

**TIONSCADAL MATA**

# **Téacs & Trialacha**

**AN ARDTEISTIMÉIREACHT  
AN tARDLEIBHÉAL  
SNÁITHE 5**

**FEIDHMEANNA AGUS  
AN CALCALAS**



**O. D. MORRIS  
PAUL COOKE**

 An Cló Ceilteach 

**2014  
ARAGHAIDH**

**TIONSCADAL MATA**

# **Téacs & Trialacha**

**AN ARDTEISTIMÉIREACHT**

**AN tARDLEIBHÉAL**

**SNÁITHE 5**

**7**

**FEIDHMEANNA AGUS  
AN CALCALAS**



**O. D. MORRIS  
PAUL COOKE**



**An Cló Ceilteach**



Is aistriúchán é seo ar:  
*Project Maths: Text & Tests 7*

#### **An Leagan Béarla**

© O.D. Morris, Paul Cooke, 2013

Dearadh: Identikit Design

Leagan amach agus obair ealaíne: Tech-Set Teo.

Clúdach: The Unlimited Design Company

#### **An Leagan Gaeilge**

Á fhoilsíú ag an gComhairle um Oideachas Gaeltachta agus Gaelscolaíochta (COGG)

Foireann aistriúcháin agus eagarthóireachta:

Diarmuid Clifford, Bairbre Ní Ógáin, Muireann Ní Chuív

Leagan amach: The Unlimited Design Company

Gach ceart ar cosaint. Ní ceadmhach aon chuid den fhoilseachán seo a atáirgeadh, a chur i gcomhad athfhála, ná a tharchur ar aon mhodh ná slí, bíodh sin leictreonach, meicniúil, bunaithe ar fhótachóipeáil, ar thaifeadadh nó eile, gan cead a fháil roimh ré ón bhfoilsitheoir.

#### **An Chomhairle um Oideachas Gaeltachta agus Gaelscolaíochta**

**35 Cearnóg Mhic Liam, Baile Átha Cliath 2**

**[www.cogg.ie](http://www.cogg.ie)**

# Clár

<b>1. Feidhmeanna</b>	<b>1</b>
1.1 Réamheolas ar fheidhmeanna	1
1.2 Comhshuíomh feidhmeanna	10
1.3 Cineálacha feidhmeanna	13
1.4 Feidhmeanna inbhéartacha	19
1.5 Teorainneacha – Leanúnachas	24
1.6 Graif feidhmeanna a sceitseáil	30
1.7 Feidhmeanna easpónantúla agus logartamacha	37
1.8 Graif ghaolmhara	44
Súil Siar1	
(a) Croícheisteanna	49
(b) Ardcheisteanna	51
(c) Freagraí níos faide	54
<b>2. An Calcas Difreálach</b>	<b>57</b>
2.1 Meánráta athraithe	57
2.2 An difreál ó bhunphrionsabail	61
2.3 An difreál de réir rialach	64
2.4 Rial an Toraidh, Rial an Lín agus an Chuingriail	69
2.5 An dara díorthach	75
2.6 Díorthaigh feidhmeanna triantánúla	77
2.7 Feidhmeanna triantánúla inbhéartacha a dhifreáil	81
2.8 Feidhmeanna easpónantúla a dhifreáil	83
2.9 Feidhmeanna logartamacha a dhifreáil	86
Súil Siar 2	
(a) Croícheisteanna	89
(b) Ardcheisteanna	90
(c) Freagraí níos faide	92

<b>3. An Calcasas Difreálach in Úsáid</b>	<b>94</b>
3.1 Tadhlaithe – Feidhmeanna méadaitheacha agus feidhmeanna laghdaitheacha	94
3.2 Pointí cónaitheacha	99
3.3 Graif den fheidhm dhíorthaithe (nó d'fheidhm na fána)	105
3.4 Fadhbanna lena mbaineann uasluachanna agus íoslúachanna	110
3.5 Rátaí athraithe	117
3.6 Rátaí athraithe gaolmhara Súil Siar 3 (a) Croícheisteanna (b) Ardcheisteanna (c) Freagraí níos faide	121 125 126 129
<b>4. An tSuimeáil</b>	<b>134</b>
4.1 An fhrithdhifreáil	134
4.2 Feidhmeanna easpónantúla agus triantánúla a shuimeáil	138
4.3 An tsuimeáil in úsáid	143
4.4 Suimeálaithe cinnte	145
4.5 Leas a bhaint as an tsuimeáil chun achair a fháil	149
4.6 Meánluach feidhme Súil Siar 4 (a) Croícheisteanna (b) Ardcheisteanna (c) Freagraí níos faide	157 162 163 166
<b>Freagraí</b>	<b>169</b>

# Réamhrá

Scríobhadh agus cuireadh an leabhar seo i dtoll a chéile le haghaidh **Tionscadal Mata – Snáithe 5** de chúrsa na hArdteistiméireachta ar an Ardleibhéal do ndaltaí a bheidh ag gabháil don scrúdú sin ón mbliaín 2014 ar aghaidh. Léiríonn an leabhar an cur chuige ginearálta i leith theagasc na matamaitice mar atá beartaithe i dTionscadal Mata. Spreagann sé ní hamháin forbairt ar eolas agus scileanna matamaiticiúla na ndaltaí, ach forbairt ar an tuiscint a theastaíonn chun na scileanna sin a chur i bhfeidhm.

Tá réimse sármhaith ceisteanna ar gach topaic ar fáil, ceisteanna atá scríofa le samhláiocht agus a thabharfaidh dúshlán na ndaltaí. Cabhróidh na ceisteanna leis na daltaí chun an méid atá siad a dhéanamh a thuisint agus chun a gcuid scileanna i réiteach fadhbanna a fhorbairt. Tá dóthain ceisteanna a chuimsíonn gach pointe ar an scála deacrashta curtha ar fáil chun riachtanais beagnach gach dalta ag an leibhéal seo a shásamh.

An dearadh spreagúil lárdaite, mar aon leis an méid mór léaráidí dea-thóghtha, ba cheart go gcabhróidís le tuiscint na ndaltaí ar an topaic a bhfuil siad ag déanamh staidéir uirthi. Ag túis gach caibidle tá liosta dar teideal **Focail Thábhachtacha**. Beifear ag súil leis go mbeidh na focail sin ar eolas ag na daltaí agus tuiscint acu orthu faoin am a mbíonn an chaibidil críochnaithe. Ag deireadh gach caibidle tá cleachtaí súil siar ina bhfuil trí chineál ceisteanna: **(a) Croícheisteanna (b) Ardcheisteanna agus (c) Freagraí níos faide**. Bíonn na ceisteanna sin grádathe in ord deacrashta agus, dá bhrí sin, cuireann siad ar chumas na ndaltaí dul siar ar na rudaí bunúsacha a bhaineann le topaic ar bith sula dtugann siad aghaidh ar na cleachtaí níos dúshlánaí.

O.D. Morris  
Paul Cooke  
Feabhra 2013



# Feidhmeanna

## Focail thábhachtacha

feidhm    fearann    léaráid mhápala    comhfhearann    raon    eatraimh fearainn  
 feidhmeanna inbhéartacha    feidhmeanna comhshuite    feidhmeanna inteilgeacha,  
 barrtheilgeacha agus détheilgeacha    teorainn    feidhmeanna leanúnacha  
 asamtóit    feidhm easpónantúil    feidhm logartamach    graif ghaolmhara

### Mír 1.1 Réamheolas ar fheidhmeanna

Sa staidéar atá déanta againn ar an matamaitic go dtí seo, d'fhéachamar ar phointí ar nós  $(2, 4)$  agus  $(-3, 2)$  agus d'fhoghlaímíomar conas na pointí seo a bhreacadh ar an bplána comhordanáidithe.

Is samplaí iad pointí ar nós  $(2, 4)$  agus  $(-3, 2)$  d'ordphéirí.

Cuireann  $(x, y)$  ordphéire in iúl. Is éard is ordphéire ann ná péire ball  $x$  agus  $y$  inarb é  $x$  an chéad bhall agus  $y$  an dara ball.

**Coibhneas a thugtar** ar thacar ordphéirí ar nós  $A = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$ .

Cinneann gach coibhneas dhá thacar.

An **fearann a thugtar** ar thacar na gcéad bhall uile de na hordphéirí.

An **raon** a thugtar ar thacar na ndara ball uile de na hordphéirí.

Uaireanta sainíonn **riail** coibhneas, riail a dhéanann coibhneas idir baill san fhearrann agus na baill chomhfhreagracha sa raon.

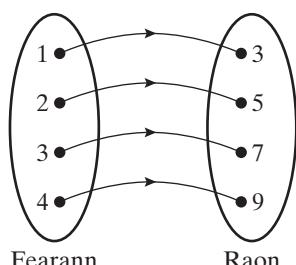
Chun an coibhneas a shainiú i gceart, caithfear an riail agus an fearann a ainmniú.

Mar shampla, is é  $\{(x, y) \mid y = 2x + 1, x \in \{1, 2, 3, 4\}\}$  an coibhneas

$\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$ .

Is é an tacar  $\{1, 2, 3, 4\}$  an fearann agus is é an tacar  $\{3, 5, 7, 9\}$  an raon.

Is féidir an coibhneas thuas a thaispeáint ar **léaráid mhápala**, mar a léirítéar.



## Feidhmeanna

Is coibhneasa speisialta, a bhfuil airíonna ar leith acu, iad feidhmeanna.

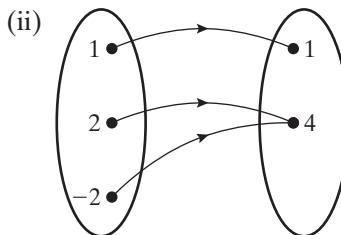
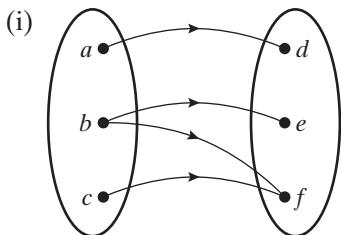
Is minic a thagraítear d'fheidhm mar "mheaisín uimhreacha" a bhfuil ionchuir agus aschuir aige.

Cathain is feidhm é coibhneas?

Is coibhneas í **feidhm** má tá **y-luach** uathúil i dtacar aschuir ag **gach x-luach ar leith i dtacar ionchuir**.

Nuair a léiríonn léaráid mhapála feidhm, ní mhapáltear aon bhall den fhearann ach ar aon bhall amháin den raon.

Féach ar an dá léaráid mhapála seo:



Ní feidhm í léaráid (i) mar go bhfuil an ball *b* péireáilte le dhá bhall éagsúla sa raon.

Is feidhm í léaráid (ii) mar nach bhfuil aon bhall den fhearann mapálte ach ar **aon bhall amháin den raon**.

*Cuimhnigh*

1. Nuair a bhíonn feidhm á mapáil agat, ní thagann ach aon saighead amháin ó gach aon bhall den fhearann.
2. Oibríonn an fheidhm ar gach aon bhall den fhearann.

## Nodaireacht – fearann – raon

Féach ar an ríail seo a bhaineann le feidhm: "Cearnaigh an t-aschur agus cuir 6 leis." Má ionchuirimid *x*, is é  $x^2 + 6$  an t-aschur.

Is féidir ríail na feidhme seo a scríobh in aon cheann de na trí bhealach a léirítear ar dheis.

- (i)  $f(x) = x^2 + 6$   
(ii)  $f: x \rightarrow x^2 + 6$   
(iii)  $y = x^2 + 6$

Nuair a bhímid ag plé le fearann agus le raon feidhme, tá sé tábhachtach tuiscint a bheith againn ar na huimhirchórais bhunúsacha. Tugtar thíos iad seo:

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ , tacar na n-uimhreacha aiceanta,

$Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , tacar na slánuimhreacha,

$Q = \{\text{fractions}, \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0\}$ , tacar na n-uimhreacha cóimheasta,

$R \setminus Q$  = tacar na n-uimhreacha éagóimheasta, e.g.  $\pi, \sqrt{2}, e$ , etc.

Nuair a chuirtear na huimhreacha seo uile le chéile, faighimid tacar na **réaduimhreacha,  $R$** . Is é  $R^+$  tacar na réaduimhreacha **deimhneacha**.

Féach ar an bhfeidhm  $f: N \rightarrow N: x \rightarrow x^2$ .

Ciallaíonn sé seo go dtagann tacar na n-uimhreacha ionchuir ó  $N$ , tacar na n-uimhreacha aiceanta.

Tagann na huimhreacha aschuir ón tacar  $N$  freisin.

An **comhfhearrann** a thugtar ar thacar na n-uimhreacha aschuir féideartha.

Ach is iad na huimhreacha cearnacha  $1, 4, 9, 16, \dots$  na haschuir a ghineann an fheidhm  $f: N \rightarrow N: x \rightarrow x^2$ .

An **raon** a thugtar ar thacar na n-**aschur iarbhír** i gcás feidhme.

Is fo-thacar den chomhfhearrann é an raon i gcónaí.

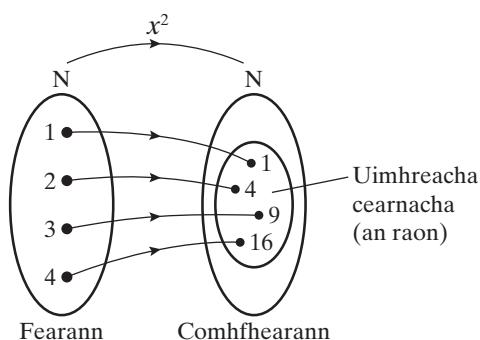
Ach, is iad an tacar céanna iad an raon agus an comhfhearrann i bhfeidhmeanna ar leith.

Taispeántar an fheidhm  $f: N \rightarrow N: x \rightarrow x^2$   
ar dheis.

Fearann =  $N$

Comhfhearrann =  $N$

Raon =  $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$



Anois féach ar an bhfeidhm  $f: R \rightarrow R: x \rightarrow x^2 + 2$ .

Is é  $R$ , tacar na réaduimhreacha, fearann  $f$ .

Is é  $R$  an comhfhearrann freisin.

**Eatramh fearainn:** Nuair a bhíonn ionchur againn, tugann feidhm cinnteacht dúinn faoin aschur. Chun feidhmeanna a dhéanamh as coibhneasa áirithe, is gá an fearann a theorannú agus **eatramh a ghineadh** inar feidhm é an coibhneas.

- Nuair a bhímid ag plé leis an bhfeidhm logartamach  $f: R^+ \rightarrow R: x \rightarrow \ln x$ , caithfear an fearann a theorannú do luachanna  $x > 0$ , that is,  $x \in R^+$ .  
Ní féidir logartam uimhir dhiúltach a fháil.
- Maidir leis an bhfeidhm  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ , ná cuireadh an fearann san áireamh na luachanna  $x < -2$  or  $x > 2$  mar go dtugann na luachanna seo ar  $x$  fréamh chearnach uimhir dhiúltach, rud nach bhfuil ina réaduimhir.  
Mar sin, is é  $-2 < x < 2$  an fearann.

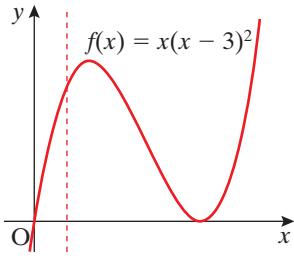
Tá na príomhghhnéithe a bhaineann le feidhm le feiceáil thíos:

$f$	$:$	$R$	$\rightarrow$	$R$	$:$	$x$	$\rightarrow$	$x^2 + 2$
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
Ainm		Fearann		Comhfhearrann		Ionchur		Riall → Aschur → Raon

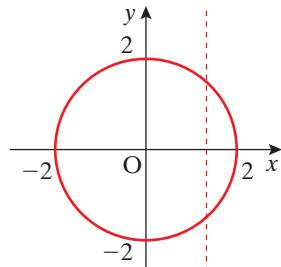
## Triail na hingearlíné d'fheidhm

Bealach an-úsáideach chun a fháil amach an feidhm nó nach feidhm é coibhneas ar leith ná graf an choibhniú a tharraingt agus **trial na hingearlíné** a chur i bhfeidhm air.

Más féidir ingearlíné (= líne cheartingearach nó líne ingearach) a tharraingt in aon áit ar an ngraf, agus go dtrasnaíonn an líne an graf **uair amháin ar a mhéid**, is **feidhm** é an coibhneas.



Is feidhm é  $f(x) = x(x - 3)^2$ .



Ní feidhm é  $x^2 + y^2 = 4$ .

### Sampla 1

Is dhá feidhm iad  $f(x) = 4x + 3$  agus  $g(x) = 3x^2$ .

Faigh (i)  $f(3)$       (ii)  $g(-1)$       (iii)  $f(2k)$       (iv)  $g(k - 3)$ .

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= 4x + 3 \\ \Rightarrow f(3) &= 4(3) + 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

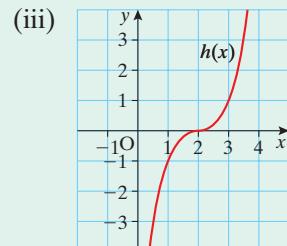
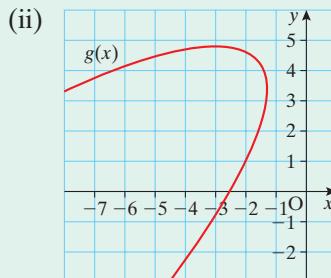
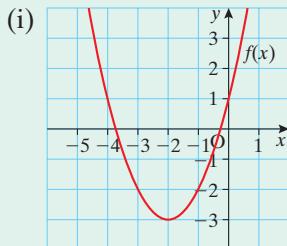
$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad g(x) &= 3x^2 \\ \Rightarrow g(-1) &= 3(-1)^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

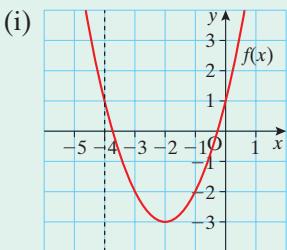
$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad f(x) &= 4x + 3 \\ f(2k) &= 4(2k) + 3 \\ &= 8k + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad g(x) &= 3x^2 \\ g(k - 3) &= 3(k - 3)^2 \\ &= 3(k^2 - 6k + 9) \\ &= 3k^2 - 18k + 27 \end{aligned}$$

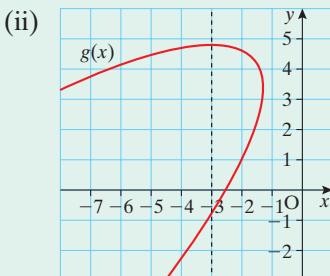
### Sampla 2

Déan amach cé acu díobh seo ar graif feidhme iad:

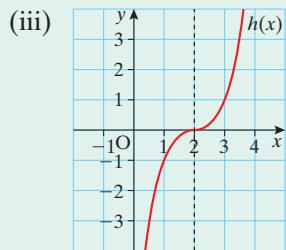




(i) Is feidhm é  $f(x)$  mar nach dtrasnaíonn aon ingearlín an graf ach aon uair amháin.



(ii) Ní feidhm é  $g(x)$ . Teipeann air sa triail ingearlín agus tá roinnt luachanna ar  $x$  nach dtabharfadh réadluachanna ar  $y$ .



(iii) Is feidhm é  $h(x)$  mar nach dtrasnaíonn aon ingearlín an graf ach aon uair amháin.

Nuair a bhímid ag déanamh cur síos ar eatraimh, is gnách na lúibní a thaispeántar ar dheis a úsáid.

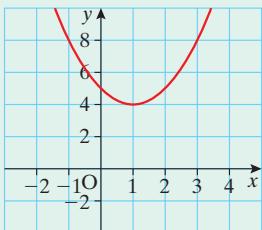
- $\{x \in R \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$
- $\{x \in R \mid a < x < b\} = (a, b)$
- $\{x \in R \mid a \leq x < b\} = [a, b)$
- $\{x \in R \mid a < x \leq b\} = (a, b]$

### Sampla 3

Scrúdaigh gach ceann de na feidhmeanna agus na graif seo.

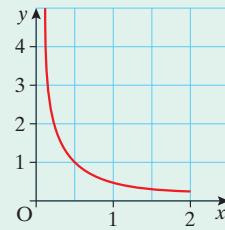
Scríobh síos fearann, comhfhearrann agus raon gach ceann díobh.

(i)  $f: R \rightarrow R: x \rightarrow x^2 - 2x + 8$  (ii)  $g:(0, 2] \rightarrow R: x \rightarrow \frac{1}{x}$  (iii)  $h: R \rightarrow [-1, 1]: x \rightarrow \cos x$



(i)  $f$ : Fearann = tacar na réaduimhreacha  $R$

Comhfhearrann = tacar na réaduimhreacha  $R$   
Raon =  $[4, \infty)$

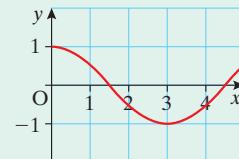


(ii)  $g$ : Fearann =  $\{x \in R \mid 0 < x \leq 2\}$

Comhfhearrann = tacar na réaduimhreacha  $R$

$$g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \text{at } x = 2, g(2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Raon} = [\frac{1}{2}, \infty)$$



(iii)  $h$ : Fearann = tacar na réaduimhreacha  $R$

Comhfhearrann =  $[-1, 1]$   
Raon =  $[-1, 1]$

## Sampla 4

Scríobh síos fearann, comhfhearrann agus raon na bhfeidhmeanna a leanas:

(i)  $f: R^+ \rightarrow R$ , áit a bhfuil  $f(x) = x^2 - 4$       (ii)  $g: R \rightarrow R$ :  $f(x) = 3x + 2$

(i) Is é  $R^+$ , tacar na réaduimhreacha deimhneacha, fearann  $f$ .

Is é  $R$  comhfhearrann  $f$ .

$f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow$  is é  $-4$  an luach is ísle ar  $f(x)$  mar go mbíonn  $x^2$  deimhneach i gcónaí.

Is é  $(-4, \infty)$  raon  $f$ .

(ii) Is é  $R$  fearann  $g$ .

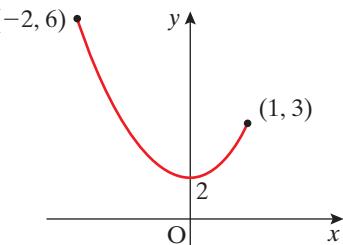
Is é  $R$  comhfhearrann  $g$ .

Is é  $R$  raon  $g$ .

Is é  $R^+$  tacar na réaduimhreacha deimhneacha.

Níl nialas san áireamh ann.

**Nóta:** Léirítear graf  $y = x^2 + 2$  san fhearrann  $[-2, 1]$ .  
Is é  $[2, 6]$  an raon.



## Cleachtadh 1.1

1. Cén fáth nach feidhm é an tacar cúplaí seo?

$\{(2, 5), (3, 6), (5, 8), (2, 10)\}$ .

2. Faigh amach an feidhm é gach ceann de na tacair chúplaí seo.

Mura feidhm é, mínígh cén fáth.

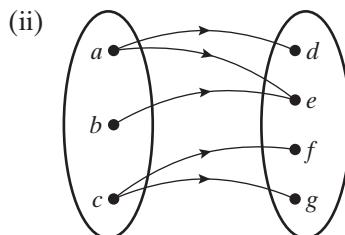
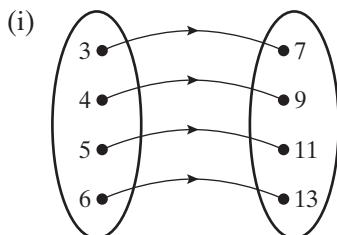
(i)  $\{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$

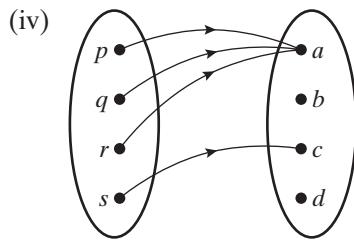
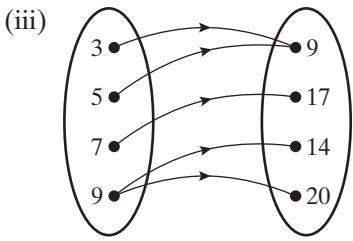
(ii)  $\{(-2, 1), (-1, 3), (-2, 5), (1, 6), (2, 9)\}$

(iii)  $\{(-3, 4), (0, 11), (2, 9), (4, 11)\}$

3. Abair an feidhm é gach ceann de na léaráidí mapála seo.

Cuir fáth le do fhreagra i ngach cás.





**4.** Sainíonn an riail  $y = 2x - 4$  tacar cúplái.

Má tá  $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ , déan liosta de na cúplái uile.  
Scríobh síos an raon a ghintear.

**5.** Má tá  $f(x) = 3x - 2$ , faigh

- (i)  $f(2)$       (ii)  $f(-3)$       (iii)  $f(k)$       (iv)  $f(2k - 1)$ .

**6.** Glac le  $g(x) = (x - 2)^2$ . Faigh

- (i)  $g(4)$       (ii)  $g(-4)$       (iii)  $g(8)$       (iv)  $g(a)$ .

**7.** Sainíonn  $f: R \rightarrow R: x \rightarrow 3x - 4$  an fheidhm  $f$ .

Cén luach ar  $k$  a fhágann  $f(k) + f(2k) = 0$  ?

**8.** Sainíonn  $f: x \rightarrow 4x$  agus  $g: x \rightarrow x + 1$  dhá fheidhm.

Má tá  $g(3) + k[f(3)] = 8$ , faigh luach  $k$ .

**9.** Sainíonn  $f(x) = 2x^2 - 1$  agus  $g(x) = x + 2$  dhá fheidhm.

Réitigh na cothromóidí seo:

- (i)  $f(x) = 3$       (ii)  $g(x) = f(3)$       (iii)  $f(x) = g(x)$

**10.** Sainíonn  $f(x)$  an fheidhm  $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ .

- (i) Faigh luach  $f(-4)$  agus  $f(\frac{1}{5})$ .  
(ii) Faigh an luach ar  $x$  a fhágann  $f(x) = 2$ .  
(iii) Faigh an luach ar  $k$  má tá  $kf(2) = f(\frac{1}{2})$ .

**11.** Sainíonn  $g(x) = 1 - 4x$  feidhm.

- (i) Faigh  $g(k + 1)$ .  
(ii) Réitigh an chothromóid  $g(k + 1) = g(-3)$ .

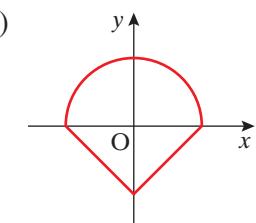
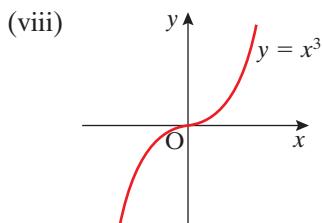
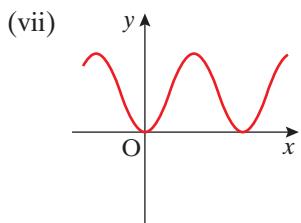
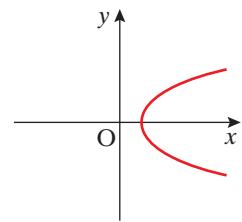
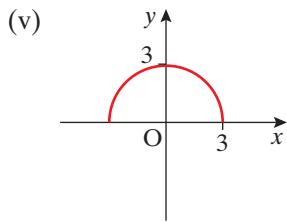
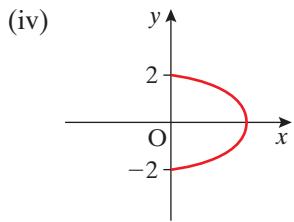
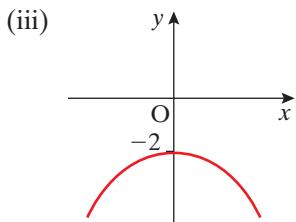
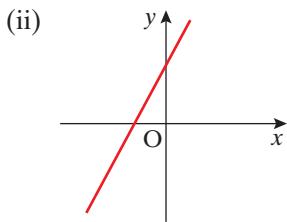
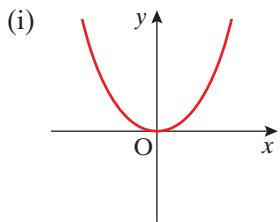
**12.** Má tá  $g(x) = 3x - 2$ , réitigh na cothromóidí seo:

- (i)  $g(-x) = 6$       (ii)  $g(2x) = 4$       (iii)  $\frac{1}{g(x)} = 6$

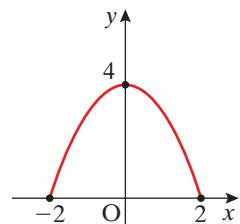
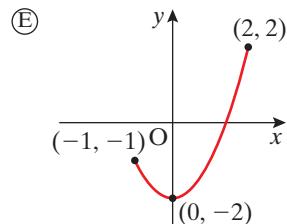
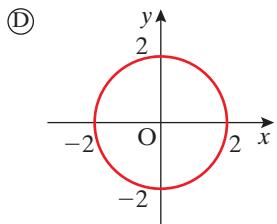
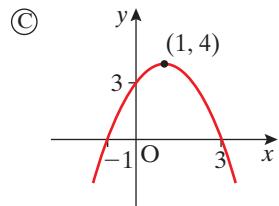
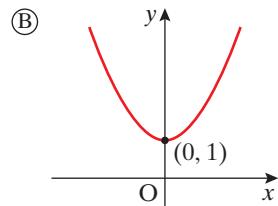
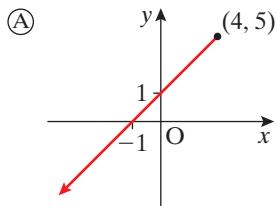
**13.** Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo:

- (i)  $f(x) = x^2 - 2x$ , má tá  $f(x) = 3$   
(ii)  $g(x) = x^2 - x - 6$ , má tá  $g(x) = 0$   
(iii)  $h(x) = x + \frac{1}{x}$ , má tá  $h(x) = 2$ .

