mínigh cén fáth a bhfuil $x + y = 24$.
(ii) Scríobh síos dhá chothromóid cosúil léi sin ina bhfuil x agus z, agus y agus z.
Bunaithe air sin faigh luach x, y agus z.
(iii) Ríomh ga an chiorcail inscríofa.



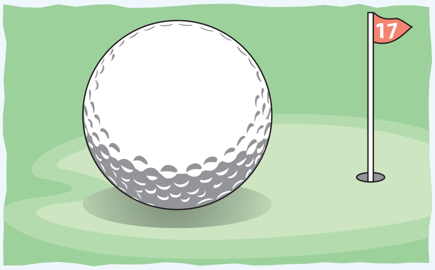
8. (i) Tá dhá chiorcal chomhlárnacha (an lárphointe céanna acu) ar dheis. 6 cm agus 10 cm ar fad atá a ngathanna. Trasnaíonn an líne ABCD an chéad chiorcal ag B agus C agus trasnaíonn sí an dara ciorcal ag A agus D.
Má tá $|BC| = 8$ cm, léirigh go bhfuil $|AB| = 4(\sqrt{5} - 1)$ cm.



(ii) Baintear úsáid as fachtóir scála k chun cearnóg dar ga 25 cm^2 a mhéadú.
Faigh an fachtóir scála k má bhaineann an luach uimhriúil céanna le hachar na cearnóige méadaithe ina cm^2 agus a bhaineann le himlíne na cearnóige méadaithe ina cm.

9. (i) Ga boinn 6 cm agus 8 cm faoi seach atá ar dhá channa shorcóireacha chomhchosúla.
Más 252 cm^3 é toilleadh an channa is mó, faigh toilleadh an channa is lú.

(ii) Déantar liathróid ghailf ollmhór ar mhaithe le cúrsaí fógraíochta.
50 cm^2 atá in achar dromchla gnáthliathróide gailf. Tá trastomhas na liathróide ollmhóire 100 uair níos mó ná trastomhas gnáthliathróide.
Faigh achar dromchla na liathróide ollmhóire ina m^2.



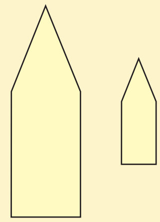
10. Leagadh síos raon ciorclach don lá spóirt i scoil. Iarradh ar dhaltaí na scoile ga an chiorcail a fháil, gan dul isteach sa raon ná an imlíne a thomhas. Bhí cead ag na daltaí úsáid a bhaint as téip 50-m, chomh maith lena dtrealamh matamaitice féin.

Sheas Sorcha ag pointe áirithe taobh amuigh den chiorcal agus bhain sí úsáid as an téip chun dhá thadhlaí leis an gciorcal a chruthú. 29 m ar fad a bhí na tadhlaithe agus 120° a bhí san uillinn idir an dá cheann. Cén fad a bhí sa gha a fuair sí don chiorcal? Cá fhad a bhí sí ó imlíne an chiorcail?
An bhfuil bealach eile chun an t-eolas sin a fháil?

T&T4.indb 189 10/07/2018 17:46:58

Achoimre ar na Príomhphointí

Méaduithe

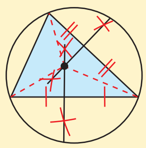


Nuair a mhéadaítear cruth

- bíonn an bhunfhíor agus a híomhá comhchosúil lena chéile; athraíonn an mhéid ach ní athraíonn an cruth
- an **fachtóir scála**, is ionann sin agus an uimhir faoina méadaítear fad gach mírlíne
- má bhíonn an fachtóir scála k níos mó ná $1 (k > 1)$, bíonn an íomhá níos mó ná an bhunfhíor
- má bhíonn an fachtóir scála k níos lú ná $1 (k < 1)$, bíonn an íomhá níos lú ná an bhunfhíor
- má mhéadaítear fíor de réir fhachtóir scála k, méadófar a hachar de réir fhachtóir scála k^2
- má mhéadaítear fíor de réir fhachtóir scála k, méadófar a toirt de réir fhachtóir scála k^3
- faightear lárphointe an mhéadaithe ach línte a tharraingt trí dhá thacar de phointí comhfhreagracha. Is é pointe trasnaithe na línte sin an lárphointe.

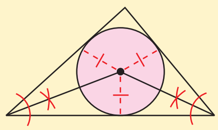
Tógálacha

Imchiorcal



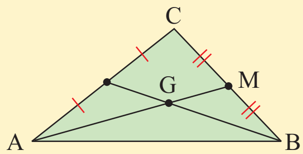
Is é lárphointe an imchiorcail pointe trasnaithe dhéroinnteoirí ingearacha na sleasa

Inchiorcal



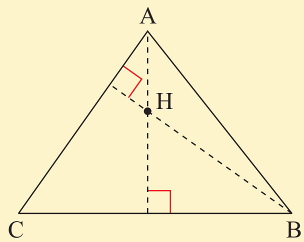
Is é lárphointe an inchiorcail pointe trasnaithe dhéroinnteoirí na n-uillinneacha.

Meánlár



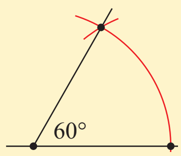
Meánlíne a thugtar ar an líne AM. Meánlár an triantáin a thugtar ar an bpointe G, an áit a dtagann na meánlínte le chéile.

Ingearlár

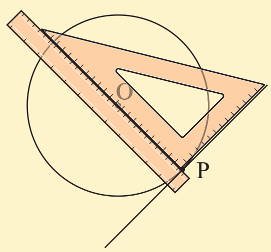


Ingearlár an triantáin a thugtar ar an bpointe H, an áit a dtagann na mírlínte ingearacha sa triantán ABC le chéile.

Uillinn 60°



Tadhlaí le ciorcal



Freagraí

Caibidil 1: An Chéimseata Chomhordanáideach: An Líne

Cleachtadh 1.1

1. (i) $\sqrt{41}$ (ii) $2\sqrt{5}$ (iii) $-\frac{1}{6}$ (iv) $(4, 0)$
2. $(-1, -1)$
3. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $-\frac{4}{3}$
6. $k = 5$
7. $p = -5$
8. (i) $\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{3}$
9. (i) a agus c (ii) b agus d
10. Fána $a = \frac{2}{3}$; fána $b = \frac{3}{2}$; fána $c = 2$
11. Tá an líne ag titim ó chlé go deas; $m = -\frac{1}{2}$
12. $a = -5$ nó 9
13. $k = 3, 11$
14. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) -2, $k = 6$ (iii) $4\sqrt{5}$ (iv) 10 n-aonad chearnacha
15. (i) $q = 4$ nó $\frac{32}{3}$

Cleachtadh 1.2

1. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{27}{2}$ (iii) $\frac{5}{2}$ (iv) 5
2. $B' = (-7, -2)$, $C' = (1, -2)$; 8 n-aonad chearnacha
3. (i) $\frac{9}{2}$ (ii) $\frac{33}{2}$
4. 14 aonad chearnacha
5. $k = 7, -21$
6. $k = 5, -\frac{23}{5}$
7. $k = 1, 8$
8. Achar $= 0$; pointí comhlíneacha
9. $k = 8$ nó 16
10. $b = 6$; 5 aonad chearnacha
11. $k = 1$
12. (i) 15 aonad chearnacha (ii) $2\sqrt{10}$ (iii) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

Cleachtadh 1.3

1. (i) $3x - y - 13 = 0$ (ii) $2x + y + 12 = 0$
2. $2x - 3y + 9 = 0$
3. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $x - 3y - 15 = 0$
4. (i) 6 (ii) $x + 6y - 4 = 0$
5. $k = 2$
6. $t = \frac{8}{3}$
7. $k = 2$
8. $(6, 0)$ agus $(0, -2)$
9. $a = -5$
10. (i) $C = (-3, 0)$ (ii) $3x + 2y + 9 = 0$
11. $-\frac{2}{5}$; $2x + 5y - 11 = 0$
12. (i) níl siad comhthreomhar ná ingearach (ii), (iii) ingearach (iv) comhthreomhar (v) comhthreomhar (vi) ingearach
13. $(5, -2)$
14. $(2, 3)$; $2x - 3y + 5 = 0$
15. $3x - y - 7 = 0$
16. (ii) $k = 3$
17. $x - 5y + 11 = 0$
18. $\left(\frac{k}{3}, 0\right)$; $\left(0, \frac{k}{4}\right)$; $k = 24$
19. $2x - 3y + c = 0$; $2x - 3y - 2 = 0$
20. $4x + y = k$; $4x + y - 12 = 0$

Cleachtadh 1.4

1. $\left(\frac{17}{5}, -\frac{12}{5}\right)$
2. $(1, -4)$
3. $\left(\frac{16}{3}, 12\right)$
4. (i) $\left(\frac{13}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ (ii) $(-7, -6)$
5. (i) $\left(\frac{17}{4}, 6\right)$ (ii) $\left(\frac{13}{2}, 9\right)$
6. $\left(\frac{14}{3}, \frac{17}{3}\right)$
7. $x = 8, y = 3$
8. $x = 6, y = 4$
9. $x = 21, y = -14$
10. $1 : 2$

Cleachtadh 1.5

1. (i) $(1, 2)$ (ii) $(4, 1)$
2. $(2, 1)$
3. $(3, -2)$
4. $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$
5. $(2, 0)$
7. $k = -5$

Cleachtadh 1.6

1. 1
5. $c = 10$ nó $c = -40$
6. $\frac{3\sqrt{10}}{4}$
7. Tá
8. $a = -\frac{1}{3}, 3$
9. $a = -3$
12. Níl
13. $4x + 3y + c = 0$; $4x + 3y + 11 = 0$; $4x + 3y - 9 = 0$
14. $4x + 3y + k = 0$; $4x + 3y + 13 = 0$; $4x + 3y - 27 = 0$
15. $mx - y + 4m + 2 = 0$; $y - 2 = 0$; $4x + 3y + 10 = 0$
16. $y - 5 = 0$; $15x + 8y - 85 = 0$
17. (i) 2
(ii) Achar = 5 aonad chearnacha

Cleachtadh 1.7

1. (i) -1 (ii) $\frac{7}{4}$ (iii) 8
2. 45°
3. 135°
4. 82°
5. 135°
6. 30°
7. $-\frac{1}{5}$ nó 5
8. $5x + y = 0$; $x - 5y = 0$
9. $3x - y + 4 = 0$; $x + 3y - 2 = 0$
10. $x + 5y - 14 = 0$; $5x + y - 22 = 0$
11. $2x + 3y - 6 = 0$
12. (i) Fána = $-t$ (ii) $t = -\frac{1}{3}$ nó 3

Cleachtadh 1.8

1. (a) (i) 95°F (ii) 58°F (iii) 10°C (iv) 38°C
(b) $5x - 9y - 160 = 0$
(c) 203°F
2. (i) €320 (ii) 45 m^2 (iii) €440
3. (i) €400, €800, €1200
(ii) $I = 400T$
(iii) $8\frac{3}{4}$ bliain
(iv) $A = 400T + 5000$
4. (ii) $5P + 4N = 700$ (iii) €69.60
(iv) 85
5. (ii) **A**: $P = 5 + 2D$; **B**: $P = 2.2D$
(iii) 25 km (iv) Gnólacht **B**
6. (ii) Praghas €40 agus 28 earra