14. Úsáid triail na hingearlíné chun a fháil amach an graf feidhme é gach ceann díobh seo a leanas, áit a bhfuil  $x \in R$ .



15. Tugtar graf agus raon sé choibhneas thíos.  
Ceangail gach graf lena raon féin.

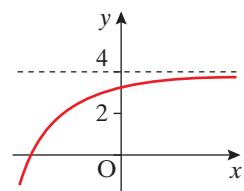
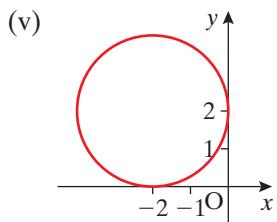
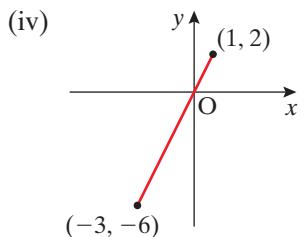
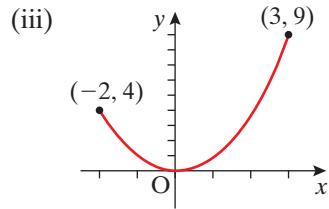
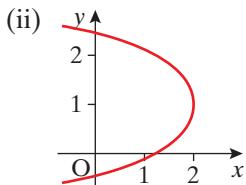
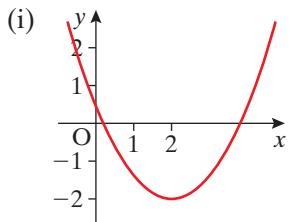


- ① Raon =  $(-\infty, 4)$   
④ Raon =  $[0, 4]$

- ② Raon =  $[-2, 2]$   
⑤ Raon =  $(-\infty, 5]$

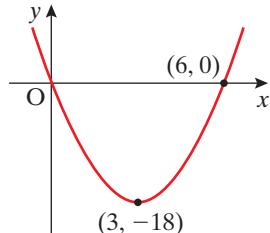
- ③ Raon =  $(-\infty, 2]$   
⑥ Raon =  $[1, \infty)$

- 16.** Scríobh síos fearann agus raon na gcoibhneas atá léirithe sna graif seo:



- 17.** Cé acu graif i gCeist 16 thusas a léiríonn feidhmeanna?

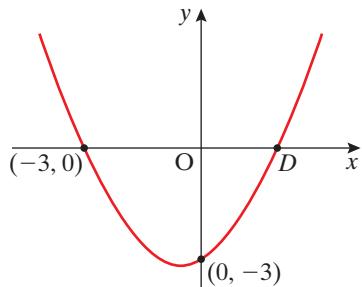
- 18.** Tá an fhoirm  $f(x) = kx(x - 6)$ .  
ar chothromóid an chuair  
chearnaigh ar dheis.  
Cad é luach  $k$ ?



- 19.** Sainíonn  $f: x \rightarrow x^2 + px + q$  feidhm.  
Má tá  $f(3) = 4$  agus  $f(-1) = 4$ , faigh luachanna  $p$  agus  $q$ .  
Úsáid na luachanna seo ar  $p$  agus  $q$  chun an chothromóid  $x^2 + px + q = 0$  a réiteach.

- 20.** Léirítear an fheidhm  $f(x) = x^2 + bx + c$   
sa ghraf ar dheis.

- (i) Úsáid an graf chun dhá chothromóid in  $b$  agus  $c$  a fháil.
- (ii) Réitigh na cothromóidí chun luach  $b$  agus luach  $c$  a fháil.
- (iii) Ag úsáid na luachanna seo ar  $b$  agus  $c$ , réitigh an chothromóid  $x^2 + bx + c = 0$  chun comhordanáidí an phointe  $D$  a fháil.



## Mír 1.2 Comhshuíomh feidhmeanna

Sa léaráid thíos, léiríonn an léaráid mhapála ó A go B an fheidhm  $f$  agus léiríonn an léaráid mhapála ó B go C an fheidhm  $g$ .

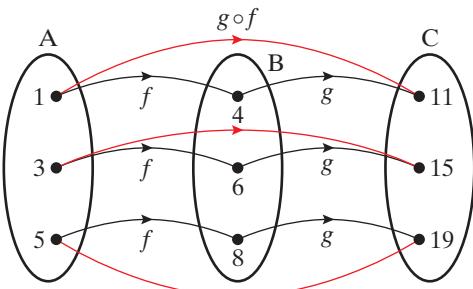
Seasann na saigheada dearga do chúplaí feidhm nua a cheanglaíonn  $f$  agus  $g$ .

An **fheidhm chomhshuite**  $g$  i ndiaidh  $f$  a thugtar uirthi.

Is mar seo a scríobhtar í:  $g \circ f$ , nó, níos simplí arís:  $gf$ .

Is mar seo a léitear  $g \circ f$ : ‘ $g$  i ndiaidh  $f$ ’.

Is iad seo na cúplaí  $g \circ f$  ón léaráid:  
 $\{(1, 11), (3, 15), (5, 19)\}$ .



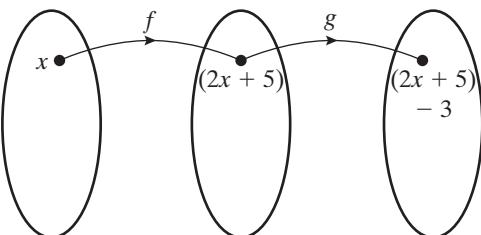
Féachfaimidanois ar dhá fheidhm,  $f(x) = 2x + 5$  agus  $g(x) = x - 3$ , chun an rial a bhainneann leis an bhfeidhm chomhshuite  $gf(x)$  a fháil.

Léirítearnafeidhmeanna seo ar dheis.

In  $f$ , is é  $(2x + 5)$  an t-aschur nuair is é  $x$  an t-ionchur.

Úsáidfimidanois  $(2x + 5)$  mar ionchur don fheidhm  $g$ .

$$\begin{aligned} \text{Ó tá } g(x) &= x - 3, \text{ ansin tá } gf(x) = g(2x + 5) \\ &= (2x + 5) - 3 \quad \dots \text{ ag cur } (2x + 5) \text{ in áit } x \\ gf(x) &= 2x + 2 \end{aligned}$$



Féachfaimidanois ar cad a tharlóidh nuair a athraítear ord na bhfeidhmeanna.

$$\begin{aligned} fg(x) &= f(x - 3) \\ &= 2(x - 3) + 5 \quad \dots \text{ ag cur } (x - 3) \text{ in áit } x \\ fg(x) &= 2x - 1 \end{aligned}$$

Ó tá  $2x + 2 \neq 2x - 1$ , léiríonn sé seo go bhfuil  $gf(x) \neq fg(x)$ .

De ghnáth, más dhá fheidhm iad  $f$  agus  $g$ , ansin  
 $fg(x) \neq gf(x)$ .

### Sampla 1

Glac le  $f(x) = x + 3$  agus  $g(x) = x^2 - 1$ . Faigh

- (i)  $fg(2)$       (ii)  $gf(-1)$       (iii)  $fg(x)$       (iv)  $gf(x)$ .

Freisin, faigh an luach ar  $x$  a fhágann  $fg(x) = gf(x)$ .

- (i)  $fg(2) = f(3) = 6 \quad \dots g(2) = 2^2 - 1 = 3$
- (ii)  $gf(-1) = g(2) = 3$
- (iii)  $fg(x) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1) + 3 = x^2 + 2$
- (iv)  $gf(x) = g(x + 3) = (x + 3)^2 - 1 = x^2 + 6x + 9 - 1$   
 $= x^2 + 6x + 8$

$$\begin{aligned}
 fg(x) = gf(x) &\Rightarrow x^2 + 2 = x^2 + 6x + 8 \\
 0 &= 6x + 6 \\
 \text{i.e. } 6x + 6 &= 0 \\
 6x &= -6 \Rightarrow x = -1
 \end{aligned}$$

**Nóta:** Scríobhtar  $f \circ f(x)$  mar seo:  $f^2(x)$ .

## Sampla 2

Glac le  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$  agus  $h(x) = x^2 - 4$ . Faigh

- (i)  $gf(x)$
- (ii)  $f^2(x)$
- (iii)  $gh(x)$
- (iv)  $h^2(x)$
- (v)  $hfg(x)$
- (vi) na luachanna ar  $x$  a fhágann  $gh(x) = \frac{1}{12}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad gf(x) &= g(2x + 1) & \text{(ii)} \quad f^2(x) &= f(2x + 1) & \dots f^2 = f \circ f \\
 &= \frac{1}{2x + 1} & &= 2(2x + 1) + 1 \\
 & & &= 4x + 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad gh(x) &= g(x^2 - 4) & \text{(iv)} \quad h^2(x) &= h(x^2 - 4) \\
 &= \frac{1}{x^2 - 4} & &= (x^2 - 4)^2 - 4 \\
 & & &= x^4 - 8x^2 + 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(v)} \quad hfg(x) &= hf\left(\frac{1}{x}\right) & \text{(vi)} \quad gh(x) &= \frac{1}{x^2 - 4} \\
 &= h\left(2\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) = h\left(\frac{2+x}{x}\right) & &= \frac{1}{12} = \frac{1}{x^2 - 4} \\
 &= \left(\frac{2+x}{x}\right)^2 - 4 & x^2 - 4 &= 12 \\
 &= \frac{4+4x+x^2-4x^2}{x^2} & x^2 &= 16 \\
 &= \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x} - 3 & x &= \pm 4
 \end{aligned}$$

## Cleachtadh 1.2

1. Má tá  $f(x) = x^2 + 1$  agus  $g(x) = 2x - 1$ , faigh luach gach ceann díobh seo a leanas:
  - (i)  $f(3)$
  - (ii)  $gf(3)$
  - (iii)  $g(3)$
  - (iv)  $fg(3)$
  - (v)  $f^2(3)$
  - (vi)  $g^2(3)$
  - (vii)  $gf(-4)$
  - (viii)  $fg\left(\frac{1}{2}\right)$
2. Is dhá fheidhm iad  $f: x \rightarrow 2x + 1$  agus  $g: x \rightarrow 4x - 3$ .  
 Faigh (i)  $f(3)$       (ii)  $gf(3)$       (iii)  $fg(-2)$       (iv)  $gf(x)$ .  
 Cén luach ar  $x$  a shásáíonn  $fg(x) = 19$  ?

- 3.** Sainítear na feidhmeanna  $f$  agus  $g$  mar seo:

$$f: x \rightarrow 2x - 1 \quad \text{and} \quad g: x \rightarrow x^2 + 2.$$

Faigh (i)  $fg(-2)$       (ii)  $gf\left(\frac{1}{2}\right)$       (iii)  $fg(x)$       (iv)  $gf(x)$ .

Cé na luachanna ar  $x$  a fhágann  $gf(x) = fg(x)$ ?

- 4.** Má tá  $f(x) = 2^{x-1}$  agus  $g(x) = 3 + 4x$ , faigh (i)  $fg(x)$  (ii)  $gf(x)$ .

- 5.** Má tá  $f(x) = 3x^2$  agus  $g(x) = 2x + 1$ , faigh  $fg(x)$ .

Uaidh sin, réitigh an chothromóid  $fg(a) = g(1)$ .

- 6.** Sainítear dhá fheidhm  $f$  agus  $g$  mar seo:  $f(x) = 2x + 3$  agus  $g(x) = 2x - 3$ .

(i) Faigh sloinn le haghaidh  $fg(x)$  agus  $gf(x)$ .

(ii) Oibrigh amach an luach is lú is féidir ar thoradh  $fg(x) \times gf(x)$ .

- 7.** Má tá  $f(x) = 2x + 1$  agus  $g(x) = 3x + c$ ,

(i) faigh  $c$  má tá  $gf(x) = fg(x)$  i gcás gach luacha ar  $x$ .

(ii) Faigh  $m$  má tá  $f^2(m) = m$ .

- 8.** Sainíonn  $f(x) = s + tx$ ,  $g(x) = x^2 - 4$  agus  $h(x) = 3x + 1$  trí fheidhm.

Má tá  $hgf(x) = 4(3x^2 + 3x - 2)$ , faigh na luachanna ar  $s$  agus  $t$  nuair atá  $s, t \in N$ .

- 9.** Sainíonn  $f(x) = \cos x$  agus  $g(x) = x + \frac{\pi}{6}$  na feidhmeanna  $f$  agus  $g$ .

Faigh luach  $fg\left(\frac{\pi}{6}\right)$ .

- 10.** Is mar seo a shainítear na feidhmeanna  $f, g$  agus  $h$ :

$$f(x) = x^2 - x + 10, \quad g(x) = 5 - x \quad \text{agus} \quad h(x) = \log_2 x.$$

(i) Faigh sloinn ar  $hf(x)$  agus  $hg(x)$ .

(ii) Uaidh sin, réitigh  $hf(x) - hg(x) = 3$ .

- 11.** Má tá  $f(x) = 2x + 3$ , faigh (i)  $f^2(x)$  (ii)  $f^3(x)$  (iii)  $f^4(x)$ .

Uaidh sin, faigh slonn ar  $f^n(x)$  i dtéarmaí  $n$ .

- 12.** Sainíonn  $f(x) = x^2 + 1$  agus  $g(x) = 1 - 2x$  na feidhmeanna  $f$  agus  $g$ .

Taispeáin go bhfuil  $gf(x) \neq fg(x)$ .

Cén t-airí de chuid na n-oibríochtaí a léiríonn do thoradh?

- 13.** Tabhair  $f$  agus  $g$  ar fheidhmeanna a shainítear mar seo:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + 1\right), \quad x \neq 0 \quad \text{agus} \quad g(x) = \frac{1}{2x-1}, \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Imscrúdaigh an bhfuil  $fg(x) = gf(x)$ .

- 14.** Sainíonn  $p(x) = (3x - 4)^3$  feidhm.

Má tá  $f(x) = 3x$ ,  $g(x) = x - 4$  agus  $h(x) = x^3$ , taispeáin go bhfuil  $hgf(x) = p(x)$ .

- 15.** Úsáid ar fhoghlaim tú i gCeist 14 chun gach ceann de na hoibríochtaí seo a dhéanamh:
- Má tá  $h(x) = (3x - 1)^2$ , faigh dhá fheidhm  $f$  agus  $g$  sa chaoi go bhfuil  $fg(x) = h(x)$ .
  - Má tá  $h(x) = \frac{1}{5x + 3}$ , faigh dhá fheidhm  $f$  agus  $g$  sa chaoi go bhfuil  $gf(x) = h(x)$ .
  - Má tá  $h(x) = \sin(3x)$ , faigh trí fheidhm  $f, g$  agus  $k$  sa chaoi go bhfuil  $fgk(x) = h(x)$ .
  - Má tá  $b(x) = \cos(\sqrt{2x})$ , faigh faigh trí fheidhm  $f, g$  agus  $h$  sa chaoi go bhfuil  $hgf(x) = b(x)$ .

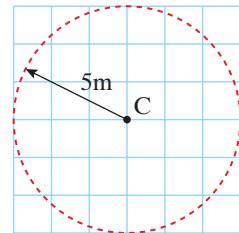
- 16.** Má tá  $f(x) = 2^{x-1}$  agus  $g(x) = 3 + 4x$ , faigh slonn ar  $fg(x)$ .  
Uaidh sin, réitigh an chothromóid  $fg(x) = 64$ .

- 17.** Caitear cloch isteach i C, lár linne.

Cruthaítear tonn agus gluaiseann an tonn fad slí 5 m in 4 shoicind.

Scríobh cothromóid don gha ( $r$ ) mar fheidhm den am ( $t$ ).  
Scríobh cothromóid d'achar an chiorcail a dhéantar

- mar fheidhm de  $r$
- mar fheidhm de  $t$  ag úsáid comhshuíomh feidhmeanna.



- 18.** Faigheann fear díolacháin i gcomhlacht coimisiún 4% ar dhíolacháin ar mhéideanna sa bhrefis ar €4000.

Más é  $\€x$  an meándíolachán sa tseachtain, mínígh na feidhmeanna

- $f(x) = \€0.04x$
- $g(x) = \€(x - 4000)$

Cé acu ceann de na feidhmeanna  $fg(x)$  nó  $gf(x)$  a léiríonn an meánchoimisiún seachtainiúil?

Úsáid an fheidhm chomhshuite chuí chun an coimisiún, ar dhíolacháin a bhfuil luach €8000 orthu, a ríomh.

## Mír 1.3 Cineálacha feidhmeanna

I Mír 1.1 den chaibidil seo, déantar cur síos ar fheidhm mar choibhneas ina bhfuil luach aschuir **uathúil** ar gach luach ionchuir ar leith.

Sa mhír seo, féachfaimid ar chineálacha éagsúla feidhmeanna m.sh. feidhmeanna inteilgeacha, barrtheilgeacha agus détheilgeacha.

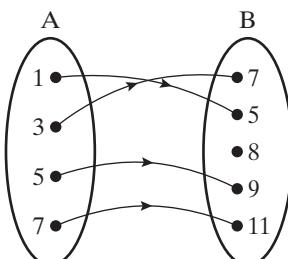
### 1. Feidhmeanna inteilgeacha

Deirtear go mbíonn feidhm  $f$ , ó A go B, **inteilgeach** nó **aon-le-haon** má bhíonn ionchur uathúil in A ag gach aschur in B.

I léaráid mhapála, ní bheidh an t-aschur céanna in B ag aon dá ionchur in A; sin an fáth go n-úsáidtear an nath ‘aon-le-haon’.

**Nóta:** Ní gá go mbeadh ball comhfheagrach san fhearrann ag gach ball sa chomhfhearrann.

Sa léaráid ar dheis, níl ionchur comhfheagrach ag 8; ach fós, léiríonn an léaráid mhapála feidhm inteilgeach.



## Sampláí

1  $f: R \rightarrow R : y = x + 5$ .

Gineann an fheidhm seo cúplaí mar  $(0, 5), (1, 6), (-2, 3), (-7, -2), \dots$

Tá ball comhfheagrach uathúil sa chomhfhearann ag gach ball san fhearrann.

Mar sin, is feidhm inteilgeach í  $f$ .

2 Ní feidhm aon-le-haon í an fheidhm  $f(x) = x^2$  toisc, mar shampla,  $f(-3) = 9$  agus  $f(3) = 9$ ; mar sin, níl ionchur uathúil ag 9.

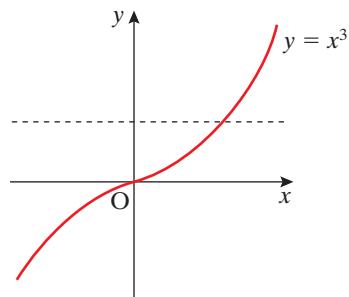
## Triail na líne cothrománaí d'fheidhmeanna inteilgeacha

Taispeánann an léaráid ar dheis

graf  $y = x^3$ .

Más feidhm inteilgeach í  $y = x^3$ ,  
aon líne a tharraingítear comhthreomhar  
leis an  $x$ -ais, ní thrasnóidh sí an cuar  
**ach aon uair amháin, ar a mhéid.**

Taispeánann an léaráid gur feidhm inteilgeach í  $y = x^3$ .



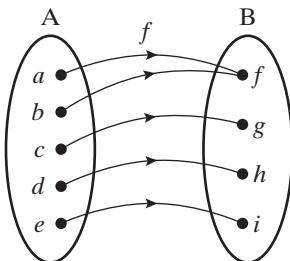
## 2. Feidhmeanna barrtheilgeacha (móran-le-haon)

Bíonn feidhm  $f$  **barrtheilgeach** más íomhá é **gach** ball den chomhfhearann de bhall amháin **ar a laghad** den fhearrann.

Is bealach eile é an nath ‘A a mhapáil **ar** B’ chun cur síos a dhéanamh ar fheidhm bharrtheilgeach.

Ní fhágtaí aon bhall den chomhfhearann gan é a úsáid.  
Mar sin, is ionann an raon agus an comhfhearann.

I gcás feidhm ar bith  $f$ , más ionann an raon agus an comhfhearann, is feidhm bharrtheilgeach í.

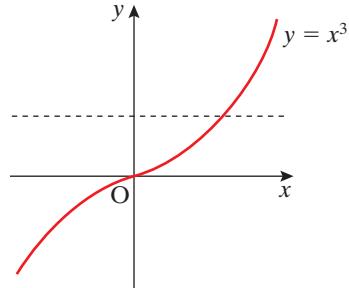


## Triail na líne cothrománaí d'fheidhmeanna barrtheilgeacha

Féach ar an bhfeidhm  $f: R \rightarrow R$ .

Má tá  $f$  barrtheilgeach, caithfidh gach líne chothrománach a tharraingítear an graf a thrasnú **uair amháin ar a laghad**.

Tá an fheidhm  $y = x^3$  barrtheilgeach, áit a bhfuil  $x \in R$ , mar go dtrasnaíonn gach líne chothrománach an graf uair amháin ar a laghad.



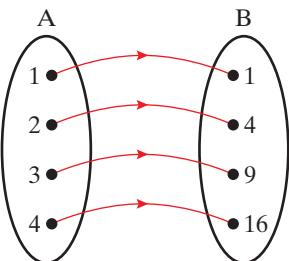
### 3. Feidhmeanna détheilgeacha

Bíonn feidhm  $f$  détheilgeach má bhíonn aon bhall amháin  $x$ , go díreach, in A do gach ball in B, sa chaoi go bhfuil  $f(x) = y$ .

Mar sin, bíonn feidhm dhétheilgeach inteilgeach agus barrtheilgeach freisin.

Sa léaráid, feictear go bhfuil meaits beacht aon-le-haon idir na baill in A agus B.

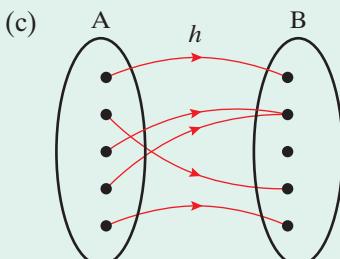
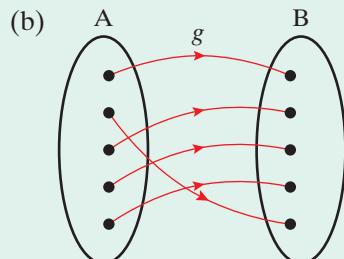
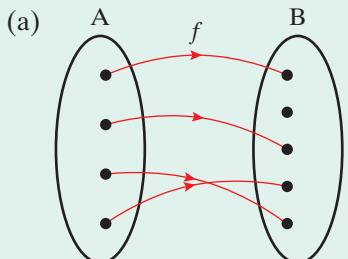
Tá an fheidhm seo détheilgeach.



#### Sampla 1

Abair an bhfuil na mapaí  $A \rightarrow B$

- (i) ina bhfeidhmeanna
  - (ii) inteilgeach
  - (iii) barrtheilgeach
  - (iv) détheilgeach.
- Tabhair cúiseanna le do chuid freagraí.



- (a) Is feidhm é  $f$ ; níl ach aon saighead amháin ó gach ball in A.

Tá  $f$  inteilgeach; ní mhapálann aon bhall in A ach ar bhall amháin in B.

Níl  $f$  barrtheilgeach; tá ball in B nach bhfuil i raon  $f$ .

Níl  $f$  détheilgeach mar níl sí inteilgeach agus barrtheilgeach araon.

- (b) Is feidhm é  $g$ ; níl ach aon saighead amháin ó gach ball in A.

Tá  $g$  inteilgeach; ní mhapálann aon bhall in A ach ar bhall amháin in B.

Tá  $g$  barrtheilgeach; is íomhá ball éigin in A é gach ball in B.

Mar sin, tá  $g$  détheilgeach.

- (c) Is feidhm é  $h$ ; níl ach aon saighead amháin ó gach ball in A.

Níl  $h$  inteilgeach; mapálann níos mó ná aon bhall amháin in A ar an mball céanna in B.

Níl  $h$  barrtheilgeach; níl gach ball in B i gceist sa mhapáil.

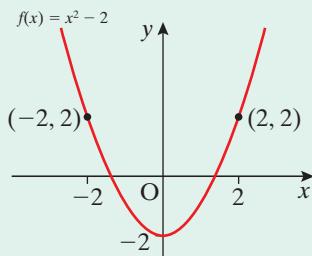
Níl  $h$  détheilgeach.

## Sampla 2

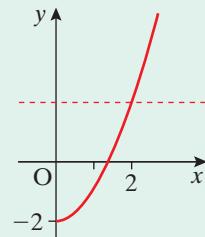
Léirítear graf na feidhme

$$f: R \rightarrow R : x \rightarrow x^2 - 2.$$

- (i) Cad é raon  $f$ ?
- (ii) Mínigh an fáth nach bhfuil  $f$  inteilgeach.
- (iii) Mínigh an fáth nach bhfuil  $f$  barrtheilgeach.
- (iv) Mol fearann do  $f$  a dhéanfadh feidhm inteilgeach aisti.
- (v) Mol comhfhearrann do  $f$  a dhéanfadh feidhm bharrtheilgeach aisti.



- (i) Is é  $y = -2$  an  $y$ -luach is ísle ar an bhfeidhm ghrafta.  
 $\therefore$  Is é  $y \geq -2$  nó  $[-2, \infty)$  raon  $f$ .
- (ii) Níl  $f$  inteilgeach mar go dtrasnóidh aon líne chothrománach sa raon tugtha an cuar ag níos mó ná aon phointe amháin.  
[NÓ: mapáltear  $-2$  ar  $2$ , agus mapáltear  $2$  ar  $2$  freisin  
Mar sin, níl aschur uathúil ann do gach ionchur.]
- (iii) Níl  $f$  barrtheilgeach mar gurb é  $y \geq -2$  raon  $f$  agus  $R$  comhfhearrann  $f$ .  
Toisc nach bhfuil an comhfhearrann agus an raon comhionann, níl  $f$  barrtheilgeach.
- (iv) Má bhíonn an fearann teoranta do  $x \geq 0$ ,  
gheobhaimid an graf a léirítear ar dheis.  
Toisc nach dtrasnóidh líne chothrománach an graf seo ach ag aon phointe amháin, tá an fheidhm seo inteilgeach.
- (v) Má bhíonn comhfhearrann  $f$  teoranta do  $y \geq -2$ ,  
beidh an comhfhearrann agus an raon comhionann.  
Mar sin, beidh an fheidhm barrtheilgeach.

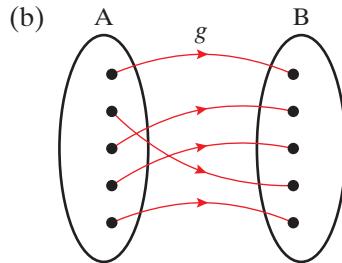
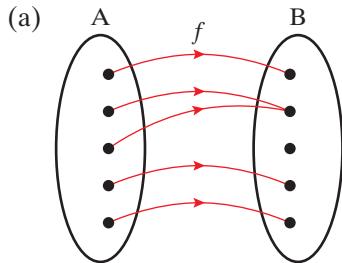


## Cleachtadh 1.3

1. Abair an bhfuil na mapaí seo a leanas

- (i) ina bhfeidhmeanna      (ii) inteilgeach      (iii) barrtheilgeach.

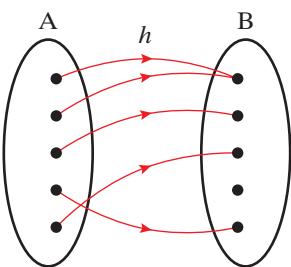
Tabhair cúis le do fheregra i ngach cás.



Mínigh an fáth a bhfuil  $g$  détheilgeach.

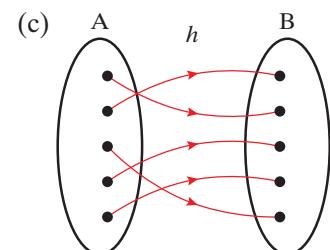
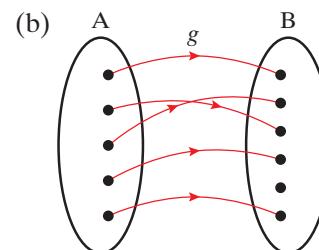
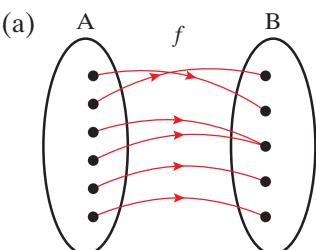
2. Léirítear an fheidhm  $h$  ó thacar A go tacar B.

- (i) An feidhm é  $h$ ? Mínigh.
- (ii) An bhfuil  $h$  inteilgeach? Mínigh.
- (iii) An bhfuil  $h$  barrtheilgeach? Mínigh.
- (iv) Mínigh an fáth nach bhfuil  $h$  détheilgeach.



3. I gcás na dtrí léaráid mhapála a thaispeántar thíos, tá ceann acu inteilgeach, tá ceann acu barrtheilgeach agus tá ceann acu détheilgeach.

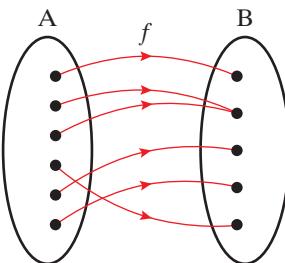
Ceangail gach mapa le ceann de na lipéid seo.



4. An dtaispeánann an léaráid mhapála ar dheis

- (i) feidhm
- (ii) feidhm inteilgeach
- (iii) feidhm bharrtheilgeach?

Mínigh an fáth nach bhfuil  $f$  détheilgeach.