Cuir triail ort féin 1

Ceisteanna A

1. $2x + 3y - 10 = 0$
2. 4 aonad chearnacha
3. $a = -8$
4. $a = 9$
5. (i) $\frac{3}{2}$ (ii) $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ agus $(0, -2)$
(iii) $\frac{4}{3}$ aonad cearnach
6. $\frac{2}{5}$; $2x - 5y + 3 = 0$
7. (i) $k = -\frac{1}{2}$ (ii) $(-4, 11)$
8. (a) Tá (b) Tá
(c) Tá (d) Níl
9. $2x - y - 8 = 0$
10. $k = 9$

Ceisteanna B

1. (i) 3 (ii) $k = -32$
2. (i) $(-1, 1)$ (ii) (a) $(3, 0)$ agus $\left(0, \frac{6}{k}\right)$
(b) $k = 3$
3. (i) $2x + y = 9$ (ii) (a) $x - 2y = 1 - 2k$
(b) $k = \frac{1}{2}$
4. $(3, 3)$
5. (i) $2x + y = 5$ (ii) 5 m (iii) 559 cm
6. $(4\frac{1}{2}, 1)$
7. (i) $y - 6 = m(x + 4)$
(ii) $\left(\frac{-6 - 4m}{m}, 0\right)$, $(0, 6 + 4m)$
(iii) $m = \frac{3}{4}$ nó $m = 3$
8. (i) $k = -3\frac{1}{2}$ (ii) $3x - 4y - 23 = 0$
9. (i) $mx - y + (5 - 2m) = 0$
(ii) $\left(\frac{-5 + 2m}{m}, 0\right)$, $(0, 5 - 2m)$
(iii) $m = -\frac{1}{2}$ nó $m = -\frac{25}{2}$
10. (i) $\frac{4 - k}{2}$ (ii) $k = -2, 3$
(iii) 15 aonad chearnacha

Ceisteanna C

1. (i) Q = (8, 0), R = (0, −12) (ii) $c = \pm 12\sqrt{2}$
2. $4x - 3y + 20 = 0$; $4x - 3y - 20 = 0$
3. (i) $(1, -1)$ (ii) $\sqrt{65}$ (iii) 65π
4. (i) $x - 4y + 10 = 0$
(ii) A = (4, 1); C = (−2, 2)
5. $3x - y - 2 = 0$ agus $x + 3y - 14 = 0$
6. (i) $k = 2$ (ii) T = (2, 12)
7. (ii) $4I - 3S + 77 = 0$ (iii) €41 milliún
(iv) $10\frac{3}{4}\%$
8. $m = -1, 2$; tangant = 3

9. (ii) $4x + 3y + c = 0$
(iii) $4x + 3y + 5 = 0$; $4x + 3y - 15 = 0$

10. (i) $m = \frac{-t}{t+2}$ (ii) $k = -\frac{3}{2}$ nó $t = 1$

Caibidil 2: An Triantánacht 1

Cleachtadh 2.1

1. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) $\frac{5\pi}{6}$ (iv) $\frac{3\pi}{4}$
(v) $\frac{\pi}{5}$ (vi) $\frac{4\pi}{3}$ (vii) $\frac{13\pi}{6}$

2. (i) 180° (ii) 90° (iii) 30° (iv) 150°
(v) 80° (vi) 330° (vii) 75°

3. (i) 8 cm (ii) 16 cm (iii) 10 cm (iv) 5 cm

4. (i) 1 raidian (ii) 2 raidian
(iii) $\frac{1}{2}$ raidian (iv) $1\frac{1}{2}$ raidian
(v) $1\frac{1}{4}$ raidian

5. $7\frac{1}{2}$ cm

6. 15 cm^2

7. $1\frac{1}{4}$ raidian

8. $\frac{\pi}{6}$

9. $\frac{3}{2}$ raidian

10. $\frac{15\pi}{2}$ cm^2

11. (i) $\frac{5}{2}$ raidian (ii) 143°

12. $(4 - \pi)$ cm^2

13. 64 cm^2

14. (ii) 2π cm (iii) $(12\pi - 18\sqrt{3})$ cm^2

15. (i) $\theta = \frac{40 - 2r}{r}$ $\left(\text{nó } \theta = \frac{200}{r^2}\right)$
(ii) $r = 10$ (iii) $\theta = 2$ raidian

Cleachtadh 2.2

1. (i) 0.7431 (ii) 0.2756 (iii) 0.5407
(iv) 0.7266 (v) 0.5914

2. (i) 48° (ii) 69° (iii) 55°
(iv) 78° (v) 42° (vi) 12°

3. (i) 42° (ii) 53° (iii) 41°
(iv) 24°

4. 5

6. $42 + 12\sqrt{3}$

7. (i) 13.9 (ii) 44°

8. (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{6}$; $1 + \sqrt{3}$

Cleachtadh 2.3

1. (i) 0.7660 (ii) −0.7660 (iii) 0.6428
(iv) −0.6428 (v) −0.8192 (vi) 0.5736

2. (i) 0.6691 (ii) −0.8480
(iii) −0.9004 (iv) −0.9336

3. (i) sin 50° (ii) −cos 65°
(iii) −tan 20° (iv) −cos 40°
(v) −sin 70° (vi) −tan 60°

4. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(iv) $-\frac{1}{2}$ (v) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (vi) 1
(vii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (viii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. (i) 3ú (ii) 1ú (iii) 2ú (iv) 1ú

6. (i) 124° (ii) 68° (iii) 240°
(iv) 345° (v) 75°

7. 13° agus 167°

8. (i) 147° agus 213° (ii) 224° agus 316°
(iii) 43° agus 223°

9. 30° agus 150°

10. 1 agus −1

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ agus $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. $\frac{1}{2}$ agus $-\frac{1}{2}$

13. 233°

14. $-\frac{3}{4}$

15. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

17. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\sqrt{3}$

Cleachtadh 2.4

1. (i) 6.4 m (ii) 18.7 m (iii) 6.7 m

2. (i) 44° (ii) 35° (iii) 41°

3. (i) 68°16′ (ii) 9.7 (iii) 36 aonad cear.