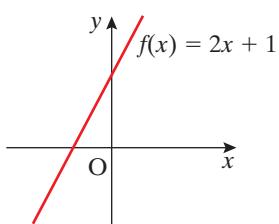


5. Abair an (i) feidhm (ii) feidhm inteilgeach é gach ceann de na coibhneasa seo a leanas:

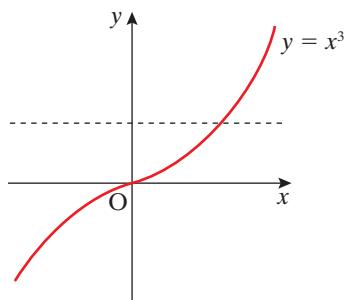
- |  |   |
|--|---|
| (a) $\{(2, 3), (3, 4), (5, 4), (4, 6)\}$         | (b) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 6)\}$                  |
| (c) $\{(1, 2), (3, 2), (4, 2), (9, 4), (9, 3)\}$ | (d) $\{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (5, 1)\}$          |
| (e) $\{(0, -1), (-1, 2), (-2, 0), (-3, 1)\}$     | (f) $\{(5, 5), (4, 3), (3, 1), (2, -1), (1, 2), (0, 3)\}$ |

6. Léirítear graf na feidhme  $f(x) = 2x + 1$ .

Mínigh an fáth a bhfuil  $f$  inteilgeach agus barrtheilgeach araon.



7. Úsáid triail na líne cothrománaí chun a fháil amach an léiríonn an graf ar dheis
- feidhm inteilgeach
  - feidhm bharrtheilgeach.

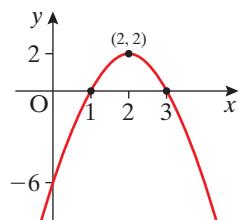


8. Léirítear graf na feidhme  $f: R \rightarrow R$  ar dheis.

- Cad é raon na feidhme grafta?
- Cad é comhfhearrann  $f$ ?
- Cuir an comhfhearrann agus an raon i gcomparáid le chéile agus, uaidh sin, mínígh an fáth nach bhfuil  $f$  barrtheilgeach.
- Mol teorainn don chomhfhearrann a fhágfaidh gur feidhm bharrtheilgeach é  $f$ .
- Úsáid triail na líne cothrománaí chun a thaispeáint nach bhfuil  $f$  inteilgeach.
- Mol teorainn leis an bhfearann a d'fhágfadh gur feidhm inteilgeach é  $f$ .

9. Léirítear graf feidhm chearnach  $g(x): R \rightarrow R$ .

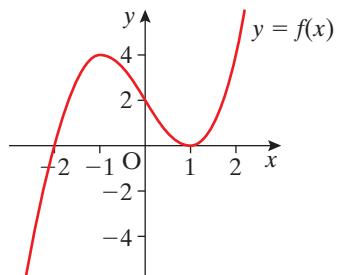
- An feidhm inteilgeach é  $g(x)$ . Mínigh?
- An feidhm bharrtheilgeach é  $g(x)$  sa raon  $y \leq 2$ ? Mínigh.
- Mol teorainn leis an bhfearann a d'fhágfadh gur feidhm inteilgeach é  $g(x)$ .



10. Úsáid triail na líne cothrománaí chun a fháil amach an bhfuil an fheidhm  $y = f(x)$

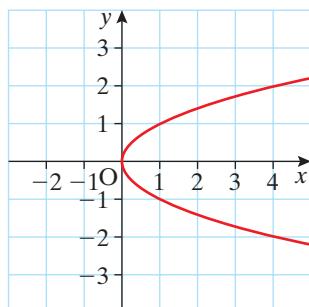
- inteilgeach
- barrtheilgeach.

An bhfuil an fheidhm détheilgeach? Mínigh.



11. Mínigh an fáth nach léiríonn an graf ar dheis feidhm.

Mol teorainn leis an raon a d'fhágfadh go léireodh an graf feidhm.

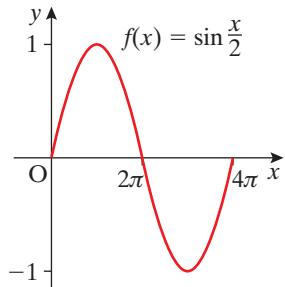


**12.** Sainíodh  $f: N \rightarrow N: x \rightarrow 2x$  feidhm.

- (i) Cad é fearann  $f$ ?
- (ii) Cad é comhfhearrann  $f$ ?
- (iii) Cad é raon  $f$ ?
- (iv) Ag úsáid an chomhfhearrainn agus an raoin, mínígh an fáth nach feidhm bharrtheilgeach é  $f$ .
- (v) An feidhm aon-le-haon é  $f$ ?
- (vi) Mol teorainn leis an gcomhfhearrann a d'fhágfadh gur feidhm bharrtheilgeach é  $f$ .

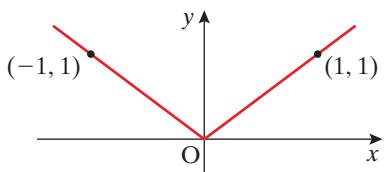
**13.** Léiríonn an graf ar dheis an fheidhm  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ .

- (i) An léiríonn an graf feidhm inteilgeach? Mínigh.
- (ii) An léiríonn an graf feidhm bharrtheilgeach sa raon tugtha? Mínigh.
- (iii) Mol fearann teoranta a d'fhágfadh gur feidhm inteilgeach é.



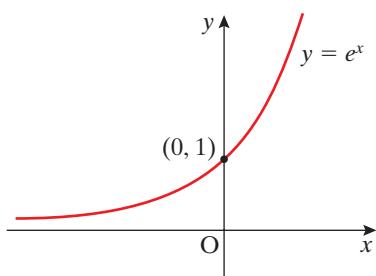
**14.** Ar dheis tá graf  $R \rightarrow R^+: f(x) = |x|$ .

- (i) An bhfuil  $f$  barrtheilgeach? Mínigh.
- (ii) An bhfuil  $f$  inteilgeach? Mínigh.
- (iii) Mol fearann agus raon teoranta a d'fhágfadh go mbeadh  $f$  détheilgeach.



**15.** Taispeánann an léaráid ar dheis graf na feidhme  $y = e^x$ .

- (i) Scríobh síos raon na feidhme.
- (ii) An bhfuil an fheidhm inteilgeach? Mínigh.
- (iii) An bhfuil an fheidhm barrtheilgeach sa raon  $y > 0$ ?
- (iv) Mínigh an fáth a bhfuil an fheidhm détheilgeach i gcás  $x \in R$  agus  $y > 0$ .



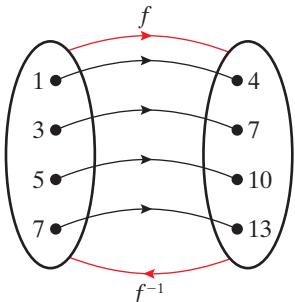
## Mír 1.4 Feidhmeanna inbhéartacha

Sna míreanna thuas, chonaiceamar go ngineann feidhm tacar  $y$ -luachanna, ar a dtugtar an raon, ó thacar  $x$ -luachanna, ar a dtugtar an fearann.

Sa mhír seo, beimid ag plé le malairt an chur chuige sin, i.e. baill an fhearrainn a fháil nuair a thugtar baill an raoin dúinn.

Sa léaráid mhapála ar dheis, is iad seo cúplaí  $f$ :

$$f = (1, 4), (3, 7), (5, 10), (7, 13)$$



Má aisiompaímid na cúplaí seo, gheobhaimid feidhm nua ar a dtugtar  $f^{-1}$ .

Deirtear gurb é  $f^{-1}$  **feidhm inbhéartach**  $f$ .

Ón léaráid mhapála,  $f^{-1} = (4, 1), (7, 3), (10, 5), (13, 7)$ .

I gcás gach cúpla  $(a, b)$  a ghineann  $f$ , ginfidh  $f^{-1}$  an cúpla  $(b, a)$ .

Mar sin, gineann  $f$  agus  $f^{-1}$  pointí ar frithchaithimh iad dá chéile sa líne  $y = x$ .

**Nóta:** Mar a fheictear sa léaráid, ní bhíonn inbhéarta ag feidhm  $f$  ach amháin más feidhm dhétheilgeach é, i.e. caithfidh an feidhm a bheith aon-le-haon.

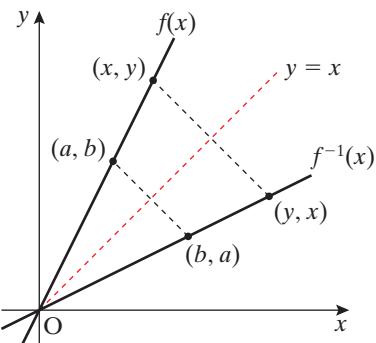
Féach ar an bhfeidhm  $f(x) = x^2$ .

Is cúplaí iad  $(2, 4)$  agus  $(-2, 4)$  de  $f$ .

Mar sin, is cúplaí iad  $(4, 2)$  agus  $(4, -2)$  de  $f^{-1}$ .

Taispeánann sé seo nach feidhm é  $f^{-1}$  mar nach bhfuil aschur **uathúil ag** an ionchur 4.

Mar nach bhfuil  $f(x) = x^2$  détheilgeach, níl inbhéarta aige.



## Conas inbhéarta feidhme a aimsiu

Bíodh  $f(x) = 3x - 2$

$$\Rightarrow y = 3x - 2$$

$$3x = y + 2$$

$$x = \frac{y+2}{3} \quad \dots \text{sloinn } x \text{ i dtéarmaí } y$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} \quad \dots \text{cuir } x \text{ in áit } y$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} \text{ feidhm inbhéartach } f(x).$$

Is féidir linn a fhíorú go bhfuil an feidhm inbhéartach ceart ach a thaispeáint go bhfuil  $f(3) = 7$  agus  $f^{-1}(7) = 3$ .

### Sampla 1

- (i) Má tá  $f(x) = 5x - 3$ , faigh  $f^{-1}(x)$ .
- (ii) Uайдh sin, taispeán go bhfuil  $f^{-1}f(x) = x$ .

$$(i) \text{ Bíodh } y = 5x - 3$$

$$5x = y + 3$$

$$x = \frac{y+3}{5}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+3}{5}$$

$$(ii) \quad f^{-1}f(x) = f^{-1}(5x - 3)$$

$$= 5\left(\frac{x+3}{5}\right) - 3$$

$$= x + 3 - 3$$

$$= x$$

I Sampla 1 thusas, léiríodh go bhfuil  $f^{-1}f(x) = x$ .

Is féidir a léiriú freisin go bhfuil  $ff^{-1}(x) = x$ .

I gcás aon dá fheidhm  $f$  agus  $f^{-1}$ ,

$$(i) \ ff^{-1}(x) = x.$$

$$(ii) \ f^{-1}f(x) = x.$$

## Sampla 2

Taispeánann an léaráid ar dheis frithchaitheamh an chuair  $f(x) = x^3 + 1$  sa líne  $y = x$ .

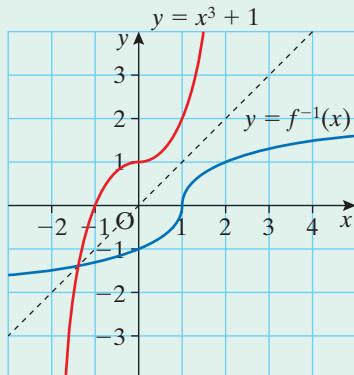
Faigh cothromóid  $f^{-1}(x)$ .

$$\text{Bíodh } y = x^3 + 1$$

$$x^3 = y - 1 \quad \dots \text{faigh } x \text{ i dtéarmaí } y$$

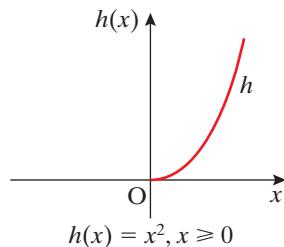
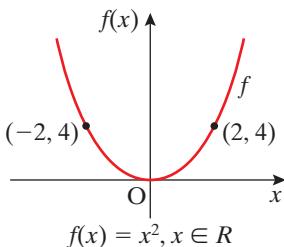
$$x = \sqrt[3]{y - 1}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1} \quad \dots \text{athraigh } y \text{ go } x$$



## Fearann teoranta

Féach ar an dá ghraf thíos:



Is feidhm é  $f(x) = x^2, x \in R$  ach níl sé inteilgeach mar go dtrasnóidh líne chothrománach an graf níos mó ná uair amháin. Toisc nach bhfuil sé détheilgeach, níl aon inbhéarta aige.

$h(x) = x^2, x \geq 0$  san fhearrann teoranta  $x \geq 0$ .

Is feidhm dhétheilgeach é  $h(x)$  agus mar sin tá inbhéarta aige.

Is é  $y = \sqrt{x}$ , i gcás  $x \geq 0$ , an fheidhm inbhéartach  $h^{-1}(x)$

Más feidhmeanna inbhéartacha iad  $f$  agus  $f^{-1}$  is é fearann  $f$  raon  $f^{-1}$ .

## Sampla 3

Is feidhm le fearann  $x \geq 2$  é an coibhneas  $f(x) = x^2 - 4x - 4$ .

Faigh  $f^{-1}(x)$  agus scríobh síos a raon.

Bíodh  $y = x^2 - 4x - 4$

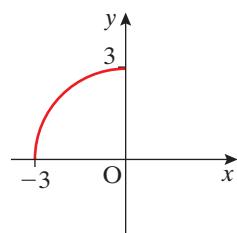
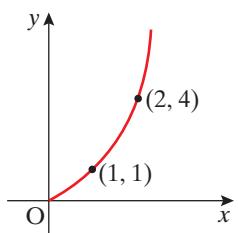
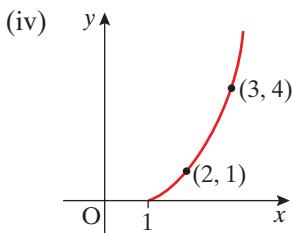
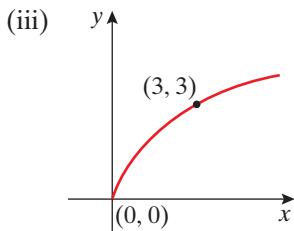
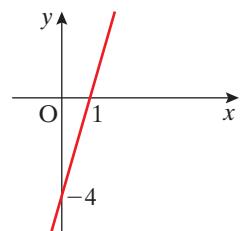
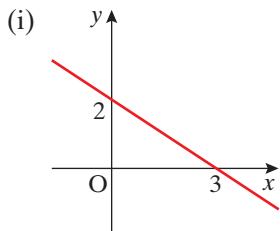
$$\begin{aligned}y &= x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4 \quad \dots \text{ag comhlánú na cearnóige} \\&= x^2 - 4x + 4 - 4 - 4 \\y &= (x - 2)^2 - 8 \\(x - 2)^2 &= y + 8 \\x - 2 &= \sqrt{y + 8} \\x &= 2 + \sqrt{y + 8} \quad \dots \text{ag fáil } x \text{ i dtéarmaí } y \\∴ f^{-1}(x) &= 2 + \sqrt{x + 8} \quad \dots \text{cuir } x \text{ in áit } y \\\text{Is é } y > 2 \text{ raon } f^{-1}(x) &\quad \dots \text{mar an gcéanna le fearann } f\end{aligned}$$

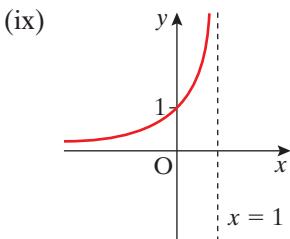
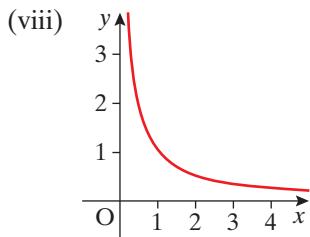
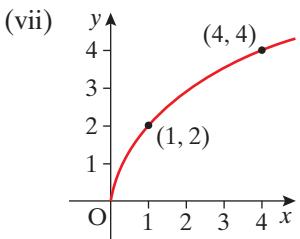
Tóigaimid an luach deimhneach ar  $\sqrt{y + 8}$  mar go bhfuil  $x > 2$ .

## Cleachtadh 1.4

Faigh inbhéarta gach feidhme sna ceisteanna (1–9).

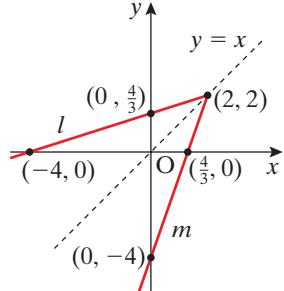
1.  $f(x) = x - 4, x \in R$
2.  $f(x) = 2x - 3, x \in R$
3.  $f(x) = 5x + 3, x \in R$
4.  $f(x) = 3x, x \in R$
5.  $f(x) = \frac{2x}{5}, x \in R$
6.  $f(x) = \frac{4x - 3}{2}, x \in R$
7.  $f(x) = \frac{x - 6}{x}, x \in R$
8.  $f(x) = \frac{3x}{x - 1}, x \in R$
9.  $f(x) = \frac{10 - 2x}{3}, x \in R$
10. Bíodh  $f(x) = 4x + 5, x \in R$ . Faigh  $f^{-1}(x)$ .  
Uaidh sin, taispeáin go bhfuil  $ff^{-1}(x) = x$ .  
Anois imscrúdaigh an bhfuil  $f^{-1}f(x) = ff^{-1}(x)$ .
11. Má tá  $f(x) = \frac{x}{3} - 2$ , faigh  $f^{-1}(x)$  agus uaidh sin, taispeáin go bhfuil  $ff^{-1}(x) = x$ .
12. Cóipeáil gach ceann de na graif a leanas agus, ar na haiseanna céanna, tarraing inbhéarta gach ceann de na feidhmeanna comhfhereagracha:





**13.** Feictear dhá líne  $l$  agus  $m$  sa léaráid ar dheis.

- Faigh cothromóidí  $l$  agus  $m$ .
- Fíoraigh gurb é cothromóid  $l$  inbhéarta chothromóid  $m$ .



**14.** Is é  $g(x) = \frac{1}{x-2}$ ,  $x \in R$  inbhéarta na feidhme  $f(x) = \frac{1+kx}{x}$ ,  $x \in R$ .

Faigh luach  $k$ , áit a bhfuil  $k \in N$ .

**15.** Sainíonn  $f(x) = 2x - 3$  agus  $g(x) = x - 4$  dhá fheidhm.

- Faigh  $gf(x)$  agus  $[gf(x)]^{-1}$ .
- Imscrúdaigh an bhfuil  $[gf(x)]^{-1} = f^{-1}g^{-1}(x)$ .

**16.** Glac le  $f(x) = \frac{x+3}{2}$ ,  $x \in [0, 5]$ . Faigh  $f^{-1}(x)$ .

Tarraing graif  $f(x)$  agus  $f^{-1}(x)$  san fhearrann tugtha agus, ar an gcaoi sin, taispeáin gurb é raon  $f^{-1}(x)$  fearann  $f$ .

Scriobh síos fearann agus raon  $f^{-1}(x)$ .

**17.** I gcás gach ceann díobh seo, comhlánaigh an chearnóg agus, ar an gcaoi sin, faigh an fheidhm inbhéartach.

- |   |  |
|---|--|
| (i) $f(x) = x^2 + 4x - 6$ , $x \geq -2$<br>(iii) $f(x) = x^2 - 8x - 3$ , $x \geq 4$ | (ii) $f(x) = x^2 - 2x - 5$ , $x \geq 1$<br>(iv) $f(x) = x^2 + 8x + 20$ , $x \geq -4$ |
|---|--|

**18.** Glac le  $f(x) = \frac{3-x}{2}$ ,  $-1 \leq x \leq 4$ .

Sceitseáil graf na feidhme tugtha agus, ar na haiseanna céanna, sceitseáil graf na feidhme inbhéartaí.

Scriobh síos fearann agus raon na feidhme inbhéartaí.

**19.** Bíodh  $f: A \rightarrow R$ ,  $f(x) = \sqrt{3-x}$ .

Más é  $A$  tacar na réadluachanna uile ar  $x$  lena sainítear  $f(x)$ , faigh  $A$ .

**20.** Bíodh  $g:[b, 2] \rightarrow R$  áit a bhfuil  $g(x) = 1 - x^2$ .

Más é  $b$  an réadluach is lú sa chaoi go bhfuil feidhm inbhéartach ag  $g$ , faigh  $b$  agus  $g^{-1}(x)$ .

# Mír 1.5 Teorainneacha – Leanúnachas

## Réamheolas ar theorainneacha

Féach ar an seicheamh uimhreacha seo:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$

Má shuimímid an chéad dá uimhir, gheobhaimid  $\frac{3}{4}$ . Má shuimímid an chéad trí uimhir, gheobhaimid  $\frac{7}{8}$ .

Má shuimímid an chéad sé uimhir, gheobhaimid  $\frac{63}{64}$ .

Tabhair faoi deara go ndruideann an toradh níos gaire do 1 de réir mar a shuimímid níos mó téarmaí, ach **nach mbaintear amach** 1 go deo. I gcúrsaí matamaitice, deirimid gurb é 1 an **teorainn le suim na n-uimhreacha seo**.

Féachfaimid anois ar an bhfeidhm  $f(x) = x^2$  agus féachfaimid ar a luach de réir mar a dhruideann  $x$  **aníos le 3** nó anuas le 3.

$$\textcircled{1} \quad f(2) = 4; f(2.5) = 6.25; f(2.75) = 7.5625; f(2.9) = 8.41 \dots$$

$$\textcircled{2} \quad f(4) = 16; f(3.5) = 12.25; f(3.25) = 10.5625; f(3.1) = 9.61 \dots$$

De réir mar a dhruideann  $x$  le 3, druideann luach  $x^2$  le 9.

Deirtear gurb é 9 teorainn  $f(x) = x^2$  de réir mar a **dhruideann**  $x$  le 3.

Is mar seo a scríobhatar é:  $\underset{x \rightarrow 3}{\text{tr}} (x^2) = 9$ .

De ghnáth, úsáidtear an giorrúchán **tr** don fhocal ‘teorainn’.

Sa chás ginearálta, chun teorainn  $\underset{x \rightarrow a}{f(x)}$ , a fháil, cuirimid  $a$  in áit  $x$  san fheidhm.

Mar shampla,  $\underset{x \rightarrow 2}{\text{tr}} \frac{3x+2}{x+4} = \frac{3(2)+2}{2+4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ .

Anois, féach ar  $\underset{x \rightarrow 3}{\text{tr}} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ .

Nuair a chuirimid 3 in áit  $x$ , faighimid  $\frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ .

Tugtar foirm dhochinnithe ar an toradh  $\frac{0}{0}$  mar nach féidir a luach a chinntiú.

Má dhéantar an t-ionadú, agus más é  $\frac{0}{0}$  an freagra, caithfear bealach éigin eile a roghnú chun an teorainn a aimsiú.

An bealach is coitianta ná an t-uimhreoir agus an t-ainmneoir a fhachtóiriú agus ansin roinnt ar an bhfachtóir coiteann.

Mar sin,  $\underset{x \rightarrow 3}{\text{tr}} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \underset{x \rightarrow 3}{\text{tr}} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = \underset{x \rightarrow 3}{\text{tr}} (x+3) = 6$ .

**Nóta:** Tá sé tábhachtach a thuiscint, má tá  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ , ansin nach ann do  $f(3)$ , ach gur ann do  $\underset{x \rightarrow 3}{\text{tr}} (x)$ .

### Nodaireacht teorann

Deir

$$\underset{x \rightarrow a}{\text{tr}} f(x) = p$$

go ndruideann  $f(x)$  le  $p$  de réir mar a dhruideann  $x$  le  $a$ .

## Sampla 1

Faigh luach (i)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 0} \frac{4x+1}{2x+3}$       (ii)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$ .

$$(i) \operatorname{tr}_{x \rightarrow 0} \frac{4x+1}{2x+3} = \frac{0+1}{0+3} = \frac{1}{3}$$

$$(ii) \left[ \operatorname{tr}_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{4+2-6}{2-2} = \frac{0}{0} \quad \dots \text{fórm dhochinnithe} \right]$$

Fachtóirímid an t-uimhreoiranois:

$$\therefore \operatorname{tr}_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \operatorname{tr}_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)} = \operatorname{tr}_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5$$

## Teorainn feidhme de réir mar $x \rightarrow \infty$

Sa sampla thuas, d'fhéachamar ar theorainn feidhme de réir mar a dhruid athróg le huimhir sheasta. Anois, féachfaimid ar theorainn feidhme de réir mar a dhruideann teorainn na feidhme leis an éigríoch.

Seasann an tsiombail  $\infty$  don éigríoch.

Anois féach ar  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \right)$ .

Nuair atá  $x = 10, \frac{1}{x} = \frac{1}{10} = 0.1$ . Nuair atá  $x = 1000, \frac{1}{x} = \frac{1}{1000} = 0.001$ .

Nuair atá  $x = 1,000,000, \frac{1}{x} = \frac{1}{1,000,000} = 0.000001$ .

Léiríonn na samplaí seo go laghdaíonn luach  $\frac{1}{x}$  de réir mar a mhéadaíonn luach  $x$ , agus go ndruideann sé le nialas.

$$\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Más uimhir sheasta ar bith  $k$  é an t-uimhreoir, is é nialas  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x}$  freisin.

Ó tá  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , is léir go bhfuil  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$  agus  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^2} = 0$ , áit a bhfuil  $k \in R$ .

## Sampla 2

Faigh luach (i)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{2x+3}$       (ii)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x+4}{5x^2+4x-3}$

(I samplaí den sórt seo, roinnimid an t-uimhreoir agus an t-ainmneoir ar an gcumhacht is airde atá ag  $x$  sa slonn agus ansin úsáidimid  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  nó  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x} = 0$  chun luach theorainn na feidhme a fháil.)

$$\text{(i)} \operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{2x + 3} = \operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} \\ = \frac{4 + 0}{2 + 0} = 2 \quad \dots \left( \operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x} = 0 \right)$$

$$\text{(ii)} \operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 4}{5x^2 + 4x - 3} = \operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^2}} \quad \dots \text{roinn gach téarma ar } x^2 \\ = \frac{3 - 0 + 0}{5 + 0 - 0} = \frac{3}{5}$$

## Teorainneacha agus fánaí

Sa chéad chaibidil eile ar an gcalcalas difreálach, beidh orainn  $\operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  a fháil má theastaíonn uainn fánaí tadhlaí le cuar a fháil ag pointe ar bith ar an gcuar.

### Sampla 3

Faigh  $\operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  ag glacadh le (i)  $f(x) = 4x - 5$       (ii)  $f(x) = x^2 + 1$ .

$$\text{(i)} \quad f(x) = 4x - 5$$

$$f(x+h) = 4(x+h) - 5 \\ f(x+h) - f(x) = 4(x+h) - 5 - (4x - 5) \\ = 4x + 4h - 5 - 4x + 5 \\ = 4h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{4h}{h} = 4$$

$$\operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} 4 = 4$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = x^2 + 1$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 1 \\ f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1) \\ = x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1 \\ = 2xh + h^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$\operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

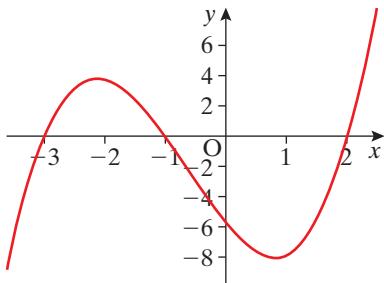
## Leanúnachas

Deirtear go bhfuil an fheidhm  $f(x)$  **leanúnach** nuair atá  $x = a$  más féidir graf  $y = f(x)$  a tharraingt tríd an bpointe ag a bhfuil na comhordanáidí  $(a, f(a))$  gan bhriseadh.

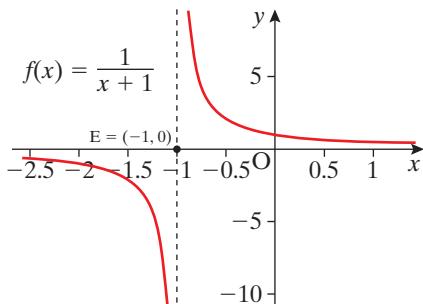
Diomaite de sin, deirtear go bhfuil **neamhleanúnachas** ag  $x = a$ .

Is feidhmeanna leanúnacha iad formhór na bhfeidhmeanna lena mbeimid ag plé ar an gcúrsa seo.

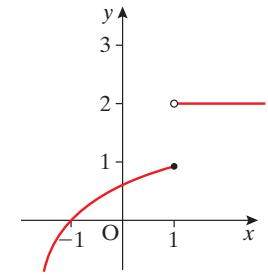
Tá an graf ar dheis leanúnach mar gur féidir é a rianú gan aon léim ná briseadh i.e. ní gá an peann a ardú ón leathanach.



Féach ar an dá ghraf thíos:



Neamhleanúnachas ag  $x = -1$



Neamhleanúnachas ag  $x = 1$

Thuas ar chlé, tá graf na feidhme  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .

De réir mar a dhruideann  $x$  aníos le  $-1$ , laghdaíonn luach na feidhme go tapa.

De réir mar a dhruideann  $x$  anuas le  $-1$ , méadaíonn luach na feidhme go tapa.

Ní féidir  $f(-1)$  a fháil mar  $f(-1) = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0}$ , rud atá neamhshainithe.

Deirimid nach bhfuil an fheidhm leanúnach ag  $x = -1$ .

Tabhair faoi deara go ndruideann an cuar le  $x = -1$  ach nach mbaineann sé amach an líne riagh.

Deirimid gur **asamtóit** leis an gcuar í an líne  $x = -1$ .

Ar an gcaoi chéanna, léiríonn an graf thuas ar dheis briseadh ag  $x = 1$ .

Arís, deirimid nach bhfuil an cuar leanúnach ag  $x = 1$ .