4. (i) 28.3 cm^2 (ii) 9.5 cm^2 (iii) 29.5 cm^2

5. (i) 35° (ii) 90° (iii) 42°

6. (i) 23 cm (ii) 182 cm^2

7. (i) 2 m

8. $x = 4$ cm

9. 72.5° agus 107.5°

10. (i) 7.3 cm (ii) 2.0 cm

11. 36.8 m

12. 103 km

Cleachtadh 2.5

1. (i) 7.2 cm (ii) 8.6 cm (iii) 9.4 cm

2. (i) 106° (ii) 44° (iii) 108°

4. 15.2 aonad cearnach

5. (i) 4.0 (ii) 120°

6. 146.5 m
7. (i) 46° (ii) 10.9 cm
8. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $a = 3, b = 8$
10. 18.3 cm
11. (i) $x = 4$ (ii) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$
12. (i) 21.5 cm (ii) 582 cm
13. 70°

Cleachtadh 2.6

1. (i) 11.87 cm (ii) 19.7°
2. (i) 25.7 m (ii) 38.7° (iii) 29.8 m
(iv) 21.9°
3. (i) $|PY| = 180$ m; $|QY| = 297$ m
(ii) 331 m
4. (i) 18.4° (ii) 31.9 cm (iii) 15.8°
5. (i) 7 m (ii) 13 m
6. (i) 3.3 m (ii) 17.6 m^2
7. 29 m
8. (i) 14.8 m (ii) 19.7° (iii) 28.5°
9. $x = 8$
10. 11.9 m
11. 6.1 m
12. (i) 28.6 m^2 (ii) 29.2 m^2
13. (i) 160 m (ii) 340 m (iii) 525 m
(iv) 200 m
14. (i) 169.7 cm (ii) 177 cm (iii) 43°

Cleachtadh 2.7

1. (i) Peiriad $= 2\pi$ (ii) Raon $= [-1, 1]$
(iii) Peiriad $= 2\pi$ (iv) Raon $= [-3, 3]$
2. (i) Peiriad $= 2\pi$ (ii) Raon $= [-1, 1]$
3. (i) (540°, 0) (ii) Peiriad $= \pi$
4. (i) Peiriad $= 2\pi$; Raon $= [-3, 3]$
(ii) Peiriad $= \pi$; Raon $= [-2, 2]$
(iii) Peiriad $= \frac{2\pi}{3}$; Raon $= [-4, 4]$
5. Peiriad $= \pi$; Raon $= [-3, 3]$; $y = 3\cos 2x$
6. (i) Peiriad $= \pi$; Raon $= [-1, 1]$; $y = \cos 2x$
(ii) Peiriad $= \pi$; Raon $= [-2, 2]$; $y = 2\sin 2x$
(iii) Peiriad $= \frac{\pi}{2}$; Raon $= [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; $y = \frac{1}{2}\sin 4x$
(iv) Peiriad $= \pi$; Raon $= [-4, 4]$; $y = 4\cos 2x$
7. (i) 1 (ii) 0 (iii) 1 (iv) −1
(v) -1; $\frac{\pi}{4}$ agus $\frac{5\pi}{4}$
8. Seasann a do $4\sin 2x$; seasann b do $4\cos x$
9. $y = 3\cos 3x$ (i) 0 agus $\frac{2\pi}{3}$
(ii) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ agus π
10. $y = 2\sin 3x$
11. (i) $y = 2\cos 4x$ (ii) $y = \tan x$
(iii) $y = 3\sin 2x$ (iv) $y = 5\cos 2x$
12. (i) $f(x) = 3\cos 2x$; $g(x) = 2\cos 3x$;
$h(x) = \cos 3x$

Cleachtadh 2.8

1. 30° agus 150°
2. 30° agus 330°
3. $\frac{\pi}{4}$ agus $\frac{5\pi}{4}$
4. $\frac{\pi}{12} + n\pi$ nó $\frac{5\pi}{12} + n\pi$
5. $10° + n(120°)$ nó $110° + n(120°)$
6. $\frac{4\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$ nó $\frac{5\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$
7. $\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$ nó $\frac{5\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$
8. $\frac{\pi}{6} + n\pi$
9. $x = 75°, 105°, 195°, 225°, 315°, 345°$
10. 75°, 105°, 255°, 285°
11. $\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$
12. $\frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}$ nó $\frac{11\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}$
13. $\theta = 40°, 80°, 160°, 200°, 280°, 320°$
14. $\theta = 17°, 43°, 137°, 163°, 257°, 283°$

Cuir triail ort féin 2

Ceisteanna A

1. 23.1 cm^2
2. 150° agus 330°
3. (i) $\frac{6}{5}$ raidian (ii) 24 cm
4. $16\frac{4}{5}$ cm^2
5. (i) Peiriad $= 180°$; Raon $= [-2, 2]$
(ii) $a = 2, b = 2$
6. 2 aonad chearnacha
7. $-\frac{3}{4}$
8. 30° nó 150°
9. 49° nó 131°
10. $\frac{1}{2}$

Ceisteanna B

1. (i) 115° (ii) 43.5 cm^2
2. (i) $n\pi + \frac{5\pi}{12}$ nó $n\pi + \frac{7\pi}{12}$
(ii) $1\frac{1}{2}$ raidian
3. (i) 57° (ii) 39 cm
4. 36 km/u

5. (i) $a = 5$ (ii) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$
6. 2.9 m
7. (i) $[-4, 4]$ (ii) π (iii) -4
(iv) $g(x) = 4\cos x$; $f(x) = 2\sin 2x$
(v) $P = \left(\frac{5\pi}{4}, 2\right)$
8. 3.13 m
9. (i) (a) 9.4 m (b) 42°
(ii) Níl, bogann na súile 32.4°
10. (i) $\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$ nó $\frac{2n\pi}{3} + \frac{11\pi}{18}$