Tugtar sainmhíniú níos foirmeálta ar leanúnachas thíos:

Bíonn feidhm  $f$  leanúnach ag  $x = a$  má bhíonn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

## Sampla 4

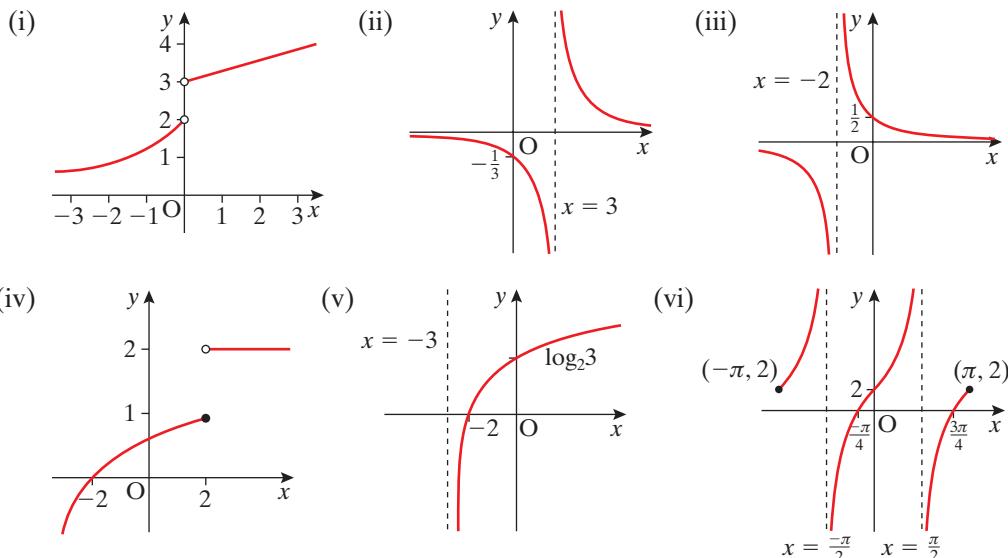
Léirigh nach bhfuil  $f(x) = \frac{3}{x-3}$  leanúnach ag  $x = 3$ .

$$f(x) = \frac{3}{x-3} \Rightarrow f(3) = \frac{3}{3-3} = \frac{3}{0}, \text{ rud atá neamhshainithe.}$$

Ó tá  $f(3)$  neamhshainithe, níl luach réadach ar  $f(x)$  ag  $x = 3$ .  
Mar sin, níl  $f(x)$  leanúnach ag  $x = 3$ .

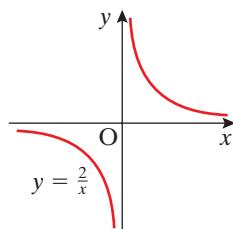
## Cleachtadh 1.5

1. Trí na graif thíos a scrúdú, scríobh síos luach(anna)  $x$ , más ann díobh, ag a bhfuil neamhleanúnachas san fheidhm:



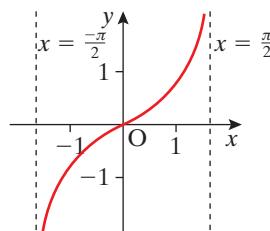
2. Léirítear sceitse den fheidhm  $y = \frac{2}{x}$ .

- (i) Cén luach ar  $x$  ag a bhfuil an fheidhm neamhleanúnach?  
(ii) Úsáid teorainneacha chun míniú a thabhairt ar an bhfáth a bhfuil an fheidhm neamhleanúnach ag an bpointe seo.



3. Léirítear graf na feidhme  $y = \tan x$ .

Úsáid do chuid eolais ar an triantánacht chun míniú a thabhairt ar an bhfáth nach bhfuil an fheidhm leanúnach ag  $x = \frac{\pi}{2}$ .



- 4.** Cén luach/ cé na luachanna ar  $x$  ag a bhfuil gach ceann de na feidhmeanna seo neamhleanúnach?
- (i)  $f(x) = \frac{2}{x-4}$       (ii)  $f(x) = \frac{x}{(x+5)(x-5)}$       (iii)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$
- 5.** Faigh luach na dteorainneacha seo:
- (i)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2}$       (ii)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x - 4)$       (iii)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 3}{x + 1}$
- 6.** Faigh luach gach ceann de na teorainneacha seo:
- (i)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x-2}$       (ii)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 0} \frac{6x-3}{2+x}$       (iii)  $\operatorname{tr}_{h \rightarrow 2} \frac{h^2 + 2h - 6}{h+1}$
- 7.** Faigh luach gach ceann de na teorainneacha seo:
- (i)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$       (ii)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$       (iii)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$   
 (iv)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$       (v)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$       (vi)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 - x - 12}$
- 8.** Tríd an tábla seo a chomhlánú, léirigh go bhfuil teorainn ag  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ , de réir mar  $x \rightarrow 3$  agus scríobh síos a luach.
- | $x$    | 2.5 | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 2.9999 | 3.0000 | 3.0001 | 3.001 | 3.1 | 3.5 |
|--------|-----|-----|------|-------|--------|--------|--------|-------|-----|-----|
| $f(x)$ |     |     |      |       |        |        |        |       |     |     |
- 9.** Scríobh síos luach gach ceann de na teorainneacha seo:
- (i)  $f(x) = \frac{1}{x}$       (ii)  $f(x) = \frac{4}{3x}$       (iii)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$       (iv)  $f(x) = \frac{k}{x^3}$
- 10.** Faigh luach gach ceann de na teorainneacha seo a leanas:
- (i)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{2x+3}$       (ii)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{7x-6}$       (iii)  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x}{4x+2}$
- 11.** Faigh luach gach ceann de na teorainneacha seo:
- (i)  $\operatorname{tr}_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{3n-4n}$       (ii)  $\operatorname{tr}_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{2n-6n+5}$       (iii)  $\operatorname{tr}_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3n+2}{6n+5n-6}$
- 12.** Tugann fána  $= \operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  fána na feidhme  $y = f(x)$ .  
 Faigh fána gach ceann de na feidhmeanna seo:
- (i)  $f(x) = 2x - 3$       (ii)  $f(x) = x^2$       (iii)  $f(x) = x^2 + 5$
- 13.** Ag glacadh le  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ , faigh luach  $\operatorname{tr}_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^3 - 27}$ .

14. Tríd an tábla seo a chomhlánú, faigh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

$n$	1	2	5	10	100	1,000	10,000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$							

Ba cheart go dtabharfadh teorainn na feidhme seo neaslach ar  $e$ .

## Mír 1.6 Graif feidhmeanna a sceitseáil

Sa staidéar atá déanta againn go dtí seo ar an ailgéabar, d'fhoghlaímíomar conas tábla d'ordphéirí a chruthú agus ansin, na pointí seo a bhreacadh agus graf na feidhme a tharraingt.

Sa mhír seo, taispeánfaimid conas sceitse garbh de ghraf a tharraingt trí dhíriú ar chruth an ghraif, chomh maith le príomhghhnéithe an ghraif.

I measc na ngnéithe tábhachtacha de ghraf ar bith tá

- cruth ginearálta an ghraif, e.g. graf feidhm chearnach
- an pointe / na pointí ag a dtrasnaíonn an graf an  $x$ -ais agus an  $y$ -ais
- pointí casaidh graf cearnach agus graf ciúbach.

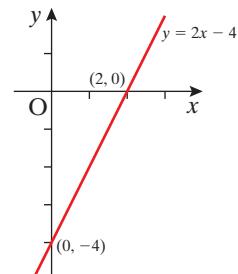
### 1. Feidhmeanna líneacha

Is féidir graf líne ar nós  $y = 2x - 4$  a tharraingt ach na pointí ag a dtrasnaíonn an líne an  $x$ -ais agus an  $y$ -ais a fháil.

Nuair atá  $x = 0$ ,  $y = 2(0) - 4$ , i.e.  $y = -4$ .

Nuair atá  $y = 0$ ,  $2x - 4 = 0$ , i.e.  $x = 2$ .

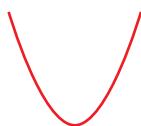
∴ is pointí ar an líne iad  $(0, -4)$  agus  $(2, 0)$ .



### 2. Feidhmeanna cearnacha

Is é  $f(x) = ax^2 + bx + c$  an fhoirm ginearálta a bhíonn ar **fheidhm chearnach**, áit ar tairisigh iad  $a, b$  agus  $c$  agus  $a \neq 0$ .

Nuair atá  $a > 0$ , bíonn an chuma seo ar an ngraf  $f(x)$ :



An **t-íospointe** a thugtar ar an bpointe is ísele ar an gcuar.

Nuair atá  $a < 0$ , bíonn an chuma seo ar an ngraf  $f(x)$ :



An **t-uaspointhe** a thugtar ar an bpointe is airde ar an gcuar.

Chun sceitse garbh a tharraingt d'fheidhm chearnach, is gá na pointí seo a bheith againn:

- na pointí ag a dtrasnaíonn an graf an  $x$ -ais agus an  $y$ -ais
- pointí casaidh an chuair.

Is féidir pointe casaidh an chuair a fháil ar cheachtar den dá mhodh seo:

- (i) an fheidhm a shloinneadh mar **chearnóg chomhlánaithe**, nó
- (ii) an calcalas a úsáid. (Léireofar é seo i gcaibidil 3.)

Seo sampla den chaoi inar féidir feidhm chearnach a shloinneadh mar ‘chearnóg chomhlánaithe’.

$$\begin{aligned} & x^2 - 8x + 9 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 16 + 9 \quad \dots \text{suimigh agus dealaigh (leath chomhéifeacht } x)^2 \\ &= (x - 4)^2 - 7 \end{aligned}$$

Is é  $(4, -7)$  an pointe casaidh.

Is é  $x = 4$  ais na siméadrachta.

**Nóta:** Tabharfaidh an calcalas bealach níos tapúla agus níos éasca duit chun pointe casaidh feidhm chearnach a aimsiú.

Maidir leis an bhfeidhm

$$y = k(x - p)^2 + q,$$

› is é  $(p, q)$  an pointe casaidh

› is é  $q$  an t-íosluach.

### Sampla 1

Trí na pointí ag a dtrasnaíonn an cuar an  $x$ -ais agus an  $y$ -ais a fháil, agus an pointe casaidh a fháil, tarraing sceitse de ghraf  $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ .

$$\begin{aligned} & -x^2 + 4x + 5 \\ &= -[x^2 - 4x - 5] \\ &= -[x^2 - 4x + 4 - 4 - 5] \quad \dots \text{suimigh agus dealaigh (leath chomhéifeacht } x)^2 \\ &= -[(x - 2)^2 - 9] \\ &= -(x - 2)^2 + 9 \end{aligned}$$

∴ Is é  $(2, 9)$  an pointe casaidh.

Chun a fháil amach cá dtrasnaíonn an cuar an  $x$ -ais, réitímid an chothromóid

$$\begin{aligned} & -x^2 + 4x + 5 = 0 \\ \Rightarrow & x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ nó } x = 5 \end{aligned}$$

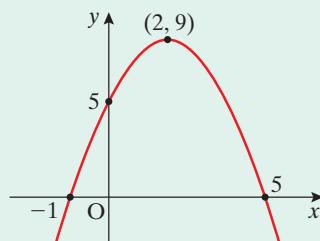
Trasnaíonn an cuar an  $x$ -ais ag  $x = -1$  agus ag  $x = 5$ .

Chun a fháil amach cá dtrasnaíonn an cuar an  $y$ -ais, bíodh  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} & y = -x^2 + 4x + 5 \\ & x = 0 \Rightarrow y = 0 + 0 + 5, \text{ i.e. } 5 \end{aligned}$$

Trasnaíonn an cuar an  $y$ -ais ag  $(0, 5)$ .

Taispeántar sceitse den chuar.

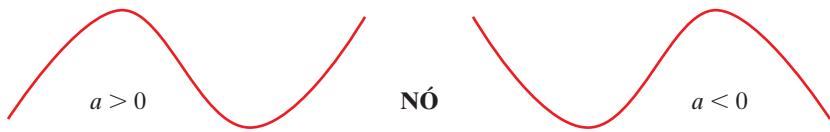


## 3. Feidhmeanna ciúbacha

De ghnáth, bíonn feidhm chiúbach san fhoirm

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ áit a bhfuil } a, b, c \text{ agus } d \in R.$$

Is é a bhíonn i ngraf feidhm chiúbach  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , de ghnáth ná cuar réidh ar a bhfuil dhá phointe casaidh, mar atá le feiceáil thíos:



Nuar atá  $a > 0$ , ardaíonn an graf ar dtús ó chlé go deas.

Nuar atá  $a < 0$ , titeann an graf ar dtús ó chlé go deas.

Féadaimid graf feidhm chiúbach a sceitseáil ach na pointí ag a dtrasnaíonn an cuar na haiseanna, agus na pointí casaidh, a fháil.

(Foghlaimeoidh tú níos mó faoi phointí casaidh i gCaibidil 3.  
Sa mhír seo, ní dhíreoiríodh ar na pointí casaidh.)

## Sampla 2

Tarraing sceitse den ghraf  $y = x(x + 1)(x - 2)$ .

$$\begin{aligned}y &= x(x + 1)(x - 2) \\ \Rightarrow y &= x^3 - x^2 - 2x\end{aligned}$$

... beidh an cruth seo ar an ngraf mar go bhfuil comhéifeacht  $x^3$  deimhneach.

$$\begin{aligned}y &= x(x + 1)(x - 2) \\ y &= 0 \Rightarrow x(x + 1)(x - 2) = 0 \\ \Rightarrow x &= 0, x = -1 \text{ nó } x = 2 \quad \dots \text{réitigh le haghaidh } x\end{aligned}$$



∴ Trasnaíonn an cuar an  $x$ -ais ag

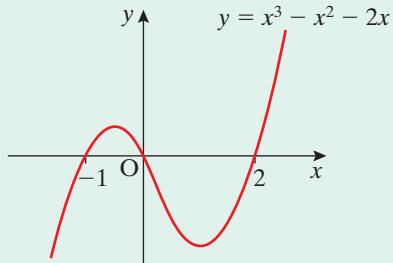
$$x = 0, x = -1, x = 2.$$

Bíodh  $x = 0$  chun a fháil amach cá dtrasnaíonn an cuar an  $y$ -ais.

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

∴ Trasnaíonn an cuar an  $y$ -ais ag  $(0, 0)$ .

Taispeántar sceitse den chuar ar dheis.



### Sampla 3

Tarraing sceitse den ghraf  $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$ .

Ar dtús, déanaimid fachtóiriú ar  $f(x)$  chun na pointí ag a dtrasnaíonn an cuar an  $x$ -ais a fháil.

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$$

$$f(1) = -1 - 2 + 5 + 6 \neq 0$$

$$f(-1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

∴ Is fachtóir é  $(x + 1)$  de  $f(x)$

Ach é a roinnt,  $y = (x + 1)(-x^2 - x + 6)$

$$y = -(x + 1)(x^2 + x - 6)$$

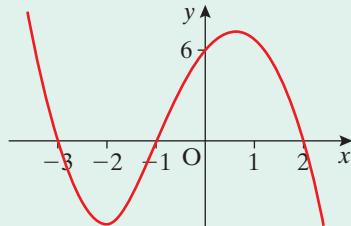
$$y = -(x + 1)(x + 3)(x - 2)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -1, -3 \text{ nó } 2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 6$$

∴ Trasnaíonn an cuar an  $y$ -ais ag  $(0, 6)$ .

Léirítéar sceitse den chuar thíos:



Tá an cruth seo ar an gcuar mar go bhfuil comhéifeacht  $x^3$  diúltach.

## 4. Cothromóidí a fháil d'fheidhmeanna ciúbacha tugtha

Léirítéar graf feidhme ar dheis.

Trasnaíonn sé an  $x$ -ais ag  $x = -2, 0$  agus  $2$ .

Beidh  $x(x + 2)(x - 2)$  mar chuid den slonn ag an bhfeidhm seo

Tabhair faoi deara go bhfuil an pointe  $(1, 1)$  sa ghraf freisin.

Chun freastal ar an gcúinse seo, beidh an fhoirm  $y = kx(x + 2)(x - 2)$  ar chothromóid na feidhme, áit ar uimhir le haimsíú é  $k$ .

Tá a fhios againn go bhfuil  $(1, 1)$  ar an ngraf agus bainimid leas as sin chun luach  $k$  a fháil.

$$(1, 1) \in \text{den ghraf:} \quad y = kx(x + 2)(x - 2)$$

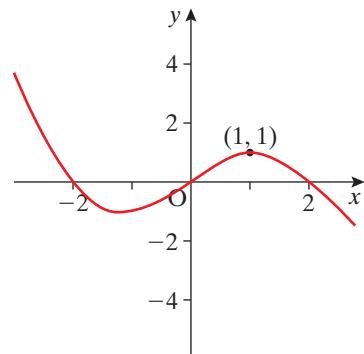
$$\Rightarrow 1 = k(1)(3)(-1)$$

$$\Rightarrow -3k = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

∴ Is é cothromóid na feidhme ná  $y = -\frac{1}{3}x(x + 2)(x - 2)$

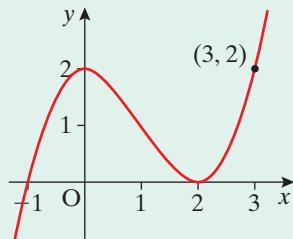
$$\text{i.e. } y = -\frac{x}{3}(x + 2)(x - 2)$$

$$\text{nó } y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x$$



## Sampla 4

Faigh cothromóid na feidhme atá grafta ar dheis.



Trasnaíonn an graf an  $x$ -ais ag  $x = -1$  agus tadhlaíonn sé an  $x$ -ais ag  $x = 2$ .

Tá an fhoirm seo ar an gcothromóid:  $y = k(x + 1)(x - 2)^2$

$$\begin{aligned} \text{Cuir } (3, 2) \text{ isteach sa chothromóid: } 2 &= k(4)(1)^2 \\ 2 &= 4k \\ k &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Is é cothromóid na feidhme ná  $y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)^2$

## Cleachtadh 1.6

1. Scríobh amach tábla d'ordphéirí cosúil leis an gceann ar dheis.

Uaidh sin, tarraing graf na feidhme  $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$  san fhearrann  $-3 \leq x \leq 2$ .

$x$	$2x^2 + 3x - 4$	$y$
-3	$18 - 9 - 4$	5
-2		
2		

2. Faigh comhordanáidí na bpointí ag a dtrasnaíonn na feidhmeanna seo an  $x$ -ais agus an  $y$ -ais. Uaidh sin, tarraing sceitse garbh de ghraf gach feidhme.

(Ní gá an pointe casaidh a aithint i ngach graf.)

(i)  $f(x) = x^2 - 4x$       (ii)  $f(x) = x^2 - 2x - 8$       (iii)  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

3. Sloinn gach ceann díobh seo mar chearnóg chomhlánaithe:

(i)  $x^2 - 4x + 2$       (ii)  $x^2 - 12x + 36$       (iii)  $-x^2 + 8x - 12$

4. Sloinn  $y = x^2 + 4x - 12$  i bhfoirm chearnóg chomhlánaithe.

Anois, tarraing sceitse den chuar  $y = x^2 + 4x - 12$ , agus taispeáin go soiléir cá dtrasnaíonn sé an  $x$ -ais agus an  $y$ -ais, agus a phointe casaidh.

5. Faigh na pointí ag a dtrasnaíonn graf  $y = x^2 + 4x - 5$  an  $x$ -ais agus an  $y$ -ais.

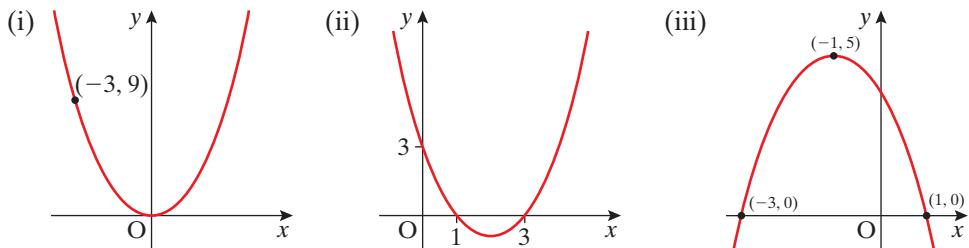
Sloinn  $y = x^2 + 4x - 5$  san fhoirm  $(x + a)^2 + b$  agus uaidh sin, scríobh síos comhordanáidí an phointe casaidh.

Tarraing sceitse garbh de ghraf  $y = x^2 + 4x - 5$ .

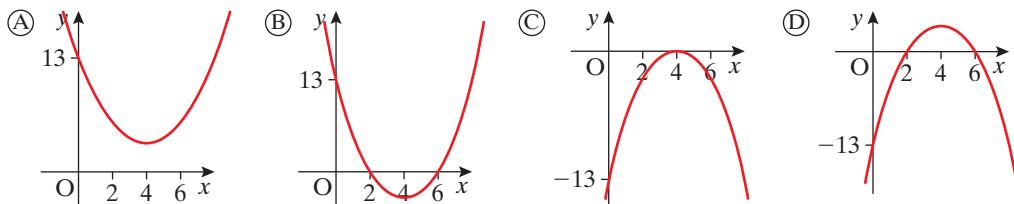
6. Sloinn  $x^2 + 3x - 10$  mar chearnóg chomhlánaithe.  
 Uaidh sin, scríobh síos comhordanáidí phointe casaidh an chuair.  
 Tarraing sceitse den chuar  $y = x^2 + 3x - 10$ , ag taispeáint go soiléir cá dtrasnaíonn an cuar an  $x$ -ais agus an  $y$ -ais.

7. Tá ríail chearnach do pharabóil ar leith san fhoirm  $y = ax^2 + c$ .  
 Téann an pharabóil trí na pointí a bhfuil  $(-1, 4)$  agus  $(0, 8)$  mar chomhordanáidí acu.  
 Faigh luach  $a$  agus luach  $c$ .

8. Aimsigh cothromóid gach ceann de na parabóilí seo a leanas:

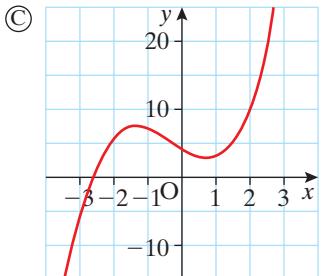
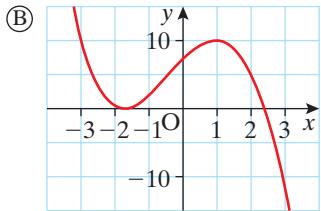
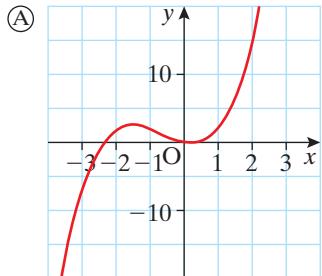


9. Cé acu ceann de na graif thíos a léireodh graf na cothromóide  $y = (x - 4)^2 - 3$  ?



10. Cé acu ceann de na graif i gCeist 9 a léireodh  $y = 3 - (x - 4)^2$  ?
11. Tá pointe casaidh ag parabóil ag  $(-1, 3)$  agus gearrann sí an  $y$ -ais ag  $(0, 4)$ .  
 Faigh cothromóid na parabóile seo.
12. Maidir le gach ceann de na feidhmeanna ciúbacha seo, faigh amach
- (i) cá dtrasnaíonn nó cá dtadhlaíonn sé an  $x$ -ais      (ii) cá dtrasnaíonn sé an  $y$ -ais.
  - (a)  $y = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$                           (b)  $y = x(x - 6)(x + 3)$
  - (c)  $y = (x - 1)(x + 2)^2$                                   (d)  $y = x(x^2 - 9)$
13. Tarraing sceitse de ghraf gach ceann de na feidhmeanna seo.  
 Cuir lipéad ar do ghraf sceitseáilte chun na pointí trasnaithe leis na haiseanna a léiriú.  
 (Ní gá comhordanáidí na bpontí casaidh a aimsiú.)
- (i)  $y = x(x - 1)(x - 3)$                                   (ii)  $y = (x - 2)(x + 3)(2x - 1)$
  - (iii)  $y = -(x - 1)(x + 2)(x - 4)$                           (iv)  $y = x^3 - 9x$

14. Seo thíos graif thrí fheidhm chiúbacha,  $f(x) = \dots$



- (i) Cé acu graf a sheasann d'fheidhm ina bhfuil comhéifeacht  $x^3$  diúltach?
- (ii) Cé acu graf nach bhfuil ach an t-aon fhréamh réadach amháin aige don cothromóid  $f(x) = 0$ ?
- (iii) Cé acu graf ina bhfuil  $f(x)$  deimhneach agus ag laghdú i gcás  $1 < x < 2.4$ ?
- (iv) Cé acu graf atá diúltach agus ag laghdú i gcás  $x > 2.4$ ?

15. Ceangail gach graf sceitseáilte le ceann amháin de na cothromóidí thíos:

$$y = x^3 - x^2$$

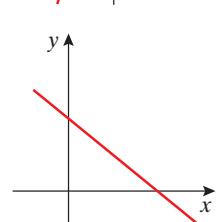
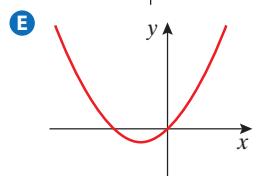
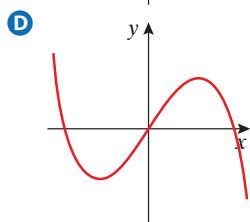
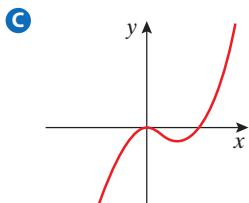
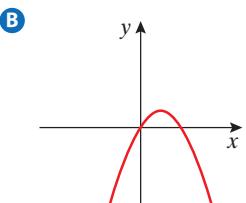
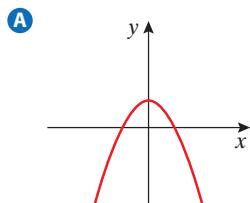
$$y = 1 - x^2$$

$$y = x - x^2$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$y = x^2 + 3x$$

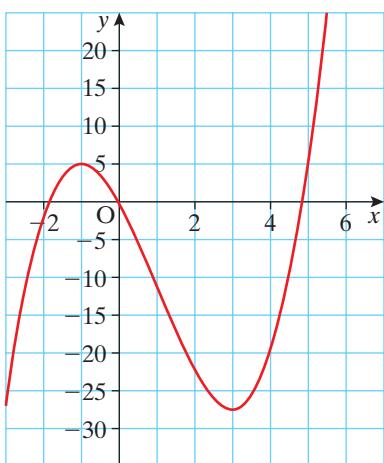
$$y = 9x - x^3$$



16. Ar dheis, feictear graf na feidhme  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ .

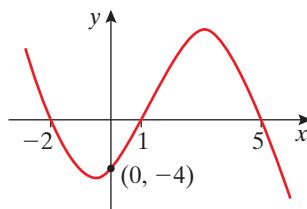
Úsáid do ghraf chun iad seo a mheas:

- (i)  $f(3)$
- (ii) an t-uaspheointe casaidh
- (iii) fréamhacha na cothromóide  $x^3 - 3x^2 - 9x = -20$
- (iv) raon na luachanna ar  $x$  a fhágann go bhfuil  $f(x)$  ag laghdú.
- (v) Mínigh an fáth nach bhfuil ach aon fhréamh amháin ag an gcothromóid  $f(x) = 10$ .
- (vi) Mínigh an fáth a bhfuil trí fhréamh ag an gcothromóid  $f(x) = -10$ .
- (vii) Má tá trí fhréamh réadacha ag  $f(x) = k$ , tabhair meastachán ar raon na luachanna ar  $k$ .



17. Tarraing sceitsí de na graif  $y = x(x - 2)(x + 4)$  agus  $y = x - 3$  agus scríobh síos líon na bpointí trasnaithe.

18. Oibrigh amach cothromóid na feidhme ciúbaí ar dheis.



19. Tá 60m de chláí ag feirmeoir chun trí thaobh de bhuaile dhronuilleogach a dhéanamh agus é buailte ar chláí atá ann cheana féin.

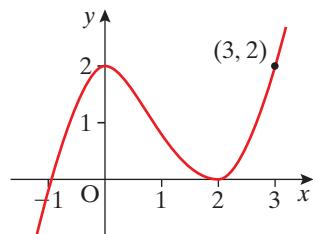
- (i) Más é  $x$  m leithead na buaile, agus gurb é  $A$  m<sup>2</sup> an t-achar laistigh den bhuaile, scríobh síos an rial a cheanglaíonn  $A$  agus  $x$ .
- (ii) Tarraing scetse den rial  $A$  in aghaidh  $x$ .
- (iii) Úsáid an graf chun an t-achar is mó is féidir a iamh don bhuaile a mheas.

cláí atá ann cheana féin



20. Taispeántar graf feidhm chiúbach.

- (i) Úsáid an t-eolas a thugtar chun cothromóid na feidhme a aimsiú.
- (ii) Mínigh an fáth nach bhfuil an fheidhm inteilgeach.
- (iii) An bhfuil an fheidhm barrtheilgeach sa raon  $0 \leq y \leq 2$ ?
- (iv) Mínigh an fáth nach bhfuil an fheidhm détheilgeach.



21. Is é  $f(x) = x^2 - 6x + 18, x \geq 0$  cothromóid an chuair,  $C$ .

- (i) Sloinn  $f(x)$  san fhoirm  $(x - a)^2 + b$ , áit ar tairisigh iad  $a$  agus  $b$ .

Buaileann an cuar  $C$ , ag a bhfuil an chothromóid  $y = f(x), x \geq 0$ , leis an  $y$ -ais ag  $P$  agus tá íospheointe aige ag  $Q$ .

- (ii) Tarraing scetse de ghraf  $C$ , ag taispeáint chomhordanáidí  $P$  agus  $Q$ .

Buaileann an líne  $y = 41$  le  $C$  ag an bpointe  $R$ .

- (iii) Faigh  $x$ -chomhordanáid  $R$ , agus tabhair do fhreagra san fhoirm  $p + q\sqrt{2}$ , áit ar slánuimhreacha iad  $p$  agus  $q$ .

## Mír 1.7 Feidhmeanna easpónantúla agus logartamacha –

**Feidhm easpónantúil** (nó feidhm shéin) **a thugtar** ar aon fheidhm atá san fhoirm  $f(x) = a^x$ , áit ar réaduimhir dheimhneach, seachas 1, é an bonn  $a$ .

Is samplaí d'fheidhmeanna easpónantúla iad  $y = 2^x$  agus  $y = 10^x$ .

Is feidhm easpónantúil ar leith é an fheidhm  $f(x) = e^x$ , áit arb é e an réaduimhir 2.718, ceart go dtí trí ionad dheachúlacha.

Tá cruth ar leith ar ghraf d'fheidhm easpónantúil.

Léireofar dhá shórt graif.

## 1. Graif de $y = a^x$ , $a > 1$

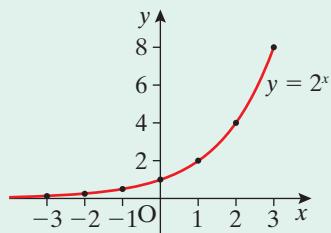
### Sampla 1

Breac graf  $y = 2^x$  i gcás  $-3 \leq x \leq 3$ .

Leagtar amach thíos tábla na luachanna:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8

Léirítar an graf ar dheis.



Léiríonn an graf thusa go ndruideann an cuar leis an  $x$ -ais ach nach mbaineann sé amach í riamh, de réir mar a laghdaíonn luach  $x$ . Deirtear gur **asamtóit** leis an cuar í an  $x$ -ais.

Trasnaíonn an graf an  $y$ -ais ag  $(0, 1)$ .

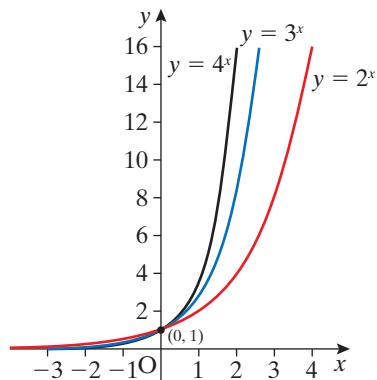
Is é  $R^+$ , raon na feidhme, i.e. is é  $y > 0$  an raon.

Trasnaíonn gach graf atá san fhoirm  $y = a^x$  an  $y$ -ais ag  $(0, 1)$ .

Tarraingítear graif de  $y = 2^x$ ,  $y = 3^x$  agus  $y = 4^x$  ar an léaráid chéanna, mar a léirítar.

Méadaíonn ar ghéire ardú an chuair de réir mar a mhéadaíonn luach  $x$ .

Trasnaíonn gach cuar acu an  $y$ -ais ag  $(0, 1)$ .



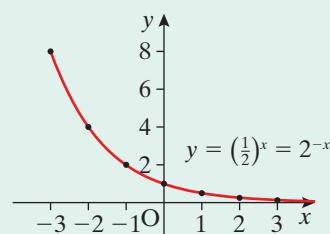
## 2. Graif de $y = a^x$ , $0 < a < 1$

### Sampla 2

Breac graf  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  san fhearrann  $-3 \leq x \leq 3$ .

Seo thíos tábla na luachanna:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125



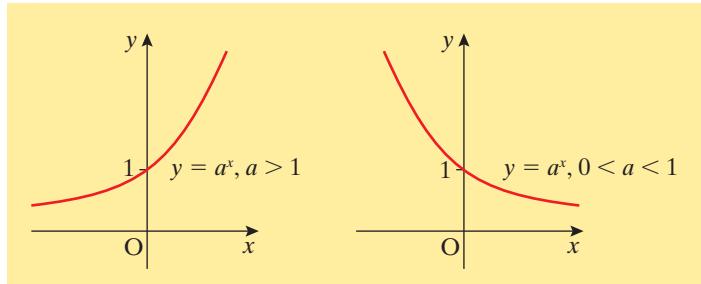
Sa ghraf ar an leathanach thall, laghdaíonn na  $y$ -luachanna de réir mar a mhéadaíonn na  $hx$ -luachanna.

Tá an pointe  $(0, 1)$  ar an ngraf.

Is é  $R^+$  raon na feidhme.

Is frithchaitheamh sa  $y$ -ais den ghraf  $y = 2^{+x}$  é an graf  $y = 2^{-x}$ .

*Graif  
d'Fheidhmeanna  
Easpónantúla*

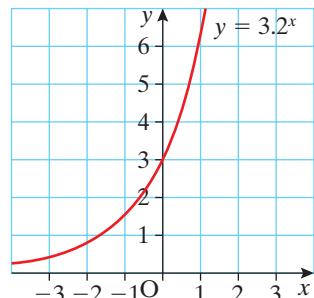


Ar dheis, tá graf  $y = 3 \cdot 2^x$ .

Tá sé cosúil le graf  $y = 2^x$ , ach go bhfuil gach  $y$ -luach iolraithe faoi 3.

Tabhair faoi deara go dtrasnaíonn an graf seo an  $y$ -ais ag  $(0, 3)$ .

Mar rialt ghinearálta, trasnaíonn graf  $y = k \cdot 2^x$  an  $y$ -ais ag  $(0, k)$ .

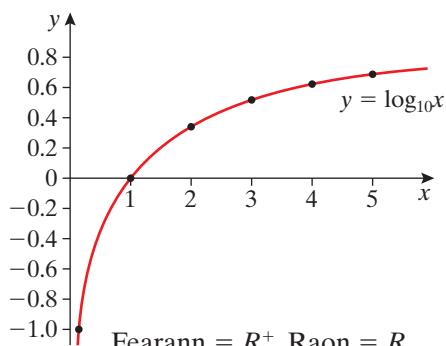


## Feidhmeanna logartamacha a ghrafadh

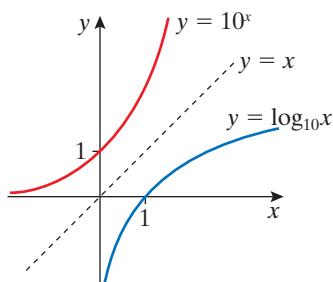
Tugtar thíos tábla luachanna ar  $y = \log_{10} x$ .

Tugtar na luachanna ceart go dtí ionad deachúlach amháin.

$x$	0.1	1	2	3	4	5
$y = \log_{10} x$	-1	0	0.3	0.5	0.6	0.7



Fearann =  $R^+$ , Raon =  $R$

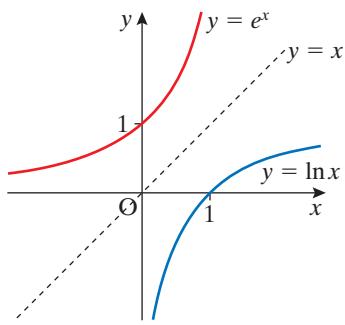


Is frithchaitheamh den ghraf  $y = 10^x$  sa líne  $y = x$  é an graf  $y = \log_{10} x$ .

Taispeánann an léaráid ar dheis gurb í an **fheidhm logartamach**  $y = \log_e x$  inbhéarta na feidhme easpónantúla  $y = e^x$ .

De ghnáth, scríobhtar  $\log_e x$  mar  $\ln x$ .

Is í an fheidhm  $y = e^x$  inbhéarta na feidhme  $\ln x$ .



- › is frithchaithimh dá chéile sa líne  $y = x$  iad na graif
- › is asamtóit le  $y = e^x$  í an  $x$ -ais
- › is asamtóit le  $y = \ln x$  í an  $y$ -ais
- › i gcás  $y = e^x$ , is é  $x \in \mathbb{R}$  an fearann agus  $y \in \mathbb{R}$  an raon,  $y > 0$
- › i gcás  $y = \ln x$ , is é  $x \in \mathbb{R}, x > 0$  an fearann agus  $y \in \mathbb{R}$  an raon.
- › tá  $e^x$  deimhneach i gcomhair luachanna uile  $x$
- › ní ann do  $\ln x$  i gcomhair luachanna diúltacha ar  $x$ .

**Nóta:** Is féidir inbhéarta na feidhme  $f(x) = e^x$  a fháil go hailgéabhrach mar seo:

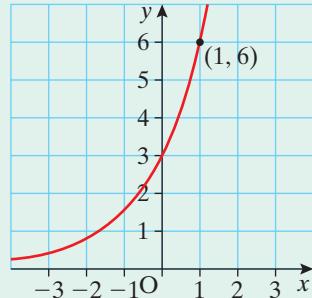
$$\begin{aligned} y &= e^x \\ \ln y &= x \ln e && \dots \text{faigh log nádúrtha an dá thaobh} \\ \ln y &= x && \dots \ln e = 1 \\ \text{i.e. } &x = \ln y \\ \therefore &f^{-1}(x) = \ln x && \dots \text{ag athrú } y \text{ go } x \text{ agus } x \text{ go } f^{-1}(x), \text{ mar a léiríodh thusas} \end{aligned}$$

### Sampla 3

Léirítear graf na feidhme  $f(x) = a \cdot b^x$ .

Faigh luachanna  $a$  agus  $b$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot b^x \\ f(0) &= 3 \Rightarrow a \cdot b^0 = 3 \\ &\Rightarrow a = 3 \quad \dots b^0 = 1 \\ (1, 6) &\in f(x) \\ \Rightarrow 6 &= 3 \cdot b^1 \quad \dots y = 6, x = 1, a = 3 \\ \Rightarrow 3b &= 6 \Rightarrow b = 2 \\ \therefore &a = 3 \text{ agus } b = 2 \end{aligned}$$



### Sampla 4

Is féidir líon an daonra,  $N$ , a shamhadtú leis an gcothromóid

$N = N_0 e^{rt}$ , áit arb é  $N_0$  an daonra sa bhliain 2006,  $t$  an t-am i mblianta ó 2006, agus  $r$  an ráta méadaithe daonra bliantúil.

- Sa bhliain 2006, 61 milliún, go neasach, ab ea daonra thír eile, agus ráta bliantúil méadaithe 1.6% ag an thír. Ag glacadh leis go raibh an méadú seo tairiseach, faigh amach cén daonra a bheadh ag an thír sa bhliain 2020? (i.e. tar éis 14 bliana.)
- Sa bhliain 2006, 5.1 milliún, go neasach, ab ea daonra thír ar leith, agus ráta bliantúil méadaithe 0.43% ag an thír sin. Ag glacadh leis go raibh an ráta méadaithe seo tairiseach, cá fhad a thógfadh sé ar dhaonra na tíre seo dúbait?

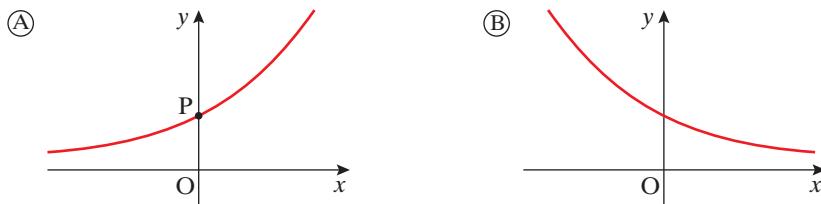
(i)  $N = N_0 e^{rt}$   
 $N = 61\,000\,000 e^{0.016(14)} \dots$  sloinn 1.6% mar dheachúil (i.e. 0.016)  
 $N = 61\,000\,000 e^{0.224}$   
 $N = 61\,000\,000 (1.25107)$   
 $N = 76,315,270$   
 $\therefore$  beidh daonra de 76.3 milliún ag an tír sa bhliain 2020

(ii)  $N = N_0 e^{rt}$   
 $10.2 = 5.1 e^{0.0043t} \dots r = 0.43\% = \frac{0.43}{100} = 0.0043 \quad [N = 2N_0]$   
 $e^{0.0043t} = \frac{10.2}{5.1} = 2$   
 $\ln[e^{0.0043t}] = \ln 2$   
 $0.0043t \ln e = \ln 2$   
 $0.0043t (1) = \ln 2$   
 $t = \frac{\ln 2}{0.0043} = 161.19 = 161.2$  bliain

Tógfайдh sé 161.2 bliain ar an daonra dúbait.

## Cleachtadh 1.7

1. Tá na feidhmeanna  $f(x) = a^x, a > 1$  agus  $f(x) = a^x, 0 < a < 1$  grafta thíos.



- (i) Ceangail gach graf lena fheidhm féin.  
(ii) Scríobh síos comhordanáidí an phointe P.  
(iii) Scríobh síos cothromóid na hasamtóite le gach graf.
2. Cóipeáil agus comhlánaigh an tábla thíos.

$x$	-2	-1	0	1	2
$2^x$	$\frac{1}{4}$				
$4.2^x$	1				

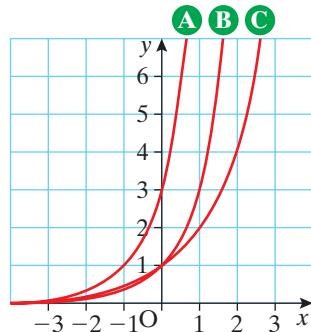
Úsáid an tábla chun sceitse a tharraingt den fheidhm  $f(x) = 4.2^x$  san fhearrann  $-2 \leq x \leq 2$ .

Úsáid do ghraf chun meastachán a fháil ar  $f(0.5)$ .

3. Tá trí ghraf **A**, **B** agus **C** sceitseáilte ar dheis.

Ceangail gach graf le ceann de na feidhmeanna thíos:

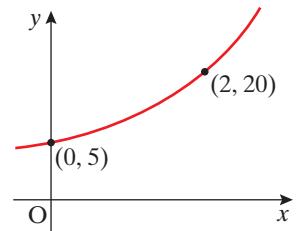
$$f(x) = 2^x \quad f(x) = 3^x \quad f(x) = 3.3^x$$



4. Seasann an cuar ar dheis do cheann díobh seo:

(a)  $f(x) = k \cdot 2^x$  nó (b)  $f(x) = k \cdot 3^x$

- (i) Faigh luach  $k$ .  
(ii) Cé acu feidhm atá léirithe sa ghraf?



5. Téann an cuar  $y = a(2^x)$  tríd an bpointe  $(1, 3)$ .

Faigh luach  $a$ .

6. Cóipeáil agus comhlánaigh an tábla thíos agus uaidh sin, tarraing graf na feidhme  $f(x) = 3^{-x}$  san fhearrann  $-2 \leq x \leq 3$ .

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3^{-x}$						

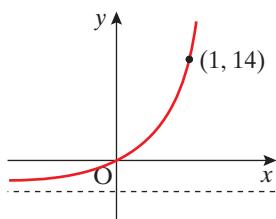
Úsáid do ghraf chun iad seo a mheas:

- (i)  $f(-1.5)$       (ii) luach  $x$  nuair atá  $f(x) = 4$ .

7. Tarraing sceitse den fheidhm  $f(x) = 3 \cdot 2^x + 2$  san fhearrann  $-2 \leq x \leq 3$ . Scríobh síos raon na feidhme.

8. Taispeántar graf na feidhme  $y = ae^x + b$ .

Faigh luachanna  $a$  agus  $b$  i dtéarmaí  $e$ .



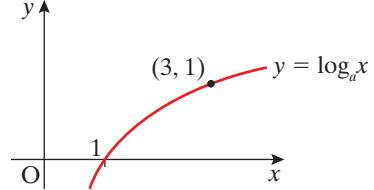
9. Sásáíonn dhá athróg  $x$  agus  $y$  an chothromóid  $y = 3 \times 4^x$ .

- (i) Faigh luach  $a$  má tá  $(a, 6)$  ar an ngraf ag a bhfuil an chothromóid  $y = 3 \times 4^x$ .  
(ii) Má tá  $(-\frac{1}{2}, b)$  ar an ngraf freisin, faigh  $b$ .

- 10.** Breac graf  $y = 3^x$  agus graf na líne dírí  $y = x + 3$  ó  $x = 0$  go  $x = 2$ .  
Ó do ghraf, faigh neasréiteach ar an gcothromóid  $3^x = x + 3$  san fhearrann tugtha.
- 11.** Tarraing graf na feidhme  $f(x) = \log_2 x$  do  $0 < x \leq 16, x \in \mathbb{R}$ .  
(Glac le 1, 2, 4, 8, 16 mar na hx-luachanna.)
- 12.** Faigh luachanna  $a$  agus  $b$  sa chaoi go dtéann  $y = a \log_2 x + b$  trí na pointí  $(8, 10)$  agus  $(32, 14)$ .

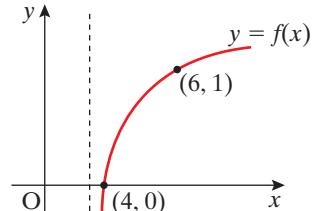
- 13.** Graf na feidhme  $y = \log_a x$  is ea an cuar ar dheis.

Má tá an pointe  $(3, 1)$  ar an gcuar, faigh luach  $a$ .

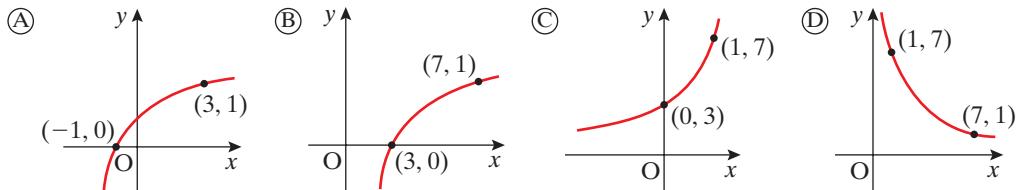


- 14.** Taispeánann an léaráid graf  $y = f(x)$ ,  
áit ar feidhm logartamach é  $f$ .  
Cé acu díobh seo a léiríonn  $f(x)$ ?

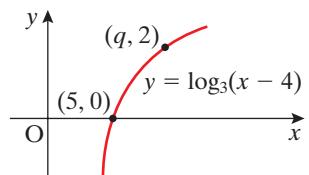
- (a)  $f(x) = \log_6(x - 3)$       (b)  $f(x) = \log_3(x + 3)$   
(c)  $f(x) = \log_3(x - 3)$       (d)  $f(x) = \log_6(x + 3)$



- 15.** Cé acu ceann de na graif seo a leanas a bhfuil an chothromóid  $y = \log_5(x - 2)$  aige?



- 16.** Taispeánann an léaráid cuid den ghraf  $y = \log_3(x - 4)$ .  
Tá an pointe  $(q, 2)$  ar an ngraf.  
Faigh luach  $q$ .



- 17.** Ardaíonn an teas  $T^\circ\text{C}$  i gcoire go heaspónantúil thar thréimhse 24 uair an chloig, sa chaoi go bhfuil  $T = T_0 e^{\frac{x}{20}}$  tar éis  $t$  uair an chloig.
- (i) Más é  $165^\circ\text{C}$  an teas tar éis 10 n-uair an chloig, faigh luach  $T_0$ .  
(ii) Cad é an teas tar éis 24 uair an chloig?

- 18.** Laghdaíonn  $A_t$ , líon na micreagram a mhaireann tar éis  $t$  bliain i substaint radaighníomhach áirithe, de réir na foirmle  $A_t = A_0 e^{-0.002t}$ , áit arb é  $A_0$  an líon a bhí ann ar dtús..
- Má tá 600 micreagram fágtha tar éis 1000 bliain, cén líon micreagram a bhí ann ar dtús?
  - Is éard is leathré substainte ann ná an t-am a thógann sé ar an líon laghdú go dtí leath an lín tosaigh. Cad é leathré na substainte seo?
- 19.** Tá galar ar chrainn i gceantar áirithe.  
Tugadh faoi deara gur athraigh  $N$ , líon na gcrann galrach, in imeacht ama  $t$  (i mblianta) mar a thugtar anseo:  $N = 200 - Ae^{-\frac{t}{20}}$ .
- Má tá 91 crann galrach ann tar éis 10 mbliana, faigh luach  $A$ .
  - Cé mhéad crann galrach a bhí ann ag an túis?
  - Cad é luach teorantach  $N$  de réir mar a mhéadaíonn ar an am?
- 20.** Tugann  $m = m_0 e^{-kt}$  mais ( $m$ ) ábhar radaighníomhach ag am  $t$ , áit ar tairisigh iad  $k$  agus  $m_0$ .  
Má tá  $m = \frac{9}{10}m_0$  nuair atá  $t = 10$ , faigh luach  $k$ .  
Faigh leathré an ábhair freisin.  
(Is éard is leathré ann ná an t-am a thógann sé ar an ábhar a mheath go dtí leath a mhaise tosaí.)

## Mír 1.8 Graif ghaolmhara

I míreanna na caibidle go dtí seo, d'fhéachamar ar fheidhmeanna éagsúla agus ar ghraif na bhfeidhmeanna sin.

Sa mhír seo, féachfaimid ar an tionchar a bhíonn ag athruithe ar chothromóid feidhme ar ghraf na feidhme. Ní phléifimid ach ceithre athrú bhunúsacha.

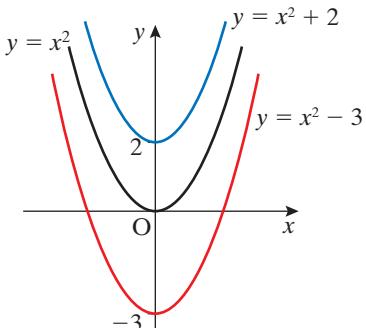
### 1. $y = f(x) \pm a$

Taispeántar an fheidhm  $f(x) = x^2$ .

Léiríonn an fheidhm  $f(x) + 2$  aistriú ingearach suas dhá aonad.

Léiríonn an fheidhm  $f(x) - 3$  aistriú ceartingearach síos trí aonad.

- bogann  $+a$  an graf sa y-threo deimhneach
- bogann  $-a$  an graf sa y-threo diúltach



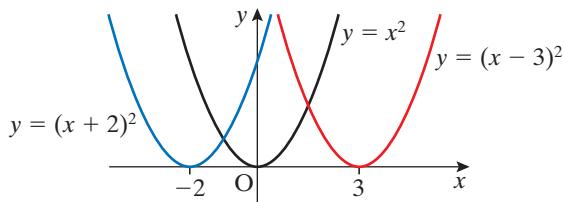
## 2. $y = f(x \pm a)$

Léiríonn na trí ghráf ar dheis go seasann  $y = f(x + 2)$  d'aistriú na feidhme

$f(x) = x^2$  líuide 2 aonad comhthreomhar leis an  $x$ -ais.

Seasann  $f(x) = (x - 3)^2$  d'aistriú +3 aonad comhthreomhar leis an  $x$ -ais.

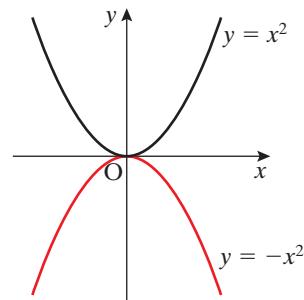
- aistreoidh  $y = f(x + a)$  an graf  $-a$  aonad comhthreomhar leis an  $x$ -ais
- aistreoidh  $y = f(x - a)$  an graf  $+a$  aonad comhthreomhar leis an  $x$ -ais



## 3. $y = -f(x)$

Is frithchaiteamh den ghráf  $y = f(x)$  san  $x$ -ais é an ghráf  $y = -f(x)$ .

- Is frithchaiteamh den ghráf  $y = f(x)$  sa  $y$ -ais é an ghráf  $y = f(-x)$ .

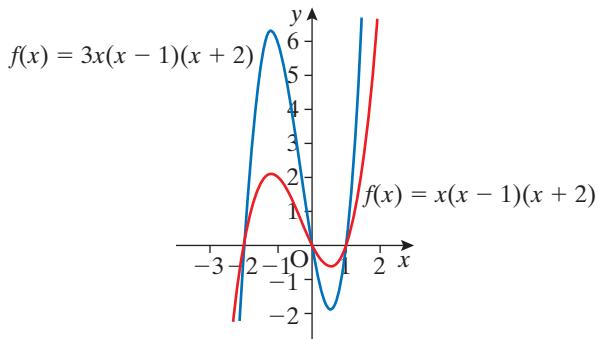


## 4. $y = af(x)$

Léirítear graif

$$f(x) = x(x - 1)(x + 2)$$

agus  $f(x) = 3x(x - 1)(x + 2)$ .

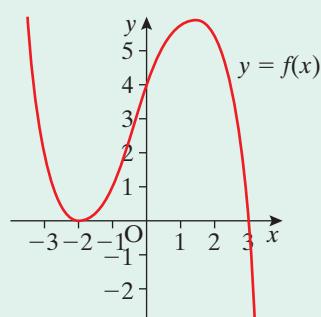


### Sampla 1

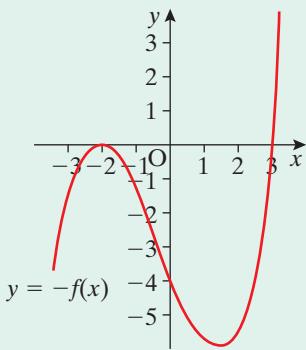
Léirítear ghráf  $y = f(x)$ .

Úsáid léaráidí ar leith chun sceitse a tharraingt de

- |                   |                     |
|-------------------|---------------------|
| (i) $y = -f(x)$   | (ii) $y = f(x) + 2$ |
| (iii) $y = 2f(x)$ | (iv) $y = f(-x)$    |

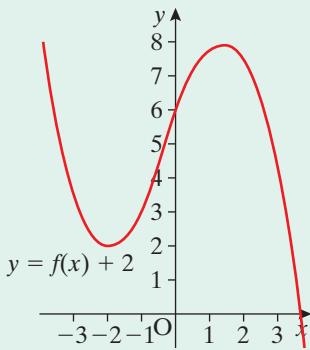


(i)



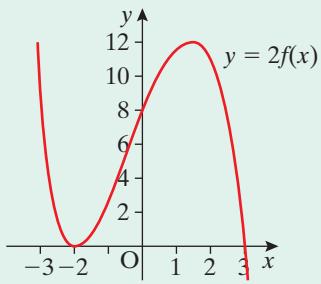
Is frithchaitheamh de  
 $y = f(x)$  san  $x$ -ais  
 é seo.

(ii)



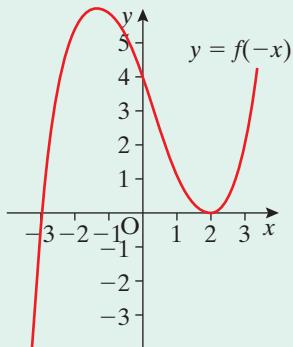
Is gluaiseacht cheartingearach  
 $(nó aistriú) + 2$  aonad  
 comhthreomhar leis an  $y$ -ais é seo.

(iii)



Is síneadh ar  $y = f(x)$   
 comhthreomhar leis an  $x$ -ais de  
 réir fachtóir scála 2 é seo.

(iv)



Is frithchaitheamh de  $y = f(x)$   
 sa  $y$ -ais é seo.

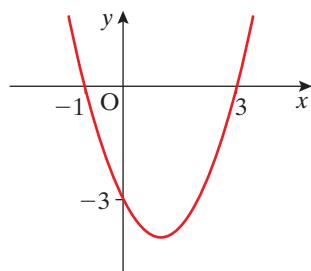
## Cleachtadh 1.8

1. Léirítear cuar na cothromóide  $y = f(x)$  ar dheis.

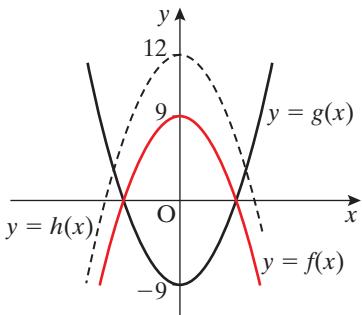
Léirigh gach ceann díobh seo ar ghraf ar leith.

Taispeáin cá dtrasnaíonn gach graf díobh an  $x$ -ais agus an  $y$ -ais.

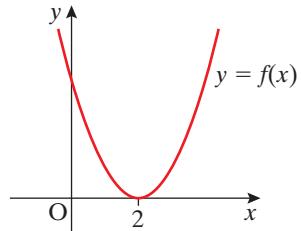
- (i)  $f(x) + 3$
- (ii)  $2f(x)$
- (iii)  $-f(x)$
- (iv)  $f(-x)$



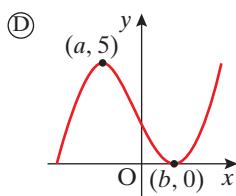
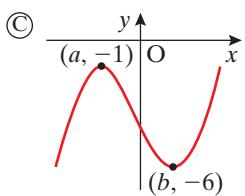
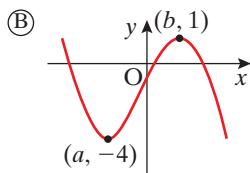
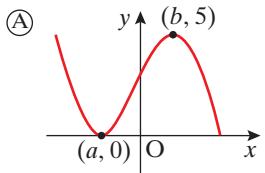
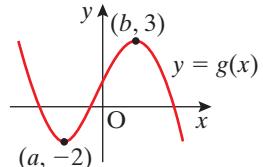
2. Léirítear graf  $y = f(x)$  i ndúch dearg.  
 Scríobh síos cothromóidí  $g(x)$  agus  $h(x)$   
 i dtéarmaí  $f(x)$ .



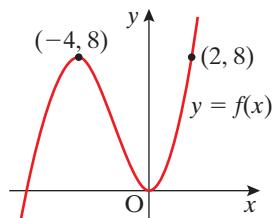
3. Léirítear graf na feidhme  $y = f(x)$ .  
 Cíopeáil an léaráid agus, ar an léaráid,  
 tarraing sceitse garbh de  
 (i)  $y = f(x + 3)$       (ii)  $y = f(x - 2)$ .