Ceisteanna C

1. (i) 6.5 m (ii) 21.0 m (iii) 63.4°
(iv) 23.3 m (v) 16.2°
2. (i) $k - \frac{8}{\tan\theta}$ (ii) 49°
3. (i) $4 - 2\sqrt{2}$ (ii) $8 - 8\pi + 4\pi\sqrt{2}$
4. 12 mhéadar
5. (i) Peiriad $= \pi$; Raon $= [-3, 3]$
(ii) (a) 10.4 cm (b) $1\frac{1}{4}$ raidian
7. (i) $\frac{h}{\tan 25°}$ (ii) $\frac{h}{\tan 33°}$ (iii) 22.7 m
8. 38°
9. (i) 10°, 110°, 130°, 230°, 250°, 350°
(ii) $\left(\frac{32\pi}{3} - 8\sqrt{3}\right)$ cm²
10. (i) $a = (0, 4)$, $b = (0, -4)$, $c = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, $d = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$,
$e = \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$, $f = \left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$
(ii) 20.5 m

Caibidil 3: An Chéimseata 1

Cleachtadh 3.1

1. $a = 46°$, $b = 134°$, $c = 80°$, $d = 100°$, $e = 65°$
2. $a = 111°$, $b = 74°$, $c = 112°$, $d = 65°$, $e = 40°$,
$f = 52\frac{1}{2}°$, $g = 60°$, $h = 30°$
3. $a = 62°$, $b = 110°$, $c = 55°$, $d = 34°$
4. (i) $x = 55°$, $y = 45°$ (ii) $x = 116°$, $y = 52°$
(iii) $x = 80°$, $y = 30°$
5. (i) $\sqrt{76}$ $(= 2\sqrt{19})$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{11}$
6. $x = 10$, $y = 8$
8. (i) uillinneacha ailtéarnacha
9. (i) B'fhéidir nach bhfuil na sleasa ar comhfhad
10. (i) Iad araon cothrom le $90° + |\angle CBG|$
11. $\sqrt{105}$
12. $\angle DEA$

Cleachtadh 3.2

1. (i) 36 cm² (ii) 6 cm
2. (i) 4.8 cm (ii) 10.5 cm (iii) 21.6 cm
3. (i) 96 cm² (ii) 126 cm² (iii) 143 cm²
4. 308 cm²; $17\frac{1}{9}$ cm
5. (i) $\angle BAC$ is mó; $\angle ACB$ is lú;
$|AC| > 5$ cm agus < 15 cm
6. (i) 5 cm (iii) 8 cm
7. (i) 30 cm² (ii) 30 cm²
(iii) 45 cm² (iv) 4 cm
8. (ii) 150 aonad cearnach
9. (i) $3(a + 2)$; $7a$ (ii) $a = 1.5$
10. (i) $5(2x + 1)$; $12x$ (ii) $x = 2.5$
11. 76 cm²

Cleachtadh 3.3

1. (i) 2.5 (ii) 9 (iii) $5\frac{5}{6}$
2. $x = 8.4$, $y = 2.8$; $a = 6$, $b = 8.4$
3. 14.4
4. 4.8
5. $|BC| = 4.2$; $|BP| = 1.6$
6. (i) 20 cm (ii) 2 : 3 (iii) 20 cm
7. (i) 8 cm (ii) 7 cm
8. $\frac{12}{x}$
9. (i) Tá na triantáin comhuilleach
(ii) [DF] (iii) $x = \frac{96}{7}$, $y = \frac{64}{7}$
10. $x = 4.5$, $y = 4$
11. (i) [XY] (ii) $x = 9$, $y = 13.5$
12. (i) $x = 16\frac{2}{3}$, $y = 10$ (ii) $x = 8$, $y = 5\frac{1}{3}$
13. (i) 9 (ii) 18
14. (ii) 6
15. $|BD| = 11.25$; $|AB| = 9$
16. (i) $\triangle ABC$ agus $\triangle DBC$ (ii) $m = 6$, $n = 6$
17. $x = 5$
18. (i) $\triangle WXZ$ (ii) $w = 6\frac{2}{3}$, $v = 5\frac{1}{3}$
19. $x = 0.618$; 1 : 1.618
20. $\frac{\sqrt{2}}{1}$
21. 10.8 m

Cleachtadh 3.4

1. $a = 96°$, $b = 88°$, $c = 136°$, $d = 84°$, $e = 48°$
2. $a = 52°$, $b = 44°$, $c = 45°$, $d = 20°$
3. $a = 47°$, $b = 94°$, $c = 43°$
4. $f = 40°$, $g = h = 55°$
5. $a = 42°$, $b = 48°$, $c = 40°$, $d = 55°$, $e = 35°$
6. $a = 95°$, $b = 75°$, $c = 43°$, $d = 116°$, $e = 64°$
7. 60°, 54°, 66°

T&T4.indb 195 10/07/2018 17:47:01

8. (i) 90° (ii) 50° (iii) 50° (iv) 80°
9. $a = 55°, b = 90°, c = 49°, d = 49°, e = 67°$
10. (i) 62° (ii) 44°
12. 20°
13. (i) 146° (ii) 17°
15. (i) Na triantáin XRZ, YQZ agus PYX
(ii) 61° (iii) $|\angle XZY| = 61°$; $|\angle ZYX| = 61°$ agus $|\angle ZXY| = 58°$
16. 68°
17. (i) 106° (ii) 74° (iii) 53°
18. (i) 48° (ii) 48°
20. $a = 78°, b = 39°; x = 50°, y = 68°; c = 63°, d = 54°$
22. (ii) níl (b) fíor i gcónaí
23. $4\sqrt{102}$ (= 40.4)
24. (a) 105.8 cm (b) 122.5 cm