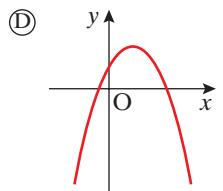
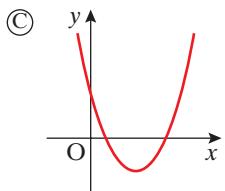
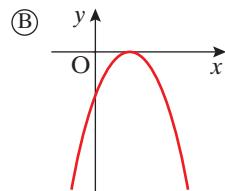
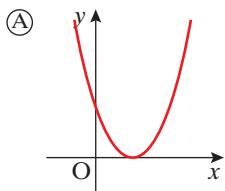
4. Léirítear anseo graf  $y = g(x)$ .  
 Léiríonn an fheidhm  $y = 3 - g(x)$   
 dhá athrú ar ghraf  $y = g(x)$ .  
 Cé acu ceann de na léaráidí thíos a léiríonn graf  
 $y = 3 - g(x)$  ?



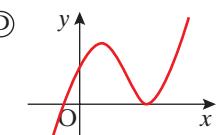
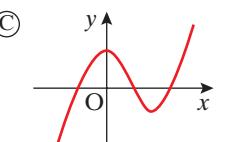
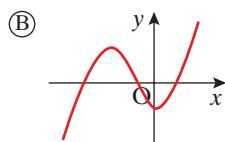
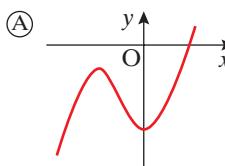
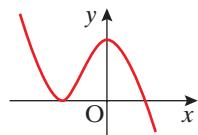
5. Taispeánann an léaráid ar dheis graf  
 na feidhme  $y = f(x)$ .  
 (i) Cíopeáil an léaráid agus, ar an léaráid,  
 déan sceitse de ghraf  $y = -f(x)$ .  
 (ii) Ar léaráid eile, déan sceitse de ghraf  
 $f(x) - 3$ .



6. Cé acu ceann de na léaráidí seo a leanas a thaispeánann parabóil na cothromóide  $y = ax^2 + bx + c$ , áit a bhfuil  
 (i)  $a > 0$  agus (ii)  $b^2 - 4ac > 0$  ?

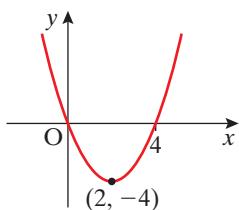


7. Taispeánann an léaráid sceitse de  $y = f(x)$ .  
 Cé acu ceann de na léaráidí thíos a thaispeánann sceitse de  $y = -2 - f(x)$  ?



8. Tá graf  $y = f(x)$  ar dheis.  
 Cóipeáil an léaráid agus, ar an léaráid,  
 déan sceitse den chuar

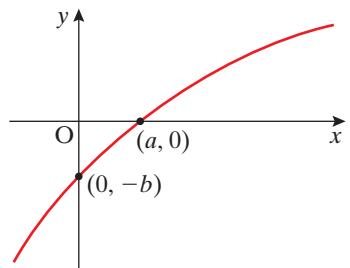
$$y = 4 + f(-x).$$



9. Taispeánann an léaráid cuid de chuar  
 na cothromóide  $y = f(x)$ . Trasnaíonn an cuar an  $x$ -ais  
 ag  $(a, 0)$  agus an  $y$ -ais ag  $(0, -b)$ .

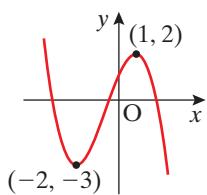
Ar léaráidí ar leith, sceitseáil,

- (i)  $y = 2f(x)$       (ii)  $y = f(-x)$ .



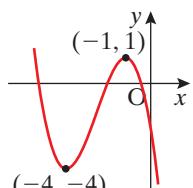
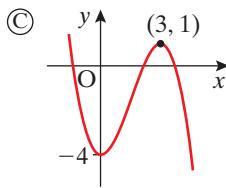
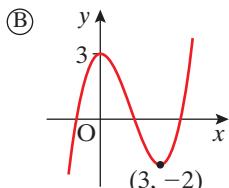
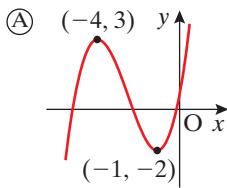
10. Sainíonn  $f(x) = (x - 2)(x^2 + 1)$  an fheidhm  $f$  ar an tacar réaduimhreacha.

- (i) Faigh amach cá ngearrann an graf  $y = f(x)$ .  
 (a) an  $x$ -ais      (b) an  $y$ -ais.  
 (ii) Taispeánann an léaráid graf  $y = f(x)$ .



Cé acu ceann díobh seo a leanas a thaispeánann

$$y = f(x + 2) - 1?$$



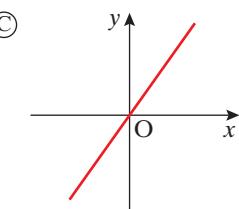
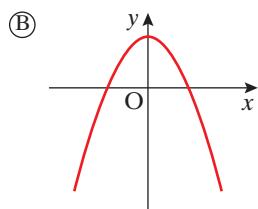
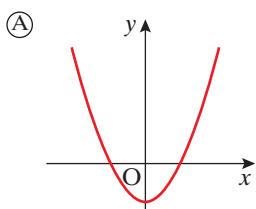
### Súil Siar 1 (Croícheisteanna)

1. Is iad  $f(x) = 2x - 3$  agus  $g(x) = x^2$  na feidhmeanna  $f$  agus  $g$ .

Faigh slonn ar  $gf(x)$  agus uaidh sin, réitigh an chothromóid  $gf(x) = 9$ .

2. Cé acu sceitse a ghabhann le gach cothromóid faoi seach?

Cuir fáthanna le do chuid freagraí.



$y = 2x$

$y = x^2 - 2$

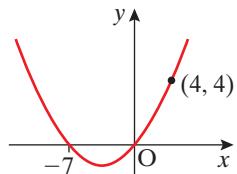
$y = 2 - x^2$

$y = x^2 + 2$

3. Is é  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  fearann na feidhme  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ .

Faigh raon na feidhme.

4. Aimsigh cothromóid na parabóile a léirítear ar dheis.



5. Ag glacadh le  $g(x) = 5 + \frac{x}{2}$ , faigh  $g^{-1}(x)$ .

Uaidh sin, faigh (i)  $g^{-1}(-2)$  (ii) an luach ar  $x$  a fhágann  $g(x) = g^{-1}(x)$ .

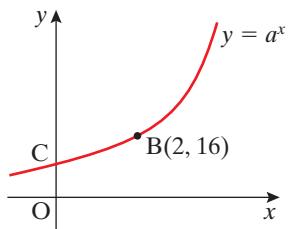
6. Léirítear cuid den ghráf  $y = a^x$ , áit a bhfuil  $a > 0$ .

Gearrann an graf an  $y$ -ais ag C.

- (i) Scríobh síos comhordanáidí C.

Is é B an pointe  $(2, 16)$ .

- (ii) Ríomh luach  $a$ .



7. Léirítear graf  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ .

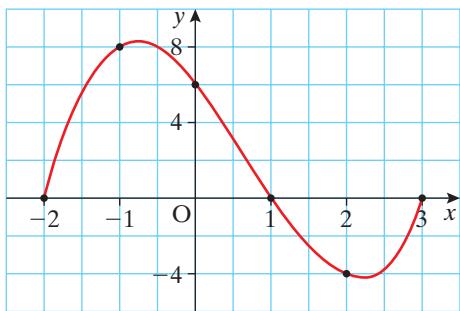
Úsáid an graf chun iad seo a scríobh síos:

- (i) fréamhacha na cothromóide  $f(x) = 0$
- (ii) fréamhacha na cothromóide  $f(x) = -2$
- (iii) fréamhacha na cothromóide  $x^3 - 2x^2 - 5x = 0$ .

An feidhm aon-le-haon é  $y = f(x)$ ?

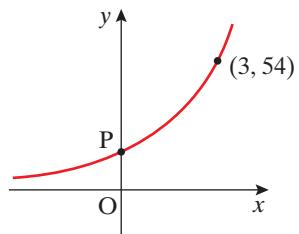
Mínigh.

Mínigh an fáth ar feidhm barrtheilgeach é  $f(x)$  sa raon tugtha.



8. Taispeánann an léaráid cuid de ghraf  $y = 2m^x$ .

- (i) Faigh luach  $m$ .
- (ii) Scríobh síos comhordanáidí P.



9. Faigh luach na teorann i gcás gach ceann díobh seo:

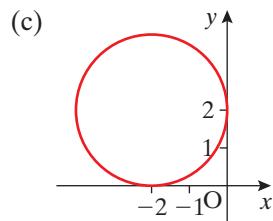
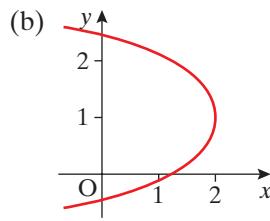
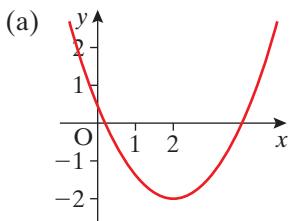
$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - 4}{3 + x} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 16}$$

10. Sloinn  $x^2 + 2x$  san fhoirm  $(x + h)^2 + k$ , áit a bhfuil  $h, k \in \mathbb{Z}$ .

Uaidh sin, scríobh síos comhordanáidí phointe casaidh ghraf  $f(x) = x^2 + 2x$ .

Anois tarraing sceitse de ghraf  $f(x)$ .

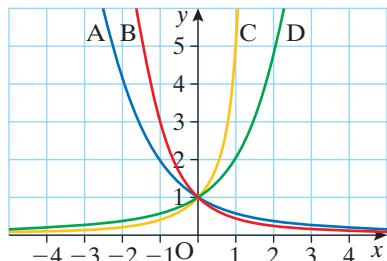
11. (i) Scríobh síos an fearann agus raon do na coibhneasa a léirítear sna graif seo a leanas:



- (ii) Abair an léiríonn gach ceann de na graif feidhm agus tabhair cúis le do fhreagra i ngach cás.

12. Taispeánann an léaráid ar dheis graif  $y = 2^x$ ,  $y = 5^x$ ,  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  agus  $y = 3^{-x}$ .

Úsáid luachanna éagsúla ar  $x$ , agus y-luachanna comhfheareagracha, chun gach graf a mheatseáil lena chothromóid.



- 13.** I gcás gach ceann de na feidhmeanna seo, cad iad na luachanna ar  $x$  a fhágann nach bhfuil sí leanúnach?

(i)  $y = \frac{4}{2-x}$       (ii)  $y = \frac{x^2+x+1}{x-3}$       (iii)  $f(x) = \ln(x+4)$

- 14.** Glac le  $f(x) = 10x$  agus  $g(x) = x + 3$ ,

- (i) faigh  $fg(x)$  agus  $(fg)^{-1}(x)$   
(ii) cruthaigh go bhfuil  $fg(a) = b$ , má tá  $(fg)^{-1}(b) = a$ .

- 15.** Sainíonn  $f(x) = x^2 + 3$  agus  $g(x) = x + 4$  dhá fheidhm.

- (a) Faigh sloinn ar  $fg(x)$  agus  $gf(x)$ .  
(b) Taispeáin nach bhfuil aon fhréamh réadach ag  $fg(x) + gf(x) = 0$ .

- 16.** Sainítéar na feidhmeanna  $f$  agus  $g$  mar seo a leanas:

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R} \text{ agus } g(x) = \frac{1}{2x-3}, \text{ i gcás } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{3}{2}.$$

- (i) Scríobh síos raon  $f$ .      (ii) Is é  $g^{-1}$  inbhéarta  $g$ . Faigh  $g^{-1}(x)$ .  
(iii) Scríobh síos raon  $g^{-1}$ .      (iv) Réitigh an chothromóid  $fg(x) = 9$ .

## Súil Siar 1 (Ardcheisteanna)

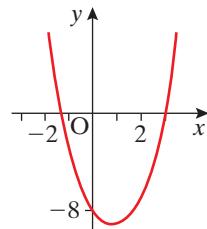
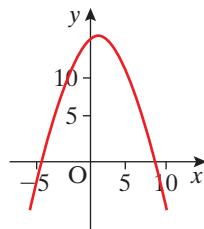
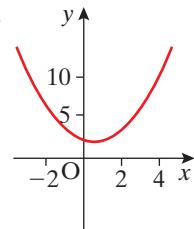
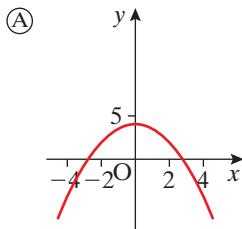
- 1.** Sainíonn na feidhmeanna  $f(x) = x - 1$ ,  $g(x) = 2x^2 - x - 1$  agus  $h(x) = \log_3 x$  trí fheidhm ar fhearrainn oiriúnacha

- (i) Faigh sloinn ar  $hf(x)$  agus  $hg(x)$ .  
(ii) Uайд sin, réitigh an chothromóid  $hg(x) - hf(x) = 2$ .

- 2.** Tugtar cothromóidí ceithre fheidhm agus a ngraif thíos.

Ceangail gach feidhm lena graf féin.

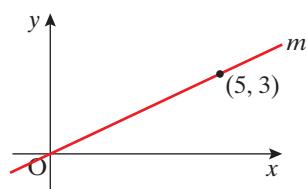
- (a)  $y = \frac{1}{3}(x+4)(8-x)$       (b)  $y = x^2 - x + 2$   
(c)  $y = -10 + 2(x-1)^2$       (d)  $y = \frac{1}{2}(9-x^2)$



- 3.** (i) Tá an pointe  $(5, 3)$  ar an líne  $m$  mar a léirítear.

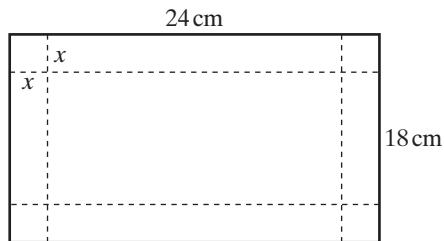
Cóipeáil an léaráid agus tarraing sceitse den líne  $n$ , áit arb í cothromóid  $n$  inbhéarta chothromóid  $m$ .

- (ii) Tugann  $f(x) = +\sqrt{16 - x^2}$  an fheidhm  $f$ .  
Scríobh síos fearann oiriúnach do  $f$ .  
Cad é raon  $f$ ?

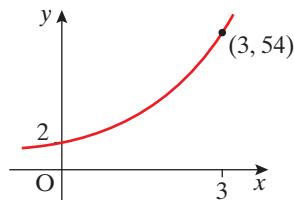


4. Sloinn  $x^2 - 4x + 12$  san fhoirm  $(x - h)^2 + k$ .  
Uaidh sin, scríobh síos comhordanáidí an phointe casaidh agus tarraing sceitse den chuar.

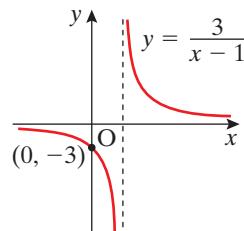
5. Tá na toisí 18 cm faoi 24 cm ar phíosa dronuilleogach cairtchláir. Gearrtar cearnóg  $x$  cm faoi  $x$  cm as gach ceann de na ceithre chúinne.  
Déantar bosca oscailte as ach na flapaí a chasadadh aníos.  
Faigh feidhm do  $V$ , toirt an bhosca, i dtéarmaí  $x$ .  
Scríobh síos fearann na feidhme.



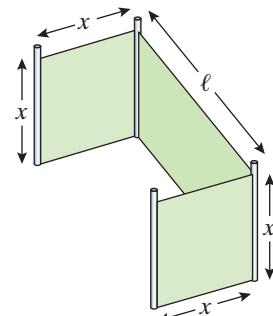
6. (i) Tugtar graf  $y = a.b^x$ .  
Úsáid an graf chun luachanna  $a$  agus  $b$  a aimsiú.



- (ii) Léirítear feidhm agus a graf.  
 (a) Cén luach ar  $x$  a fhágann go bhfuil an fheidhm neamhleanúnach?  
 (b) Scríobh síos fearann na feidhme.  
 (c) Scríobh síos an raon.  
 (d) An bhfuil an fheidhm inteilgeach i gcás  $y > 0$ ? Mínígh.



7. Tá dhá fhoirceann chearnógacha, ar fad sleasa dóibh araon  $x$  méadar, ar scáthlán canbháis gaoithe. Tá píosa dronuilleogach canbháis eatarthu atá  $\ell$  méadar ar fad.  
Is é  $9 \text{ m}^2$  achar an chanbháis.



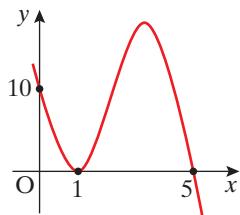
- (i) Taispeáin go bhfuil  $\ell = \frac{9}{x} - 2x$ , agus uaidh sin, taispeáin gurb é  $9x - 2x^3$  an toirt iniata,  $V \text{ m}^3$ .  
 (ii) Breac graf  $V$  in aghaidh  $x$  i gcás  $0 \leq x \leq 3$ .  
 (iii) (a) Úsáid do ghraf chun an luach ar  $x$ , a thugann an toirt is mó is féidir, a fháil.  
 (b) Scríobh síos an toirt is mó seo ó do ghraf.
8. Sainíonn  $f: x \rightarrow 3x - 1$  i gcás  $\{x \in \mathbb{R}\}$  agus  $g: x \rightarrow x^2 + 1$  i gcás  $\{x \in \mathbb{R}\}$  na feidhmeanna  $f$  agus  $g$ .  
 (a) Faigh raon  $g$ .  
 (b) Déan amach na luachanna ar  $x$  a fhágann  $gf(x) = fg(x)$ .  
 (c) Déan amach na luachanna ar  $x$  a fhágann  $|f(x)| = 8$ .  
 (d) Is feidhm aon-le-haón í an fheidhm  $h: x \rightarrow x^2 + 3x$  i gcás  $\{x \in \mathbb{R}, x \geq q\}$ .  
Faigh an t-íosluach ar  $q$  agus tarraing sceitse den ghráf seo.

9. (i) Taispeánann an léaráid graf na cothromóide

$$y = k(x - 1)^2(x + t).$$

Cad iad luachanna  $k$  agus  $t$ ?

(ii) Faigh  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$ .



10. (i) Is fo-thacar de  $\mathbb{R}$  é fearann na feidhme  $f(x) = +\sqrt{25 - x^2}$ .

Scríobh síos an tacar is mó is féidir ar fearann oiriúnach é.

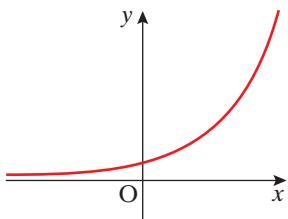
Cad é an raon comhfhereagach?

- (ii) Taispeánann an léaráid sceitse den chuar  $y = 3^x$ .

(a) Scríobh síos comhordanáidí an phointe ag a ngearrann an cuar an  $y$ -ais.

(b) Cóipeáil an léaráid agus cuir isteach sceitsí de na cuair

$$y = 3^{-x} \text{ agus } y = 2.3^x.$$



11. Fásann  $P$ , daonra orgánach ar leith, go heaspónantúil thar am  $t$  (laethanta)

$$\text{de réir } P = Ae^{\frac{t}{20}}.$$

Úsáid an tábla thíos chun luach  $A$  a fháil agus ansin comhlánaigh an tábla.

Tarraing graf  $P$  in aghaidh  $t$ .

$t$	0	5	10	15	20
$P$	5				

Ríomh an méid ama a thógfайдh sé ar an daonra a líon tosaigh a dhúbait.

12. (i) Faigh fearann na luachanna ar  $x$  a fhágann go bhfuil an fheidhm  $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$  ann.

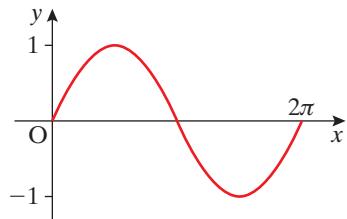
- (ii) Léirítear graf  $y = \sin x$  ar dheis.

(a) Mínigh an fáth gur feidhm é  $y = \sin x$ .

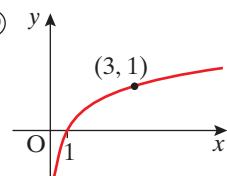
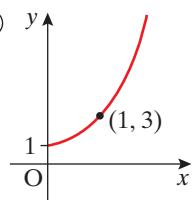
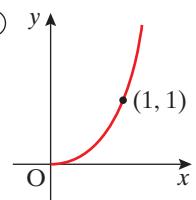
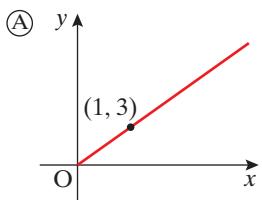
(b) An feidhm aon-le-haon (inteilgeach) é?

(c) An feidhm bharrtheilgeach é san fhearrann  $0 \leq x \leq 2\pi$ ?

(d) Luáigh fearann teoranta ina bhfuil an fheidhm inteilgeach.



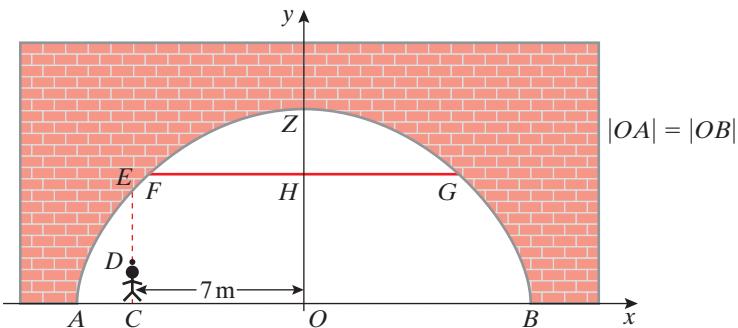
13. Cé acu ceann de na léaráidí a leanas a sheasann do ghraf na cothromóide  $\log_3 y = x$ ?



## Súil Siar 1 (Freagraí níos faide)

1. (a) Don chothromóid  $x^2 + 4x - 2 \equiv (x + a)^2 + b$ , faigh na luachanna ar  $a$  agus  $b$ .  
 Uайд sin, scríobh síos comhordanáidí an phointe casaidh.
- (b) Tarraing sceitse de ghráf of  $y = x^2 + 4x - 2$ , agus léirigh go soiléir air comhordanáidí aon phointe trasnaithe leis na haiseanna comhordanáideacha.
- (c) Faigh luach idirdhealaí  $x^2 + 4x - 2$ .  
 Mínigh an bhaint atá ag comhartha an idirdhealaí le do sceitse i gcuid (b).
- (d) Níl aon fhréamh réadach ag  $x^2 + 4x + k = 0$ , áit ar tairiseach é  $k$ .  
 Faigh na luachanna féideartha ar  $k$ .

2. Tógtar áirse mar a léirítear.



Is é 9 méadar airde na háirse ( $|OZ| = 9$  m).

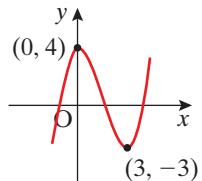
Is é 20 méadar leithead na háirse ( $|AB| = 20$  m).

Tá cothromóid an chuair san fhoirm  $y = ax^2 + b$ , ag glacadh leis na haiseanna a léirítear.

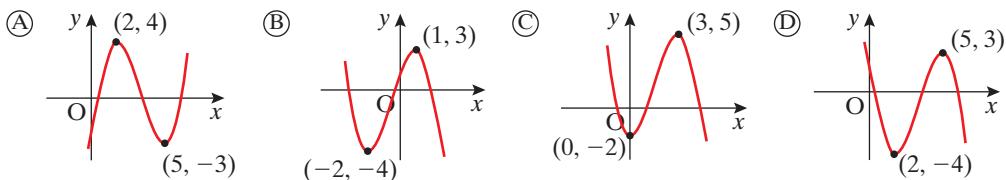
- (a) Faigh luachanna  $a$  agus  $b$ .  
 (b) Seasann fear, atá 1.8 m ar airde, ag  $C$  ( $|OC| = 7$  m).  
 Cén fad os cionn a chloiginn atá an pointe  $E$  ar an áirse? (i.e. faigh an fad  $|DE|$ .)  
 (c) Cuirtear barra  $[FG]$  go cothrománach trasna na háirse mar a léirítear.  
 Is é 6.3 m airde,  $|OH|$ , an bharra ón talamh. Faigh fad an bharra.

3. (a) Faigh luachanna  $a$  agus  $b$  sa chaoi go ngabhall graf  $y = a \log_2(x - b)$  trí na pointí  $(5, 2)$  agus  $(7, 4)$ .  
 (b) Cé acu ceann de na ráitis seo nach bhfuil fíor maidir le graf na feidhme  
 $f: R^+ \rightarrow R, f(x) = \log_5 x$ ?  
 (i) Is é  $R^+$  an fearann.  
 (ii) Is é  $R$  an raon.  
 (iii) Gabhann sé tríd an bpointe  $(5, 0)$ .  
 (iv) Tá asamtóit ingearach leis an gcothromóid  $x = 0$  aige.  
 (v) Tá fána an tadhlaí ag pointe ar bith ar an ngraf deimhneach.

4. (a) Léiríonn an léaráid ar dheis cuid de ghraf na feidhme ag a bhfuil an chothromóid  $y = f(x)$ .



Cé acu ceann de na léaráidí a leanas a thaispeánann an graf ag a bhfuil an chothromóid  $y = -f(x - 2)$ ?



- (b) Tugann  $N = N_0 e^{kt}$  líon na ndaoine,  $N$ , a bhfuil galar áirithe orthu ag am  $t$  bliain.

- (i) Más é 20 000 an líon ar dtús, agus go laghdaíonn an líon 20% in aghaidh na bliana, faigh:
- (a) luach  $N_0$
  - (b) luach  $k$
- (ii) Cé mhéad ama a thógaidh sé ar 5000 duine an galar a fháil?

5. Is mar seo a shainítear na feidhmeanna  $f$  agus  $g$  lena bhfeirainn faoi seach:

$$f(x) = x^3, \quad \text{i gcás gach réadluacha ar } x$$

$$g(x) = \frac{1}{x-3}, \quad \text{i gcás réadluachanna ar } x, x \neq 3$$

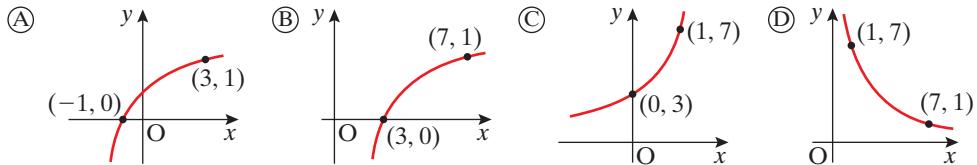
- (a) Scríobh síos raon  $f$ .
- (b) (i) Faigh  $fg(x)$ .  
(ii) Réitigh an chothromóid  $fg(x) = 64$ .
- (c) (i) Is é  $g^{-1}$  inbhéarta  $g$ . Faigh  $g^{-1}(x)$ .  
(ii) Scríobh síos raon  $g^{-1}$ .  
(iii) Sloinn i dtéarmaí  $x, gg^{-1}(x)$ .  
(iv) Scríobh síos luach  $x$  ag an bpointe nach bhfuil graff  $y = g^{-1}(x)$  leanúnach.

6. Is féidir € $M$  luach teach áirithe i gceantar ar leith sa tréimhse 2006 – 2012, a shamháltú ach an chothromóid  $M = Ae^{-pt}$ , a úsáid, áit arb é  $t$  an t-am i mblianta ó 1 Eanáir 2006 ar aghaidh.

Ba é €130 000 luach an tí ar 1 Eanáir 2006 agus ba é €122 000 a luach ar 1 Eanáir 2007.

- (i) Scríobh síos luach  $A$ .  
(ii) Ríomh luach  $p$ , ceart go dtí dhá fhigiúr bhunúsacha.  
(iii) Cad é luach an tí ag deireadh 2011?  
Bíodh do fhreagra ceart go dtí an €100 is gaire.

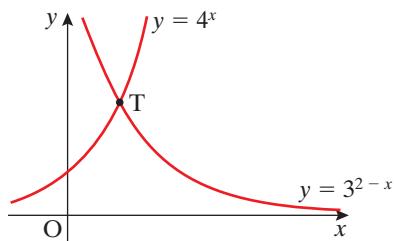
7. (a) Cé acu ceann de na graif seo a bhfuil an chothromóid  $y = \log(x - 2)$  aige?



- (b) Taispeántar sa léaráid ar dheis na cuair ag a bhfuil na cothromóidí  $y = 4^x$  agus  $y = 3^{2-x}$ .

Trasnaíonn na graif a chéile ag an bpointe T.

- (i) Taispeáin gur féidir  $x$ -chomhordanáid T a scríobh san fhoirm  $\frac{\log_a p}{\log_a q}$ ,  $a > 1$ .
- (ii) Ríomh  $y$ -chomhordanáid T.



8. Is é  $y = x^2 - 4x + 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$  cothromóid feidhme.

- (a) Sloinn  $x^2 - 4x + 5$  san fhoirm  $(x + h)^2 + k$ , áit a bhfuil  $h, k \in \mathbb{Z}$ .

Uaidh sin, scríobh síos comhordanáidí phointe casaidh na feidhme agus tarraing sceitse garbh den ghraf.

- (b) Úsáid na torthaí in (a) chun feidhm inbhéartach  $y = x^2 - 4x + 5$  a fháil.  
 (c) Ag úsáid na feidhme inbhéartaí a fuarthas i gcuid (b), nó ar bhealach eile, cuir sceitse den fheidhm inbhéartach seo leis an sceitse a tarraingíodh in (a) thuas.

9. Leath feirmeoir ceimiceán dainséarach ar bhanrach, de thaisme. Tomhaiseadh tiúchan an cheimiceáin san ithir mar 5 kg/ha ar dtús. Bliaín níos déanaí, 2.8 kg/ha ab ea an tiúchan.

Is eol dó go dtugann  $C = C_0 e^{-kt}$

tiúchan  $C$ , áit ar tairisigh iad  $C_0$  agus  $k$ , agus a dtomhaistear  $t$  i mblianta.

- (i) Faigh luach  $C_0$  agus  $k$ .  
 (ii) An bhfuil sé sábháilte an bhanrach a úsáid nuair atá an tiúchan faoi bhun 0.2 kg/ha? Cá fhad a chaithfidh an feirmeoir fanacht i ndiaidh na taisme sular féidir an bhanrach a úsáid? Tabhair an freagra i mblianta, ceart go dtí ionad deachúlach amháin.

# An Calcalas Difréálach

chaibidil

## Focail thábhachtacha

meánrátá athraithe    ráta meandrach athraithe    feidhm dhíorthaithe  
 difréál ó bhunphrionsabail    rial an toraidh    rial an líne    an chuingriail  
 feidhm thriantánúil    feidhm thriantánúil inbhéartach  
 feidhm easpónantúil    feidhm logartamach

## Réamheolas ar an gcalcalas

Sa chaibidil seo, tosóimid ar staidéar a dhéanamh ar bhrainse an-tábhachtach den mhatamaitic a dtugtar an *calculus* air. Baineann an calcalas difréálach go príomha le tomhas ráta an athraithe nuair a athraíonn cainníocht amháin de thoradh athrú ar chainníocht eile. Mar shampla, is ionann an luas a bhíonn faoi charr agus an ráta ar a n-athraíonn an fad a ghluaiseann sí i dtréimhse áirithe ama. Ach tá a fhios againn gur beag seans go dtaistealóidh carr ag luas tairiseach, fiú ar feadh tréimhse ghearr. Más ag luasghéarú a bhíonn an carr, is in aghaidh an tsoicind a bhíonn an luas ag athrú. Abair gur 60 km/h a bhíonn ar an luasmhéadar. Sin é an luas **meandrach**.

Is é an calcalas an áis mhatamaitice a ligfidh dúinne **rátáí meandracha athraithe** a ríomh.

## Mír 2.1 Meánrátá athraithe

D'fhoghlaimíomar cheana fén an chaoi le fána líne a fháil má thugtar dhá phointe ar an líne dúinn.

$$\text{An fhána, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

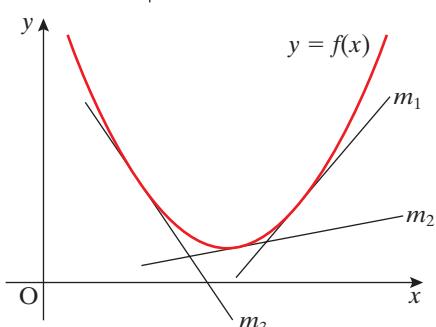
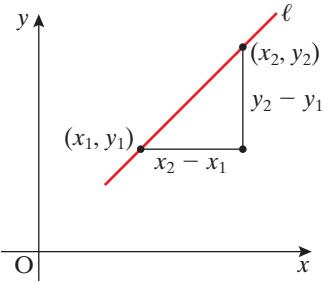
**Rátá athraithe** y i leith x a thabharfaimid ar an bhfána seoanois.

Uimhir phosaithe a bhíonn i bhfána líne i gcónaí toisc go mbíonn an fhána tairiseach feadh na líne ar fad.

Léiríonn an cuar ar dheis graf na feidhme  $y = f(x)$ .

Cén chaoi a bhfaighimid fána an chuair?

Is ionann fána cuair ag pointe ar bith agus fána an tadhlaí leis an gcuair ag an bpointe sin.



Taispeántar sa léaráid thusa tadhlaithe a tharraingítear ag trí phointe dhifriúla ar an cuar. Tá fánaí difriúla leis na trí thadhlaí –  $m_1, m_2$  agus  $m_3$ .

Sa chéad mhír eile den chaibidil seo, taispeánfaimid an chaoi ar féidir an calcalas a úsáid chun fána an tadhlaí le cuar ag pointe ar bith ar an cuar a fháil.

## Meánráta athraithe

Léiríonn an cuar ar dheis graf

$$f(x) = x^2$$

Taispeántar na pointí  $(1, 1)$   $(2, 4)$  agus  $(3, 9)$  ar an cuar.

Tarraingítear líne trí  $(1, 1)$  agus  $(3, 9)$  agus líne eile trí  $(1, 1)$  agus  $(2, 4)$ .

$l$  agus  $m$  a thugtar ar na línte seo.

$$\text{Fána of } l = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Fána of } m = \frac{4 - 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

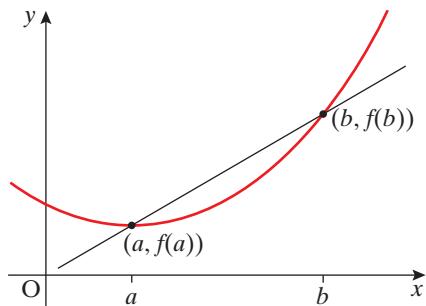
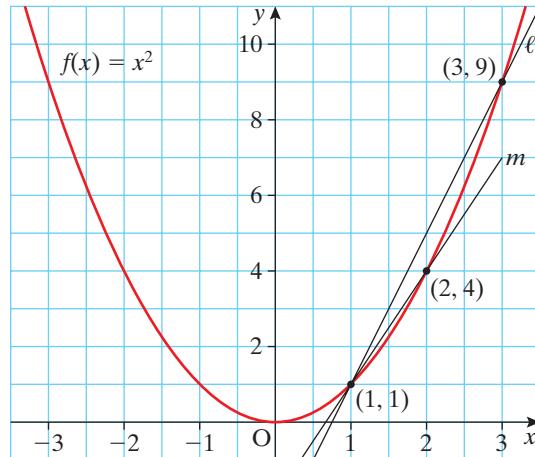
An **meánráta athraithe** a thugtar de ghnáth ar fhána na líne  $l$  a nascann  $(1, 1)$  agus  $(3, 9)$ .

Meánráta athraithe na líne  $m$  = fána  $m$  = 3.

De ghnáth, i gcás feidhm ar bith  $y = f(x)$ , is ionann meánráta athraithe  $y$  i leith  $x$  thar an eatramh  $[a, b]$  agus fána na líne a nascann  $(a, f(a))$  le  $(b, f(b))$ .

$$\text{Meánráta athraithe} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Seasann an t-eatramh  $[a, b]$  do  $a \leq x \leq b$ .

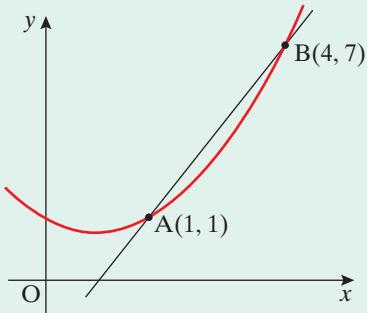


### Sampla 1

Faigh meánráta athraithe  $y$  i leith  $x$  don fheidhm  $y = f(x)$  thar an eatramh  $[1, 4]$  mar a thaispeántar.

An meánráta athraithe = fána<sub>AB</sub>

$$= \frac{7 - 1}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$



## Sampla 2

Is féidir an teocht  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) i seomra ranga ar lá áirithe a shamháltú leis an gcothromóid

$$T = \frac{200}{t^2 + 2t + 20}, \text{ nuair is é } t \text{ an t-am tar éis 6.00 p.m.}$$

- Faigh (i) an teocht sa seomra ag 6.00 p.m.  
 (ii) an teocht sa seomra ag meán oíche  
 (iii) an meánráta athraithe ar an teocht ó 6.00 p.m. go meán oíche.

(i) Ag 6.00 p.m.,  $t = 0$

$$\Rightarrow T = \frac{200}{(0)^2 + 2(0) + 20} = 10^{\circ}\text{C}$$

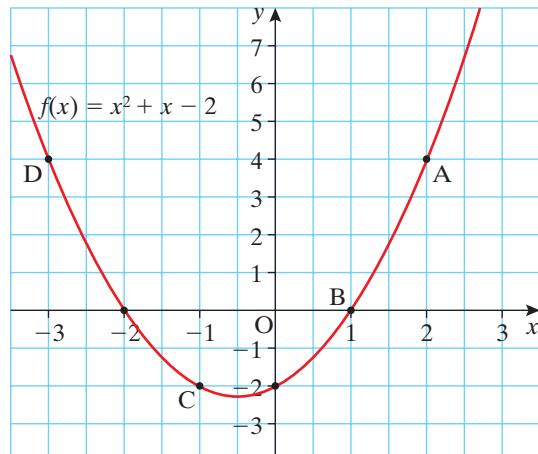
(ii) Ag meán oíche,  $t = 6$

$$\Rightarrow T = \frac{200}{(6)^2 + 2(6) + 20} = 2.94^{\circ}\text{C}$$

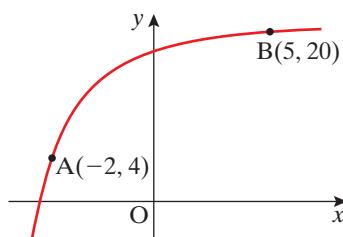
(iii) An meánráta athraithe =  $\frac{10 - 2.94}{6 - 0} = 1.18^{\circ}\text{C/uair}$

## Cleachtadh 2.1

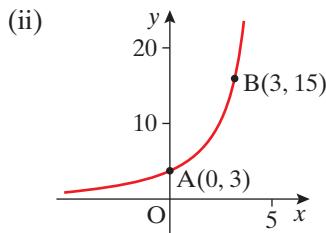
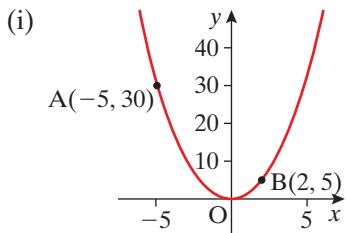
1. Léiríonn an cuar ar dheis graf na feidhme  $f(x) = x^2 + x - 2$ .  
 Taispeántar na pointí A, B, C agus D.  
 Faigh meánráta athraithe  $y$  i leith  $x$  don líne trí  
 (i) A agus B  
 (ii) B agus C  
 (iii) C agus D.



2. Faigh meánráta athraithe na feidhme a léirítar sa ghraf thall don eatramh  $[-2, 5]$ .



3. Faigh meánráta athraithe  $y$  i leith  $x$  ón bpointe A go dtí an pointe B do na graif seo a leanas.

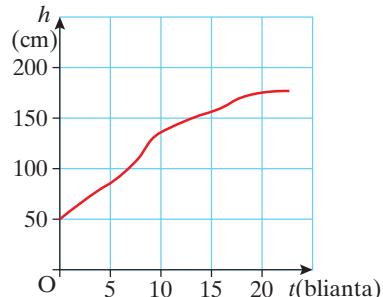


4. Samhaltaítar doimhneacht,  $d$  cm, an uisce i bhfolcadán  $t$  nóiméad i ndiaidh an sconna a chasadh ar siúl leis an bhfeidhm  $d(t) = \frac{-300}{(t+6)} + 50, t \geq 0$ .

Faigh meánráta athraithe dhoimhneacht an uisce san fholcadán sa chéad deich nóiméad i ndiaidh an sconna a chasadh ar siúl.

5. Taispeántar graf d'aire duine  $h$  (cm) in aghaidh  $t$  (blianta), ó am éigin i ndiaidh a bhreithe go dtí go bhfuil sé 20 bliain d'aois.

- (i) Cathain atá an ráta fáis is mó ann?  
(ii) Meas an meánráta fáis idir 5 bliana d'aois agus 10 mbliana d'aois.



6. Tá slíos  $x$  cm ar chiúb.

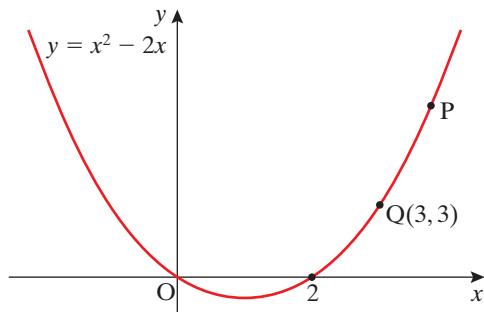
- (i) Faigh slonn d'achar dromchla,  $S(x)$ , an chiúib.  
(ii) Faigh an meánráta ar a n-athraíonn an t-achar dromchla maidir le  $x$  de réir mar a mhéadaíonn  $x$  ó  $x = 2$  cm go  $x = 5$  cm.

7. Léiríonn an cuar ar dheis graf na feidhme  $y = x^2 - 2x$ .

Is é  $(3, 3)$  an pointe Q.

Pointe ar bith eile ar an gcuar é P.

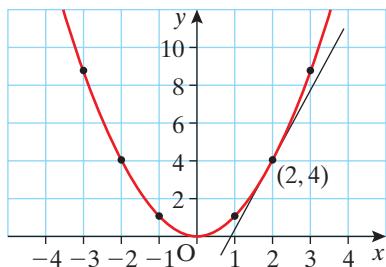
- (i) Más é P an pointe  $(4, 8)$ , faigh fána PQ.  
(ii) Más é P an pointe  $(3.5, 5.25)$ , faigh fána PQ.  
(iii) Más é P an pointe  $(3.1, 3.41)$ , faigh fána PQ.  
(iv) Céard a thugann na torthaí i gcodanna (i) go (iii) le fios maidir le fána an tadhlaí leis na gcuar ag Q?



## Mír 2.2 An difreáil ó bhunphrionsabail

Taispeántar graf na feidhme  $y = x^2$ .

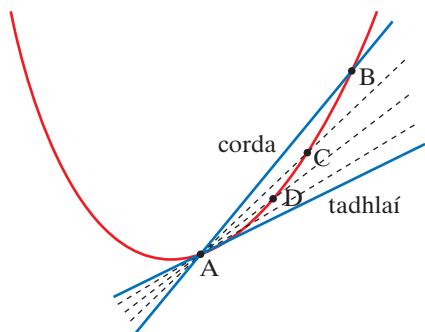
D'fhéadfaimis fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe  $(2, 4)$  a fháil ach cuar agus tadhlaí cruinn a tharraingt agus ansin an fhána a thomhas trí phointe eile a fháil ar an tadhlaí. Ach meastachán a thabharfadh an modh seo, ní freagra cruinn, agus mar sin caithfear modh eile a aimsiú.



Léirítear ar an léaráid ar dheis an modh a úsáidtear chun fána an tadhlaí le cuar ag pointe ar bith a fháil. Má roghnaímid na pointí  $C$  agus  $D$  ar an stua  $AB$ , tabharfaimid faoi deara dá ghaire an pointe do  $A$ , is é is gaire an neastachán le fána an tadhlaí ag  $A$ .

De réir mar a thagann an pointe an-ghar do  $A$ , deirimid go bhfuil

fána an tadhlaí = teorainn fhána an chorda de réir mar a dhruideann an pointe le  $A$ .



## Difreáil ó bhunphrionsabail

Anois breathnóimid ar an modh chun fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = f(x)$  a fháil ag pointe  $A(x, f(x))$  ar bith ar an gcuar.

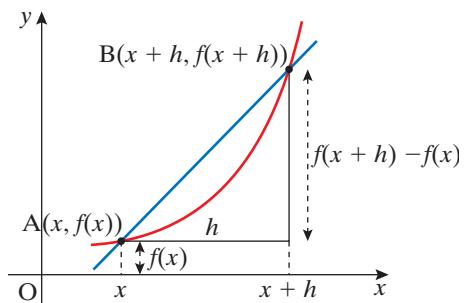
Bíodh  $B$  ina phointe eile ar an gcuar mar a bhfuil  $x$ -chomhordanáid  $B$  cothrom le  $x + h$ , nuair is ionann  $h$  agus méadú beag.

Dá bhrí sin, is iad comhordanáidí  $B$

$$(x + h, f(x + h)).$$

Ón léaráid, tá fána an chorda

$$AB = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$



Nuair a éiríonn  $h$  an-bheag, is ionann fána an tadhlaí ag  $A$  agus teorainn fhána an chorda  $AB$  de réir mar  $h \rightarrow 0$ .

$$\Rightarrow \text{fána an tadhlaí ag } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

An **fheidhm dhíorthaithe** a thugtar ar  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ , más ann di.

Is leis an nodaireacht  $\frac{dy}{dx}$  ('dy, dx' a deirtear), nó  $f'(x)$  ('f dais x' a deirtear), a chuirtear an fheidhm dhíorthaithe, an **díorthach**, in iúl.

*An fheidhm dhíorthaithe*

De ghnáth, i gcás an chuair  $y = f(x)$ , seasann

$$\frac{dy}{dx} \text{ (nó } f'(x)) = \operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

d'fhána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe  $(x, y)$  ar an gcuar.

**Difréail ó bhunphrionsabail** a thugtar ar an bpróiseas chun díorthach na feidhme  $y = f(x)$  a fháil trí  $\operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$  a fháil.

Sa chéad mhír eile den chaibidil seo, feicfimid go bhfuil rialacha bunúsacha ann is féidir a úsáid chun an méid oibre a bhaineann le difréail ó bhunphrionsabail a laghdú.

**Nóta:** Nuair a thugtar feidhm san fhoirm  $f(x) = \dots$ , is mar seo a scríobhtar an díorthach:  $f'(x) = \dots$ .

Nuair a thugtar feidhm san fhoirm  $y = \dots$ , scríobhtar an díorthach san fhoirm  $\frac{dy}{dx} = \dots$ .

I gcás feidhm ar bith  $y = f(x)$ , is féidir  $\frac{dy}{dx}$  a scríobh mar seo freisin:  $\frac{d}{dx}(y)$ .

'An d  $dx$  de  $y$ ' a deirtear.

### Sampla 1

Difréail  $f(x) = 3x + 8$  ó bhunphrionsabail.

$$f(x) = 3x + 8$$

$$\begin{aligned} f(x + h) &= 3(x + h) + 8 \\ f(x + h) - f(x) &= 3(x + h) + 8 - 3x - 8 \\ &= 3x + 3h + 8 - 3x - 8 \\ &= 3h \end{aligned}$$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{3h}{h} = 3 \quad \dots \text{ ag roinnt an dá thaobh ar } h$$

$$\operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} 3 = 3$$

$$\therefore f'(x) = 3$$

**Nóta:** Ó tharla gur feidhm líneach é  $f(x) = 3x + 8$  glactar leis gur fána thairiseach é  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ .

## Sampla 2

Difreáil  $f(x) = x^2 - 6x$  ó bhunphrionsabail.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 6x \\f(x+h) &= (x+h)^2 - 6(x+h) \\&= x^2 + 2hx + h^2 - 6x - 6h \\\hline f(x+h) - f(x) &= x^2 + 2hx + h^2 - 6x - 6h - (x^2 - 6x) \\&= x^2 + 2hx + h^2 - 6x - 6h - x^2 + 6x \\&= 2hx + h^2 - 6h \\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{2hx + h^2 - 6h}{h} = 2x + h - 6 \\ \operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} (2x + h - 6) \\&= 2x - 6 \\ \therefore f'(x) &= 2x - 6\end{aligned}$$

**Nóta:** Ó tharla gur cuar cearnach é graf  $f(x) = x^2 - 6x$ , níl an fhána (an ráta athraithe) tairiseach agus athraíonn sí de réir mar a athraíonn  $x$ , i.e. athraíonn  $(2x - 6)$  de réir mar a athraíonn  $x$ .

## Sampla 3

Faigh, ó bhunphrionsabail, fána an tadhlaí leis an gcuar a bhfuil an chothromóid  $f(x) = x^2 + x + 5$  aige ag an bpointe ag a bhfuil  $x = 3$ .

Chun fána an tadhlaí a fháil, gheobhaimid  $f'(x)$ .

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + x + 5 \\f(x+h) &= (x+h)^2 + (x+h) + 5 \\&= x^2 + 2hx + h^2 + x + h + 5 \\f(x+h) - f(x) &= x^2 + 2hx + h^2 + x + h + 5 - (x^2 + x + 5) \\&= x^2 + 2hx + h^2 + x + h + 5 - x^2 - x - 5 \\&= 2hx + h^2 + h \\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= 2x + h + 1 \\ \operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \operatorname{tr}_{h \rightarrow 0} (2x + h + 1) \\&= 2x + 1 \\ \therefore f'(x) &= 2x + 1\end{aligned}$$

Nuair atá  $x = 3$ ,  $f'(x) = 2(3) + 1 = 7$ .

Dá bhrí sin, is é 7 fána an tadhlaí ag an bpointe ag a bhfuil  $x = 3$ .

## Cleachtadh 2.2

1. Difreáil iad seo a leanas ó bhunphrionsabail:

(i)  $f(x) = 5x$

(ii)  $f(x) = 3x - 4$

(iii)  $f(x) = 6 - 4x$

2. Faigh díorthach gach ceann díobh seo a leanas ó bhunphrionsabail:

(i)  $f(x) = x^2$

(ii)  $f(x) = 2x^2 + 9x$

(iii)  $f(x) = 3x^2 - 4x - 6$

3.  $f(x) = x^2 - 2x + 5$

(i) Faigh  $f'(x)$  ó bhunphrionsabail.

(ii) Uайдh sin, faigh fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = f(x)$  ag an bpointe  $(2, 5)$ .

(iii) Anois faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $y = f(x)$  ag an bpointe  $(2, 5)$ .

4. Má tá  $f(x) = kx^2$ , taispeáin ó bhunphrionsabail go bhfuil  $f'(x) = 2kx$  i gcás gach  $x \in \mathbb{R}$ .

5. Faigh díorthach gach ceann díobh seo a leanas ó bhunphrionsabail:

(i)  $f(x) = -x^2$

(ii)  $f(x) = 4x - x^2$

(iii)  $f(x) = 2 - x - 3x^2$

6. Úsáid bunphrionsabail chun díorthach  $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ .

Úsáid do thoradh agus faigh

(i) fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe  $(3, 7)$

(ii) cothromóid an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe  $(3, 7)$

7. Tugtar achar diosca leis an gcothromóid  $A = \pi r^2$ , nuair is é  $r$  ga an diosca.

Úsáid bunphrionsabail agus faigh  $\frac{dA}{dr}$ , ráta athraithe  $A$  i leith  $r$ .

8. Má tá  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ , faigh  $f'(x)$  ag úsáid bunphrionsabal.

Uайдh sin, faigh an pointe ar an gcuar  $y = f(x)$  nuair atá fána an tadhlaí cothrom le nialas.

## Mír 2.3 An difreáil de réir rialach

Sa mhír roimhe seo, fuaireamar díorthach feidhme ó bhunphrionsabail.

Éiríonn an modh seo an-fhadálach de réir mar a Éiríonn an fheidhm níos casta.

Taispeánfaimidanois an chaoi ar féidir rialacha áirithe a úsáid chun díorthach feidhme a fháil gan modh na difreála ó bhunphrionsabail a úsáid.

Is féidir bunphrionsabail a úsáid chun an méid seo a leanas a thaispeáint:

(i) Má tá  $y = x^2$ , tá  $\frac{dy}{dx} = 2x$

(ii) Má tá  $y = 4x^2$ , tá  $\frac{dy}{dx} = 8x$

(iii) Má tá  $y = x^3$ , tá  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

Tugann an patrún sna díorthaigh seo toradh ginearálta le fios, rud atá le feiceáil thíos:

An difréail de réir rialach

1. Má tá  $y = x^n$ , tá  $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$  i gcás gach  $n \in \mathbb{R}$ .
2. Má tá  $y = ax^n$ , tá  $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$

Is féidir an riail a rá mar seo a leanas:

Chun difréail a dhéanamh ar théarma ina bhfuil cumhacht de  $x$ , iolraigh an chomhéifeacht faoin gcumhacht agus laghdaigh an chumhacht de 1.

### Samplaí

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & y = 3x^2 & \text{(ii)} & y = 7x^3 \\ & \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x & & \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 21x^2 \\ & & & \Rightarrow f'(x) = 5x^0 \\ & & & = 5 \\ & & & \Rightarrow f'(x) = 24x^3 \end{array}$$

### Díorthach tairisigh

Tabhair faoi deara má tá  $y = 4$  (tairiseach), is féidir é seo a scríobh mar

$$\text{Dá bhrí sin, } y = 4x^0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (0)4x^{-1} = 0. \quad y = 4x^0. \quad \dots \text{ (bíonn uimhir ar bith i gcumhacht nialais = 1)}$$

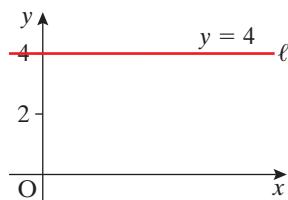
Taispeánann sé seo go mbíonn díorthach tairisigh cothrom le nialas.

Bíonn díorthach tairisigh = 0.

Is é  $y = 4$  cothromóid na líne  $l$  a thaispeántar.

Tá fána  $l$  cothrom le nialas.

Ó tharla go seasann  $\frac{dy}{dx}$  don fhána, léiríonn an léaráid go mbíonn díorthach tairisigh cothrom le nialas.



### Díorthach suime agus díorthach difríochta

Má bhíonn níos mó ná téarma amháin i bhfeidhm  $y = f(x)$ , déanaimid gach téarma a dhifréail ceann ar cheann chun  $f'(x)$  a fháil.

$$\text{Má tá } f(x) = u(x) + v(x), \text{ tá } f'(x) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

### Samplaí

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & y = 2x^2 + 5x & \text{(ii)} & y = 6x^3 - 3x^2 + 4 & \text{(iii)} & y = 2 + 3x - 6x^2 \\ & \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x + 5 & & \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 18x^2 - 6x & & \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3 - 12x \end{array}$$

Chun an fheidhm  $y = \frac{1}{x^2}$ , a dhifréáil, athscríobhaimid an fheidhm mar

$y = x^{-2}$  agus mar sin  $\frac{dy}{dx} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$  ... nuair a laghdaítear  $-2$  de  $1, -3$  a fhaigtear

### Sampla 1

Faigh díorthach  $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 4x$ .

Uaidh sin, faigh  $f'(2)$  agus léirmhínigh an toradh.

$$f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 3(6x^2) - 2(3x) + 4$$

$$f'(x) = 18x^2 - 6x + 4$$

$$f'(2) = 18(2)^2 - 6(2) + 4 = 64$$

$f'(2) = 64$ , rud a léiríonn gurb é fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe ag a bhfuil  $x = 2$  ná 64.

### Sampla 2

Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann dióbh seo a leanas:

(i)  $y = 3x^2 + \frac{2}{x}$

(i)  $y = 3x^2 + \frac{2}{x}$

$$\Rightarrow y = 3x^2 + 2x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 2x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - \frac{2}{x^2}$$

(ii)  $y = \sqrt{x} - \frac{4}{x^2}$

(ii)  $y = \sqrt{x} - \frac{4}{x^2}$

$$\Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 8x^{-3}$$

$$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{8}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{8}{x^3}$$

### Sampla 3

Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = 3x^2 + 4x - 5$  ag an bpointe  $(1, 2)$ . Uайд sin, faigh cothromóid an tadhlaí ag an bpointe sin.

Is é  $\frac{dy}{dx}$  fána an tadhlaí.

$$y = 3x^2 + 4x - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 4$$

$$= 6(1) + 4 = 10 \quad \dots \text{ag an bpointe } (1, 2)$$

Anois úsáidimid an fhoirmle  $y - y_1 = m(x - x_1)$  chun cothromóid an tadhlaí ag  $(1, 2)$  a fháil.

$$\Rightarrow y - 2 = 10(x - 1) \quad \dots \text{fána} = 10$$

$$\Rightarrow y - 2 = 10x - 10$$

$$\Rightarrow 10x - y - 8 = 0 \text{ cothromóid an tadhlaí.}$$

### Sampla 4

Faigh na pointí ar an gcuar  $y = x^3 - 3x^2$  ag a bhfuil fána an tadhlaí leis an gcuar cothrom le 9.

$$y = x^3 - 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x = 9 \quad \dots \text{ó tharla go bhfuil an fhána} = 9$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ nó } x = -1$$

Nuair atá  $x = 3$ ,  $y = (3)^3 - 3(3)^2$  i.e. 0

$$\Rightarrow (3, 0) \text{ pointe amháin.}$$

Nuair atá  $x = -1$ ,  $y = (-1)^3 - 3(-1)^2$  i.e. -4

$$\Rightarrow (-1, -4) \text{ an dara pointe.}$$

Dá bhrí sin is iad  $(3, 0)$  agus  $(-1, -4)$  an dá phointe.