Caibidil 4: An Chéimseata Chomhordanáideach: An Ciorcal

Cleachtadh 4.1

1. (i) $x^2 + y^2 = 4$ (ii)$x^2 + y^2 = 25$
(iii) $x^2 + y^2 = 2$ (iv)$x^2 + y^2 = 18$
(v) $16x^2 + 16y^2 = 9$ (vi) $4x^2 + 4y^2 = 25$
2. $x^2 + y^2 = 25$
3. $x^2 + y^2 = 17$
4. (i) (0, 0) (ii) 5 (iii) $x^2 + y^2 = 25$
5. $x^2 + y^2 = 17$
6. (i) 3 (ii) 1 (iii) $3\sqrt{3}$
(iv) $\frac{5}{2}$ (v) $\frac{2}{3}$ (vi) $\frac{7}{4}$
7. (i) $\sqrt{5}$ (ii) $x^2 + y^2 = 5$
8. $x^2 + y^2 = 25$
9. $x^2 + y^2 = 10$
10. $x^2 + y^2 = 20$; is tadhlaí é t

Cleachtadh 4.2

1. (i) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
(ii) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 8$
(iii) $(x - 4)^2 + y^2 = 12$
(iv) $x^2 + (y + 5)^2 = 18$
2. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$
3. (i) (1, 3)
(ii) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$
4. (i) (3, 2); $r = 4$ (ii) (−2, 6); $r = 2\sqrt{2}$
(iii) (3, 0); $r = \sqrt{5}$ (iv) (0, −2); $r = \sqrt{10}$
5. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 72$
6. (3, 3); $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
7. (i) (2, −4); $r = 5$ (ii) (1, 3); $r = 5$
(iii) (4, 0); $r = 2\sqrt{6}$ (iv) $(-2\frac{1}{2}, 3)$; $r = \frac{9}{2}$
(v) $(1, -\frac{3}{4})$; $r = \frac{5}{4}$ (vi) $(0, 3\frac{1}{2})$; $r = 2$
10. Taobh istigh
11. Taobh amuigh
12. $k = -8$
13. (ii) 4 (iii) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$
14. (i) 2 (ii) (4, −4)
(iii) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 4$
(iv) k_4
15. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$
16. (i) (2, 6)
17. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$
18. (i) A: (−7, −1); $r = 10$;
B: (3, −1); $r = 10$;
C: (−2, −1); $r = 5$
(ii) $(x + 7)^2 + (y + 1)^2 = 100$

Cleachtadh 4.3

1. Lárphointe = (0, 0); ga = $\sqrt{10}$
2. (3, −4); $r = 5\sqrt{2}$
3. Ní tadhlaí é
4. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$
5. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 18$
6. (i) (1, 1)
(ii) 1
(iv) tá $|-g|$ agus $|-f|$ cothrom le fad an gha
7. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
8. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$
9. (i) (2, −3); $r = 5$ (ii) −31, 19
10. (i) $2x + 8y - 1 = 0$ (ii) $8x - 2y - 21 = 0$
(iii) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (iv) $\sqrt{\frac{17}{2}}$
(v) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$
11. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
12. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
13. $-g - 2f = 6$; $6g + 10f + c = -34$;
$2g - 6f - c = 10$; $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$
14. $f = 0$; $3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0$
15. (i) $r = 3$
(ii) $k = 4$; T = (2, 0)
16. (i) $g = f$ agus $g, f < 0$
(ii) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$
17. (ii) $2x - 3y - 8 = 0$
(iii) $x + 5y + 9 = 0$
(iv) (1, −2); $r = \sqrt{13}$
(v) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$
18. $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$
19. $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 30 = 0$;
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 18 = 0$
20. (i) $y = 1$
(ii) $(x - 15)^2 + (y - 7)^2 = 36$
(iii) $(x - 13)^2 + (y - 7)^2 = 36$

Cleachtadh 4.4

1. $x + y = 4$
2. $3x - y + 10 = 0$
3. $4x - y - 17 = 0$
4. (ii) $(1, -2)$
   (iii) $x + 2y - 7 = 0$
5. $4x - y + 2 = 0$
6. $(2, -5)$; $r = \sqrt{37}$; $x + 6y - 9 = 0$
7. 5
8. $(3, 2)$; $r = \sqrt{5}$
9. $(3, 1)$, $r = 5$; $c = -38, 12$
10. $k = 3, \frac{1}{9}$
12. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{2}$
    (nó $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 5 = 0$)
13. $mx - y = 0$; $y = 0$; $4x - 3y = 0$
14. $mx - y - 3m + 5 = 0$; $y - 5 = 0$;
    $24x - 7y - 37 = 0$
15. $3x + 4y + c = 0$; $3x + 4y + 8 = 0$;
    $3x + 4y - 22 = 0$
16. (i) $\sqrt{5}$
    (ii) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 5$
    (iii) $2x + y - 6 = 0$
17. (i) $(5k, -3)$ (ii) $k = 2$ (iii) $d = -53$
18. (i) $r = 3$ (iii) 4
19. $(7, 1)$; $r = 4$; 5
20. $\sqrt{10}$
21. $3\sqrt{2}$
22. $c = 12$

Cleachtadh 4.5

1. $(-1, 2)$ agus $(-2, -1)$
2. $(1, -3)$
3. $(2, -1)$
4. (i) $(4, 2)$ agus $(-1, 7)$
   (ii) $(-1, 4)$ agus $(3, -4)$
   (iii) $(2, 1)$ agus $(0, -5)$
5. $(-2, 5)$
6. (i) $(3, 1)$ agus $(-1, -1)$
   (ii) $(1, 0)$
   (iii) $(x - 1)^2 + y^2 = 5$
7. $(6, 0)$ agus $(-2, 0)$; 8 n-aonad
8. $(0, -7)$ agus $(0, 1)$; 8 n-aonad
9. $a = 6$, $b = 1$
10. 6 aonad
11. $2x - y - 3 = 0$; $(2, 1)$ agus $(-1, -5)$
12. $3x - 4y - 9 = 0$; $(-1, -3)$
13. $(-3, 4)$ agus $(-5, 2)$
14. (i) $(-1, 4)$
    (ii) Ag éirí: $(-3, 1)$; Ag dul faoi: $(1, 1)$

Cleachtadh 4.6

1. s_1: $(1, 0)$; $r = 4$; s_2: $(7, 8)$; $r = 6$
3. $(2, 1)$; $r = 5$; $(8, 9)$; $r = 5$; $|c_1 c_2| = 10$
4. Go seachtrach
5. (ii) $x + y - 9 = 0$ (iii) $(4, 5)$
6. (i) $r = 5$
   (ii) $(x - 3)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$
7. (iii) $2\sqrt{7}$ aonad
8. (i) $(4, 5)$
   (ii) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$
9. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$
   [nó $x^2 + y^2 - 5x - 4y + 4 = 0$]
10. (i) $r = \sqrt{30}$
    (ii) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 30$
11. (i) $(3, 4)$
    (ii) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
12. $(3, -2)$; $r = 5$; $k = 36$

Cleachtadh 4.7

1. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$
2. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$
3. (i) $y = 5$
   (ii) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$
   (iii) $x = 10$
4. (ii) $r = 4$
   (iii) $(6, 4)$
   (iv) $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$
5. (i) $r = 4$
   (ii) $(4, 5)$
   (iii) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$
6. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$
8. $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 25$; $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$

Cuir triail ort féin 4

Ceisteanna A

1. (i) $\sqrt{13}$ (ii) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 13$
2. $(1, 2)$; $r = \sqrt{14}$; $x^2 + y^2 = 14$
3. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$
5. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$
6. P = $(11, 0)$; Q = $(-1, 0)$
7. $(1, -2)$; $r = 1$; $k = 0, 2$
8. 4
10. $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 29$

Ceisteanna B

1. $(3, 1)$; $r = \sqrt{13}$; $2x + 3y - 22 = 0$
2. (ii) $p = 0$ nó $p = -\frac{12}{35}$

3. $k = -25, 48$
4. (i) $p = -6$ (ii) (4, 3) agus (1, 0)
5. (ii) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 64$
6. (i) C = (0, 5) (ii) $\sqrt{5}$ (iii) (2, 4)
7. (0, 0); $r = 2$ agus (4, 3); $r = 3$; $4x + 3y - 10 = 0$
8. (i) $2g + 5f = -18$; $2g - f = 6$
(ii) $g = 1, f = -4$
(iii) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$; $(-1, 4)$; $r = \sqrt{10}$
9. (i) C = (−3, 2) (ii) $r = 5$ (iii) 4
10. $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 9$
nó $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 49 = 0$

Ceisteanna C

1. 1 aonad; $\sqrt{11}$
2. $3x - 4y + c = 0$; $3x - 4y + 9 = 0$;
$3x - 4y - 41 = 0$
3. (i) C = (8, 1); D = (2, 1)
(ii) (5, 4)
(iii) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$
4. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$
5. $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 16$
nó $(x - 32)^2 + (y - 2)^2 = 16$
6. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$
7. (ii) $x^2 + y^2 - 9x - 5y + 24 = 0$
8. $g = -4, c = 7, f = -\sqrt{7}$; $(x - 4)^2 + (y - \sqrt{7})^2 = 16$
9. $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$;
$x^2 + y^2 + 30x - 30y + 225 = 0$
10. (i) (a, b); $r = a$
(iii) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$
nó $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 25$
(iv) $4\sqrt{2}$

Caibidil 5: An Triantánacht 2

Cleachtadh 5.2

1. (i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
2. (i) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$
3. (i) $\frac{33}{65}$ (ii) $\frac{16}{63}$
4. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) 0 (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) 1
5. (i) $\tan 3A$ (ii) $\sin 3\theta$
7. $4\frac{1}{2}$
8. $\frac{\pi}{4}$ (nó 45°)
9. $\frac{1}{2}$
10. $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
11. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; $7 - 4\sqrt{3}$
14. $h = 6$ m
17. $h = 2$ m nó 3 m

Cleachtadh 5.3

1. (i) $\frac{24}{25}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{24}{7}$
2. (i) $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{4}{5}$
3. $\frac{7}{9}$
4. $\frac{\sqrt{5}}{4}$; $\frac{\sqrt{11}}{4}$
5. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
6. 1
10. $\frac{4}{3}$
11. (i) $\frac{24}{25}$ (ii) $-\frac{7}{25}$
14. $\frac{1}{2}$ nó -2
15. (i) $\frac{5}{3}\sin\beta$ (ii) $\frac{\sqrt{11}}{5}$
16. (ii) $\frac{7}{25}$
18. (i) $1 - 2\sin^2 2A$ (ii) $2\cos^2 2A - 1$
19. (ii) $\frac{1}{4}$

Cleachtadh 5.4

1. (i) $2\sin 4x\cos x$ (ii) $2\cos 3x\sin x$
(iii) $2\cos 2x\cos x$ (iv) $-2\sin 6\theta\sin\theta$
(v) $-2\sin 2\theta\sin\theta$ (vi) $-2\cos 5\theta\sin 2\theta$
2. (i) cos 20° (ii) 0 (iii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
4. (i) $\sqrt{2}\cos x$ (ii) $-\sqrt{3}\sin x$
5. (i) $\sin 5A + \sin A$ (ii) $\sin 5x - \sin 3x$
(iii) $\cos 7A + \cos 3A$ (iv) $\cos 8A - \cos 4A$
(v) $-\frac{1}{2}[\cos 3A - \cos A]$
(vi) $\frac{1}{2}[\sin 6x - \sin 4x]$
6. (i) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ (ii) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
12. 2

Cleachtadh 5.5

1. (i) 45° (ii) 60° (iii) 45° (iv) 30°
(v) −60° (vi) −45° (vii) 120° (viii) −30°
3. (i) x (ii) $\sqrt{1-x^2}$ (iii) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
4. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{8}{17}$

5. (i) $\frac{24}{25}$ (ii) $\frac{119}{169}$
7. $\frac{56}{33}$
8. An dá thaobh $= \frac{24}{25}$

Cuir triail ort féin 5

Ceisteanna A

1. $\frac{12}{13}$
2. $\frac{63}{65}$
4. $\frac{24}{7}$
6. (i) $\frac{15}{17}$ (ii) $\frac{240}{289}$
7. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $a = 2, b = 1$
9. (ii) $\frac{120}{169}$
10. (i) $k = 2$ (ii) $\sqrt{3}$

Ceisteanna B

1. (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. (i) $-\frac{7}{25}$
3. (i) $\sin 6\theta + \sin 2\theta$ (ii) 2
5. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\tan A = \frac{1 - \tan B}{1 + \tan B}$
9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $\theta = \frac{\pi}{6}$

Ceisteanna C

3. (ii) $k = 25$
5. (ii) $a = 2, b = 1$
6. 41.4°; 55.8°; $55.8° > 41.4° \Rightarrow |AB| > 2$,
   slios is mó urchomhaireach leis an uillinn is mó
7. (i) (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 1
8. (ii) $x = \sqrt{6}$
9. (i) 4θ raidian
   (ii) $2 \sin 2\theta$; $\theta = \frac{\pi}{6}$ raidian
10. (i) $|AC| = 2r \cos \alpha$

Caibidil 6: An Chéimseata 2: Méaduithe agus Tógálacha

Cleachtadh 6.1

1. (i) 2 (ii) $x = 6$ cm, $y = 18$ cm
2. (i) 8 (ii) 12 (iii) 5; $7\frac{1}{2}$ aonad cearnach
3. (i) 2 (iii) $(-2, 3)$ (iv) 120 aonad cearnach
4. (i) 12 (ii) 6 (iii) 6; 45 aonad cearnach
6. (i) 4 (ii) 16.4 cm (iii) 3 cm
   (iv) 1 : 3 (v) 4 cm^2
7. (i) $2\frac{1}{2}$ (ii) 10 (iii) 2 : 5
   (iv) 100 aonad cearnach
8. 9 cm^2
9. 1100 cm^2
10. 2; $\sqrt{2}$
11. 12 cm^2
12. (i) 104 mm (ii) 42 mm
13. 10 200 m^2
14. (i) 1.5 m^2 (ii) 272 cm^2
15. (i) 1 : 500 (ii) 60 m
    (iii) 1 : 2000 (iv) 50 cm
16. (i) 3
    (ii) Is é k^3 an fachtóir scála i gcás toirte
17. (i) $2\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{125}{8}$ (iii) 3750 cm^3
18. 1600 cm^3
19. 691 ml
20. 11 cm
21. 54 kg
22. 2129.6 cm^3
23. 781.25 cm^3
24. 9 n-aonad
25. 609 cm^3
26. 20 cm

Cleachtadh 6.2

2. 105°
4. Is é an t-imlár lárphointe an taobhagáin; fuair
5. Tá maoluillinn sa triantán
6. Ba chóir an scoil a thógáil ag imlár an triantáin
9. (i) $\frac{1}{2}ar$
13. (i) 5 cm
14. Is fíor an toradh sin i gcás gach triantáin mhaoluilligh
16. Pointe trasnaithe dhéroinnteoirí ingearacha an dá chorda, is é sin lárphointe an chiorcail.

Cuir triail ort féin 6

Ceisteanna A

1. $2\frac{2}{3}$ cm
2. 10.8 m
3. (ii) $x = 3.6, y = 3$
4. (i) $x = 135°, y = 90°$
5. (i) Bréag (ii) Bréag (iii) Fíor (iv) Bréag

6. (i) Pointe trasnaithe dhéroinnteoir ingearach [AB] agus dhéroinnteoir ingearach [BC]
   (ii) 125°
   (iii) Is é
8. (i) 2.5 (ii) 6 (iii) 2 : 5
9. $x = 13.5, y = 27$
10. (i) 8 cm (ii) 6 cm

Ceisteanna B

1. 9 cm^2; 22.5 cm^2
2. (i) 1.2 (ii) $a = 5.4$ cm, $b = 6$ cm
3. (i) 24 cm (ii) 40.5 cm
4. $2\sqrt{21}$ cm
5. (i) $x = 28°, y = 56°, z = 34°$
6. (i) $5r$ (ii) 250 cm^2
7. (ii) 18 cm
8. $x = 40°, y = 80°, z = 50°$
9. (ii) 4.9 cm
10. 80 m

Ceisteanna C

1. (i) (a) 4 : 9 (b) 8 : 27
   (ii) 8 cm (iii) 121.5 cm^2 (iv) 32 cm^3
2. (i) 60° (ii) 60° (iii) 55°
3. (i) 74.25 cm^3
   (ii) (a) 150° (c) 30°
4. (i) $2\sqrt{7}$ cm (ii) $4\sqrt{7}$ cm
   (iii) 6 cm (iv) $24\sqrt{7}\text{ cm}^2$
5. (i) 168.75 cm^3
6. (a) (ii) 26° (b) 21 cm
7. (ii) $x + z = 10$; $y + z = 26$; $x = 4, y = 20, z = 6$
   (iii) 4 cm
8. (ii) $k = \frac{4}{5}$
9. (i) 106.3125 cm^3 (ii) 50 m^2
10. (i) 50.23 m; 7.8 m

T&T4.indb 200 10/07/2018 17:47:02