## Cleachtadh 2.3

1. Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:

(i)  $y = 5x^5$

(ii)  $y = 5x^2 - 4x$

(iii)  $y = 6x^2 + 5x - 4$

(iv)  $y = x^3 - 8x + 2$

(v)  $y = x^2 + 2x + \frac{1}{x}$

(vi)  $y = 2x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2}$

- 2.** Faigh  $f'(x)$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:
- (i)  $f(x) = 7x^2 - \frac{3}{x}$       (ii)  $f(x) = 3\sqrt{x}$       (iii)  $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$   
 (iv)  $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x}$       (v)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$       (vi)  $f(x) = 3x^{-2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- 3.** Má tá  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .
- 4.** Faigh  $f'(x)$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:
- (i)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$       (ii)  $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$       (iii)  $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$   
 (iv)  $f(x) = 6 - \frac{3}{x}$       (v)  $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$       (vi)  $f(x) = x^2 + 3 - \frac{4}{x^{-2}}$ .
- 5.** Má tá  $y = \sqrt{x}(1 + \sqrt{x})$ , bain na lúibíní agus ansin faigh  $\frac{dy}{dx}$ .  
 Ansín faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  nuair atá  $x = 4$ .
- 6.** Má tá  $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x}$ , faigh  $f'(x)$  agus uaidh sin faigh luach  $f'(4)$ .
- 7.** Má tá  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , faigh  $f'(4)$  agus sloinn do fhreagra mar chodán.
- 8.** Má tá  $y = x^{\frac{5}{2}}$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$  agus taispeáin, nuair atá  $x = 2$ , gur féidir luach  $\frac{dy}{dx}$  a scríobh san fhoirm  $p\sqrt{2}$ , nuair is ionann  $p$  agus slánuimhir atá le fáil.
- 9.** Má tá  $f(x) = x^2 + kx$  agus  $f'(-1)$  cothrom le 3, faigh luach  $k$ .
- 10.** Má tá  $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ , taispeáin gur féidir  $\frac{dy}{dx}$  a scríobh san fhoirm  $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ .
- 11.** Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = x^2 - 2x - 3$  g an bpointe  $(2, 3)$ .
- 12.** Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = 2x^2 - 3x + 4$  g an bpointe  $(1, 3)$ . Uaidh sin faigh cothromóid an tadhlaí.
- 13.** Faigh fána an tadhlaí leis an gcuare  $y = 6 + x - x^2$  g an bpointe  $(2, 4)$ . Uaidh sin faigh cothromóid an tadhlaí.
- 14.** Faigh luach  $x$  nuair atá fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = 8 + 2x - x^2$  is 6 cothrom le 6.
- 15.** Cén pointe ar an gcuar  $y = x^2 - x$  ag a bhfuil fána an tadhlaí cothrom le 1?
- 16.** Faigh an pointe ar an gcuar  $y = 2x^2 - x - 4$  ag a bhfuil fána an tadhlaí cothrom le 3.
- 17.** Faigh luach  $a$  más é 3 fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = x^2 + ax$  ag an bpointe ag a bhfuil  $x = -1$  is 3.
- 18.** Taispeáin go bhfuil an tadhlaí leis an gcuar  $y = x^2 - 3x + 4$  comhthreomhar leis an  $x$ -ais ag an bpointe ag a bhfuil  $x = 1\frac{1}{2}$ .

19. Faigh an pointe ar an gcuar  $y = 2x^2 - 8x + 3$  ag a bhfuil an tadhlaí comhthreomhar leis an líne  $4x - y + 2 = 0$ .
20. Tá an tadhlaí a tharraingítear go dtí an cuar  $y = 2x^2 + 3x$  ag an bpointe  $P(x, y)$  comhthreomhar leis an  $x$ -ais.  
Faigh comhordanáidí  $P$ .
21. Cothromóid feidhme is ea  $y = a\sqrt{x} + b$ , nuair atá  $a$  agus  $b$  tairiseach.  
Má tá  $\frac{dy}{dx} = 3$  ag an bpointe  $(4, 6)$ , faigh luach  $a$  agus luach  $b$ .
22. Tarraingítear tadhlaí leis an gcuar ag a bhfuil an chothromóid  $y = \frac{3}{x}$  ag an bpointe  $(2, \frac{3}{2})$ .  
Téann an tadhlaí tríd an  $x$ -ais ag  $A$ , agus tríd an  $y$ -ais ag  $B$ .  
Céard é achar an triantáin  $AOB$ , más é  $O$  an bunphointe?

## Mír 2.4 Riail an Toraidh, Riail an Lín agus an Chuinqrial —

### 1. Riail an Toraidh

Is féidir an fheidhm  $y = (3x - 4)(x^2 + 2)$  a dhifréail ach a bhfuil idir an dá phéire lúibíní a iolrú faoina chéile agus ansin an toradh a dhifréail.

$$\begin{aligned} \text{Dá bhrí sin, } \quad y &= 3x^3 - 4x^2 + 6x - 8 \\ \text{agus } \frac{dy}{dx} &= 9x^2 - 8x + 6. \end{aligned}$$

Nuir a éiríonn forbairt an tsloinn rófhadálach, is féidir toradh a dhifréail ar bhealach i bhfad níos giorra ach modh ar a dtugtar *Riail an Toraidh* a úsáid.

*Riail an Toraidh*

Má tá  $y = uv$ , nuair is feidhmeanna de  $x$  iad  $u$  agus  $v$  araon, tá

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

#### Sampla 1

Má tá  $y = (6x^2 + 2x)(3x - 2)$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\text{Toradh é seo ina bhfuil} \quad u = 6x^2 + 2x \quad \text{agus} \quad v = 3x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 12x + 2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$= (6x^2 + 2x)(3) + (3x - 2)(12x + 2)$$

$$= 18x^2 + 6x + 36x^2 + 6x - 24x - 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 54x^2 - 12x - 4$$

*Riail an Toraidh  
i bhfocail*

Nuair atá dhá fhachtóir i dtoradh, i.e.  $y = (an\ chéad\ fhachtóir)(an\ dara\ fachtóir)$ , is féidir riail an toraidh a chur de għlanmheabhair mar seo:

“an chéad fhachtóir  $\times$  díorthach an dara fachtóir + an dara fachtóir  $\times$  díorthach an chéad fhachtóra”

## 2. Riail an Lín

Má bhíonn difréail le déanamh ar fheidhm san fhoirm  $y = \frac{u}{v}$ , nuair is feidhmeanna de chuid  $x$  iad  $u$  agus  $v$  araon,

mar shampla  $y = \frac{2x - 3}{3x + 4}$ , úsáidimid *Riail an Lín, rud a thugtar thíos*:

*Riail an Lín*

Má tá  $y = \frac{u}{v}$ , nuair is feidhmeanna de chuid  $x$  iad  $u$  agus  $v$ , tá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Nuair atá líon san fhoirm  $y = \frac{\text{uachtar}}{\text{íochtar}}$ , is féidir é a rá mar seo:

$$\frac{\text{Íochtar} \times \text{Díorthach an uachtair} - \text{Uachtar} \times \text{Díorthach an íochtair}}{(\text{Íochtar})^2}$$

### Sampla 2

Má tá  $f(x) = \frac{x^2 + 7}{3x - 1}$ , faigh  $f'(x)$ .

$$\begin{aligned} \text{Is líon é } \frac{x^2 + 7}{3x - 1} \text{ ina bhfuil } u &= x^2 + 7 \quad \text{agus} \quad v = 3x - 1 \\ &\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \\ &= \frac{(3x - 1)(2x) - (x^2 + 7)(3)}{(3x - 1)^2} = \frac{6x^2 - 2x - 3x^2 - 21}{(3x - 1)^2} \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 21}{(3x - 1)^2} \end{aligned}$$

### 3. An Chuingriail

Nuair a scríobhaimid  $y = (3x - 4)^3$ , deirimid go bhfuil  $y$  ina fheidhm de  $x$ .

Má tá  $u = (3x - 4)$ , tá

$$y = u^3 \text{ agus } u = 3x - 4.$$

Anois, feidhm de chuid  $u$  is ea  $y$  agus feidhm de chuid  $x$  is ea  $u$ .

Mar gheall air seo, deirtear go bhfuil  $y = (3x - 4)^3$  ina **fheidhm chomhshuite** nó gur **feidhm feidhme** é.

Samplaí eile d'fheidhmeanna comhshuite iad:

(i)  $y = (1 - 6x)^4$       (ii)  $y = \sqrt{5x + 2}$       (iii)  $y = \sqrt[3]{3x^2 + 6}$

D'fhéadfá an fheidhm  $y = (3x - 4)^3$  a dhifréáil ach a bhfuil idir na lúibíní a fhorbairt agus an toradh a dhifréáil. Ach is féidir é a dhifréáil ar bhealach níos éasca ach modh ar a dtugtar an *Chuingriail* a úsáid.

Chun an fheidhm  $y = (3x - 4)^3$ , a dhifréáil, bíodh  $u = 3x - 4$ .

Ansin tá,  $y = u^3$  agus  $u = 3x - 4$ .

Deir an Chuingriail go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} & y &= u^3 \text{ agus } u = 3x - 4 \\ &= 3u^2 \cdot 3 & \Rightarrow \frac{dy}{du} &= 3u^2 \text{ agus } \frac{du}{dx} = 3 \\ &= 9u^2 & &= 9(3x - 4)^3\end{aligned}$$

*An Chuingriail*

Má tá  $y$  ina fheidhm de chuid  $u$ , agus má tá  $u$  ina fheidhm de chuid  $x$ , tá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

#### Sampla 3

Faigh  $\frac{dy}{dx}$  má tá (i)  $y = (2x^2 - 1)^3$     (ii)  $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ .

(i)  $y = (2x^2 - 1)^3$

$$\begin{aligned}\text{Bíodh } u &= 2x^2 - 1 \Rightarrow y = u^3 \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} &= 4x \quad \text{agus} \quad \frac{dy}{du} = 3u^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3u^2 \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2 - 1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & y = \sqrt{3x^2 - 2} = (3x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} \\
 \text{Bíodh } & u = 3x^2 - 2 \Rightarrow \quad y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \\
 \Rightarrow \frac{du}{dx} &= 6x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 6x = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 2}} \cdot 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 2}}
 \end{aligned}$$

Sna samplaí thuas, cuireadh  $u$  in ionad fheidhm  $x$  laistigh de na lúibíní.

Agus muid á dhéanamh as seo amach, fágfaimid an chéim seo ar lár agus scríobhfaimid síos díorthach na feidhme comhshuite gan an t-ionadú a dhéanamh.

Seo a leanas roinnt samplaí:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)} \quad y = (2x + 5)^3 & \text{(ii)} \quad y = (x^2 - 3x)^4 \\
 \frac{dy}{dx} = 3(2x + 5)^2 \cdot \frac{d}{dx}(2x + 5) & \frac{dy}{dx} = 4(x^2 - 3x)^3 \frac{d}{dx}(x^2 - 3x) \\
 = 3(2x + 5)^2(2) & = 4(x^2 - 3x)^3(2x - 3) \\
 = 6(2x + 5)^2 & = 4(2x - 3)(x^2 - 3x)^3
 \end{array}$$

#### Sampla 4

Faigh  $\frac{dy}{dx}$  má tá (i)  $y = (x^2 - 3x)^4$  (ii)  $y = \sqrt{x^2 - 6x}$ .

$$\text{(i)} \quad y = (x^2 - 3x)^4$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= 4(x^2 - 3x)^3(2x - 3) \dots (2x - 3) = \frac{d}{dx}(x^2 - 3x) \\
 &= 4(2x - 3)(x^2 - 3x)^3
 \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad y = \sqrt{x^2 - 6x} \Rightarrow y = (x^2 - 6x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(x^2 - 6x)^{-\frac{1}{2}}(2x - 6) \\
 &= \frac{2x - 6}{2(x^2 - 6x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2(x - 3)}{2\sqrt{x^2 - 6x}} = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x}}
 \end{aligned}$$

## Sampla 5

Má tá  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  nuair atá  $x = -3$ .

$$\begin{aligned} \text{Tá líon againn anseo ina bhfuil} \quad u &= x \quad \text{agus} \quad v = \sqrt{1-x} \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} &= 1 \quad \text{agus} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \\ &= \frac{\sqrt{1-x}.1 - x \left( \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \right)}{1-x} \\ &= \frac{\sqrt{1-x} + \frac{x}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} \\ &= \frac{2(1-x) + x}{2\sqrt{1-x}(1-x)} \quad \dots \text{iolraigh gach téarma thusa agus thíos faoi } 2\sqrt{1-x} \\ &= \frac{2-x}{2\sqrt{1-x}(1-x)} \\ &= \frac{2-(-3)}{2\sqrt{4}(4)} = \frac{5}{16} \text{ ag } x = -3 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

## Cleachtadh 2.4

1. Úsáid *Rial an Toraidh* chun díorthach gach ceann díobh seo a fháil:

- (i)  $y = (3x+4)(x-2)$
- (ii)  $y = (3x-4)(4x+5)$
- (iii)  $y = (x^2+2)(x-1)$
- (iv)  $y = (2x-1)(x^2-2)$
- (v)  $y = (1-x)(2-x^2)$
- (vi)  $y = (x^3-1)(2x+1)$

2. Úsáid *Rial an Lín* chun  $f'(x)$  a fháil i gcás gach ceann díobh seo a leanas:

- (i)  $f(x) = \frac{3x}{2x+6}$
- (ii)  $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$
- (iii)  $f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$
- (iv)  $f(x) = \frac{2x^2-1}{2x-3}$
- (v)  $f(x) = \frac{2x^3}{1-2x}$
- (vi)  $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-3}$

3. Má tá  $y = \frac{x^2+1}{3x-1}$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  ag  $x = 0$ .

4. Úsáid *Rial an Toraidh* chun  $y = \sqrt{x}(2x-1)$  a dhifreáil i leith  $x$  agus sloinn do fhreagra mar chodán singil.

5. Má tá  $y = (\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)$ , úsáid *Rial an Toraidh* chun a thaispeáint go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = 1$ .

6. Má tá  $y = \frac{x}{1-x^2}$ , taispeáin go bhfuil  $\frac{dy}{dx} > 0$  i gcás gach  $x \in \mathbb{R}$ .

7. Difreáil iad seo a leanas leis an gCuingriail:

(i)  $y = (x + 4)^2$

(ii)  $y = (2x - 1)^3$

(iii)  $y = (3x + 5)^3$

(iv)  $y = (x^2 - 1)^2$

(v)  $y = (2x^2 + 3)^4$

(vi)  $y = (1 - 3x)^5$

8. Faigh  $f'(x)$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:

(i)  $f(x) = \sqrt{4x + 1}$

(ii)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

(iii)  $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$

9. Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:

(i)  $y = 2x(2x + 5)^3$

(ii)  $y = (x^2 - 1)(3x + 2)^2$

(iii)  $y = (x + 4)^2(x - 2)$

10. Má tá  $y = (x^2 - 3)^3$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  nuair atá  $x = 1$ .

11. Má tá  $y = \frac{(2x - 1)^2}{3x + 4}$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  ag  $x = 0$ .

12. Má tá  $y = (2x^2 - 3)^7$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  ag  $x = -1$ .

13. Má tá  $f(x) = x\sqrt{x + 1}$ , faigh  $f'(x)$ .

14. Má tá  $4x^2 + 2xy = 5$ , sloinn y i dtéarmaí x agus uaidh sin faigh  $\frac{dy}{dx}$ .

15. Má tá  $y = \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$  agus faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  ag  $x = 1$ .

16. Má tá  $y = \frac{3x + 1}{1 - 2x}$ , sloinn  $\frac{dy}{dx}$  san fhoirm  $\frac{k}{(1 - 2x)^2}$ , nuair is uimhir thairiseach é k.

17. Má tá  $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2}$ , faigh luach  $f'(x)$  nuair atá  $x = 1$ .

18. Taispeáin, má tá  $y = (x - 1)^{\frac{3}{2}} - 3(x - 1)^{\frac{1}{2}}$ , go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = \frac{3(x - 2)}{2\sqrt{x - 1}}$ .

19. Má tá  $y = ax^3 + 2bx^2 + 3cx$  agus  $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 6$ , faigh luach na dtairiseach a, b agus c.

20. Má tá  $f(x) = \sqrt{\frac{4x}{x + 3}}$ , faigh luach  $f'(1)$ .

21. Cé acu seo a leanas atá ina dhíorthach de  $(8 - 2x^2)^{\frac{2}{3}}$ ?

A:  $-\frac{8}{3}x(8 - 2x^2)^{-\frac{1}{3}}$       B:  $(8 - 4x)^{\frac{2}{3}}$       C:  $\frac{2}{3}(8 - 4x)^{-\frac{1}{3}}$       D:  $\frac{3}{5}(8 - 2x^2)^{\frac{5}{3}}$

22. Tugtar na feidhmeanna f agus g le  $f(x) = 3x + 1$  agus  $g(x) = x^2 - 2$ .

- (a) (i) Faigh p(x) nuair atá  $p(x) = f(g(x))$ .  
(ii) Faigh q(x) nuair atá  $q(x) = g(f(x))$ .

(b) Réitigh  $p'(x) = q'(x)$ .

## Mír 2.5 An dara díorthach

I gcás feidhm ar bith  $y = f(x)$ , is é an chéad díorthach ná  $\frac{dy}{dx}$  nó  $f'(x)$ .

Má dhéanaimid an fheidhm a thagann as sin a dhifréail, gheobhaimid an **dara díorthach**.

Léirítear an dara díorthach le  $\frac{d^2y}{dx^2}$  nó  $f''(x)$ .

Mar seo a deirtear  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ‘d a dó  $y$ ,  $dx$  cearnaithe’.

D'fhoghlaímíomar níos luaithe, i gcás feidhm ar bith  $y = f(x)$ , go seasann  $\frac{dy}{dx}$  d'fhána an tadhláí leis an gcuar ag pointe ar bith ar an gcuar. Agus muid ag plé le graif na bhfeidhmeanna sa chéad chaibidil eile, feicfimid go dtugann  $\frac{d^2y}{dx^2}$  an ráta ar a n-athraíonn an fhána thar eatramh ar leith.

### Sampla 1

Má tá  $y = x + \frac{1}{x}$ , faigh  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y = x + x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 0 + 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

### Sampla 2

Má tá  $y = \frac{3}{x} + 4x$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$  agus  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ; uaidh sin, taispeáin go bhfuil  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$ .

$$y = \frac{3}{x} + 4x \Rightarrow y = 3x^{-1} + 4x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3x^{-2} + 4 = -\frac{3}{x^2} + 4$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Anois, } x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y \\
 &= x^2 \left( \frac{6}{x^3} \right) + x \left( -\frac{3}{x^2} + 4 \right) - \left( \frac{3}{x} + 4x \right) \\
 &= \frac{6}{x} - \frac{3}{x} + 4x - \frac{3}{x} - 4x \\
 &= \frac{6}{x} - \frac{3}{x} - \frac{3}{x} = \frac{6 - 3 - 3}{x} = \frac{0}{x} = 0 \\
 \Rightarrow & x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0
 \end{aligned}$$

## Cleachtadh 2.5

Faigh  $\frac{d^2y}{dx^2}$  na bhfeidhmeanna i gceisteanna (1–9):

1.  $y = x^3 + 2x^2$

2.  $y = x^4 - 3x^2 + 6$

3.  $y = \frac{1}{x}$

4.  $y = \frac{1}{x^2} + 3x^2$

5.  $y = 3x + \frac{1}{x} + 4$

6.  $y = \sqrt{x}$

7.  $y = \sqrt{2x + 3}$

8.  $y = (3x - 2)^3$

9.  $y = \frac{1}{x+4}$

10. Má tá  $y = x^4 - x^3 + 4x - 1$ , faigh  $\frac{d^2y}{dx^2}$  agus uайдh sin faigh na luachanna ar  $x$  mar a bhfuil  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ .

11. Má tá  $y = 3x + \frac{4}{x}$ , taispeáin go bhfuil  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$ .

12. Má tá  $f(x) = \frac{2}{x} + 4\sqrt{x}$ , taispeáin go bhfuil  $f''(4) = -\frac{1}{16}$ .

13. Má tá  $y = x^4$ , taispeáin go bhfuil  $\frac{4x^4}{3} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) - \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$ .

14. Má tá  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$  agus  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

Uайдh sin, taispeáin go bhfuil  $2x \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) + 3 \frac{dy}{dx} = 0$ .

## Mír 2.6 Díorthaigh feidhmeanna triantánúla

Baineann na bunrialacha don difreáil le feidhmeanna triantánúla freisin.

Léirítear díorthaigh na dtrí phríomhfheidhm thriantánúla thíos:

Díorthaigh  
thriantánúla  
chaighdeánacha

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

Léiríonn na samplaí seo a leanas úsáid *Riail an Toraidh*, *Riail an Lín* agus na *Cuingrialach* nuair atá feidhmeanna triantánúla á ndifreáil.

### Sampla 1

Difreáil gach ceann díobh seo a leanas i leith  $x$ :

$$(i) \ y = 3 \sin x + 2 \cos x \quad (ii) \ y = x^2 \sin x$$

$$(i) \ \frac{dy}{dx} = 3 \cos x + 2(-\sin x) = 3 \cos x - 2 \sin x$$

$$(ii) \ y = x^2 \sin x$$

(Tá toradh againn anseo ina bhfuil  $u = x^2$  agus  $v = \sin x$ .)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\ &= x^2(\cos x) + \sin x(2x) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= x^2 \cos x + 2x \sin x \end{aligned}$$

## Úsáid na Cuingrialach

Tá tábhacht ar leith ag baint leis an gCuingrial i gcás difreáil feidhmeanna triantánúla.

Chun  $y = \sin 4x$ , a dhifreáil, bíodh  $u = 4x$ .

$$\begin{aligned} y &= \sin u \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \cos u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Leis an } gCuingrial, \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \cos u \times 4 = 4 \cos u = 4 \cos 4x \end{aligned}$$

### An Chuingrial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ach de ghnáth ní úsáidimid modh an ionadaithe chun an *Chuingrial* a chur i bhfeidhm.

$$\text{Má tá } y = \sin 6x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos 6x \cdot \frac{d}{dx}(6x) = \cos 6x \cdot 6 = 6 \cos 6x$$

Seo dhá shampla eile d'úsáid na *Cuingrialach*:

(i) Má tá  $y = \sin x^2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cos x^2.(2x) \\ &= 2x \cos^2 x\end{aligned}$$

(ii) Má tá  $y = \cos(3x^2 + x)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\sin(3x^2 + x).(6x + 1) \\ &= -(6x + 1) \sin(3x^2 + x)\end{aligned}$$

### Díorthach $\sin^n x$ agus $\cos^n x$

Chun  $y = \sin^4 x$ , bíodh  $u = \sin x$ .

$$\begin{aligned}\Rightarrow y &= u^4 & \Rightarrow \frac{du}{dx} &= \cos x \\ \Rightarrow \frac{dy}{du} &= 4u^3\end{aligned}$$

Anois,  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot \cos x$

$$= 4 \sin^3 x \cdot \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \sin^3 x \cdot \cos x$$

Arís, féadfaimid díorthach  $\cos^3 x$ , mar shampla, a scríobh gan ionadú a dhéanamh.

Má tá  $y = \cos^3 x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3 \cos^2 x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3 \cos^2 x \sin x\end{aligned}$$

Ar an gcaoi chéanna, má tá  $y = \tan(3x^2)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \sec^2(3x^2) \cdot 6x \\ &= 6x \sec^2(3x^2)\end{aligned}$$

### An Chuingriail a úsáid faoi dhó

Cuir i gcás an fheidhm  $y = \sin^3(5x + 2)$ .

$$\Rightarrow y = [\sin(5x + 2)]^3$$

$$\sin^3 x = (\sin x)^3$$

Gan aon ionadú a dhéanamh, féadfaimid díorthach  $\sin^3(5x + 2)$  a scríobh síos ach

- díorthach na cumhachta a fháil, i.e.  $3 \sin^2(5x + 2)$
- an freagra a iolrú faoi dhíorthach na **feidhme** triantánúla  $\sin(5x + 2)$ , i.e.  $\cos(5x + 2)$ .
- an dá fhreagra a fuaireamar a iolrú faoi dhíorthach na huillinne  $(5x + 2)$ , i.e. 5.

Dá bhrí sin, i gcás

$$\begin{aligned}y &= \sin^3(5x + 2) \\ \frac{dy}{dx} &= 3 \sin^2(5x + 2) \cos(5x + 2) \cdot 5 \\ &= 15 \sin^2(5x + 2) \cos(5x + 2)\end{aligned}$$

Ar an gcaoi chéanna, má tá  $y = \cos^4(3x - 1)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4 \cos^3(3x - 1) [-\sin(3x - 1) \cdot 3] \\ &= -12 \cos^3(3x - 1) \sin(3x - 1)\end{aligned}$$

## Sampla 2

Faigh díorthach gach ceann díobh seo a leanas:

(i)  $\cos(7x - 3)$     (ii)  $\tan^2 3x$     (iii)  $\sin^3(x^2 + 2)$

(i) Bíodh  $y = \cos(7x - 3)$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(7x - 3).7 = -7 \sin(7x - 3)$$

(ii) Bíodh  $y = \tan^2 3x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2 \tan 3x \cdot \sec^2 3x \cdot 3 \\ &= 6 \tan 3x \sec^2 3x\end{aligned}$$

(iii) Bíodh  $y = \sin^3(x^2 + 2)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3 \sin^2(x^2 + 2) \cdot \cos(x^2 + 2) \cdot 2x \\ &= 6x \sin^2(x^2 + 2) \cos(x^2 + 2)\end{aligned}$$

## Sampla 3

Má tá  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ , taispeán go bhfuil  $f'(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$  agus uайдh sin faigh luach  $f(\pi)$ .

Tá  $\frac{1 + \sin x}{\cos x}$  san fhoirm  $\frac{u}{v}$ , agus mar sin úsáidimid *Rial an Lín* chun  $f'(x)$  a fháil.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \\ &= \frac{\cos x (\cos x) - (1 + \sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} \quad \dots (\sin^2 x + \cos^2 x = 1)\end{aligned}$$

$$f'(\pi) = \frac{1 + \sin \pi}{\cos^2 \pi} = \frac{1 + 0}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

## Cleachtadh 2.6

1. Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:

- |                               |                            |                              |
|-------------------------------|----------------------------|------------------------------|
| (i) $y = \sin 2x$             | (ii) $y = \cos 6x$         | (iii) $y = \tan 4x$          |
| (iv) $y = \sin(2x + 3)$       | (v) $y = \cos(3x - 1)$     | (vi) $y = \tan(x^2)$         |
| (vii) $y = \sin \frac{1}{2}x$ | (viii) $y = \cos(x^2 - 1)$ | (ix) $y = \sin 2x + \cos 4x$ |

- 2.** Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:
- (i)  $y = \sin^2 x$       (ii)  $y = \cos^3 x$       (iii)  $y = \tan^4 x$   
 (iv)  $y = \sin^3(4x)$       (v)  $y = \cos^2(2x + 1)$       (vi)  $y = \tan^3(4x + 3)$
- 3.** Faigh  $\frac{dy}{d\theta}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:
- (i)  $y = 2 \sin 3\theta + \cos 2\theta$       (ii)  $y = \tan^2 \theta + \tan 2\theta$   
 (iii)  $y = \cos 4\theta - \cos \frac{\theta}{4}$       (iv)  $y = \tan^3 \theta + 5$
- 4.** Úsáid *Rial an Toraidh* agus difréail iad seo a leanas:
- (i)  $y = x \sin 2x$       (ii)  $y = x^2 \cos x$       (iii)  $y = (x + 3) \sin x$
- 5.** Má tá  $y = \sin x \cos x$ , úsáid *Rial an Toraidh* agus taispeáin go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = \cos 2x$ .
- 6.** Má tá  $f(x) = \cos x \tan x$ , taispeáin go bhfuil  $f'(x) = \cos x$ .
- 7.** Faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  i ngach ceann díobh seo a leanas ag  $x = \pi$ :
- (i)  $y = \sin 2x$       (ii)  $y = x \cos x$       (iii)  $y = \sin^2 x$ .
- 8.** Má tá  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , úsáid *Rial an Lín* chun a thaispeáint go bhfuil  $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ .
- 9.** Má tá  $f(x) = (\sin x + 1)^2$ , faigh luach  $f'(\frac{\pi}{6})$  i bhfoirm surda.
- 10.** Má tá  $y = \sin x + 3 \cos x$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .  
 Uайд sin, taispeáin go bhfuil  $\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$ .
- 11.** Má tá  $y = \sin 2x - 2x$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .
- Tabhair do fhreagra san fhoirm  $k \sin^2 x$ , nuair atá  $k \in Z$ .
- 12.** Má tá  $y = \cos(\frac{1}{4}\pi x)$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  nuair atá  $x = 4$ .
- 13.** Má tá  $f(x) = \cos^3(2x)$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  nuair atá  $x = \frac{\pi}{6}$ .
- 14.** Tá  $f(x) = \cos 2x$  agus  $g(x) = 2 \sin^2 x$ .  
 Faigh (i)  $f'(x)$       (ii)  $g'(x)$  agus taispeáin go bhfuil  $f'(x) + g'(x) = 0$ .
- 15.** Má tá  $y = \sin 3x$ , taispeáin go bhfuil  $\frac{d^2y}{dx^2} = -9y$ .
- 16.** Má tá  $y = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$ , taispeáin go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = \sec^4 x$ .  
 (Nod:  $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ).

**17.** Má tá grádán an chuair  $y = 3 \sin x + k \sin 3x$  cothrom le nialas nuair atá  $x = \frac{\pi}{3}$ , faigh luach  $k$ .

**18.** Faigh luach  $a$  agus  $b$  má tá

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{2 + \cos x} \right) = \frac{a + b \cos x}{(2 + \cos x)^2}.$$

## Mír 2.7 Feidhmeanna triantánula inbhéartacha a dhifreáil

Ó tharla go bhfuil  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ , úsáidimid an nodaireacht  $\frac{\pi}{6} = \sin^{-1} \frac{1}{2}$  chun é seo a chur in iúl:

“uillinn is ea  $\frac{\pi}{6}$  agus is é  $\frac{1}{2}$  a shíneas”.

Dá bhí sin, tá sé tábhachtach a thabhairt faoi deara gur **uillinn** é  $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ .

Chun an fheidhm  $y = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  a dhifreáil, athróimid an fheidhm go dtí an fhoirm  $\sin y = \frac{x}{a}$ .

$$\sin y = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \sin y, \text{ nuair is tairiseach é } a.$$

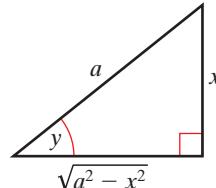
Anois gheobhaimid  $\frac{dx}{dy}$  agus ansin scríobhfaimid síos deilín an fhreagra chun  $\frac{dy}{dx}$  a fháil.

$$x = a \sin y$$

$$\frac{dx}{dy} = a \cos y$$

$$= a \left[ \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right] = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \dots \text{fách ar an triantán}$$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$



Taispeánann sé seo, má tá  $y = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ , go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Tugtar na díorthaigh chaighdeánacha thíos do  $y = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  agus  $f(x) = \tan^{-1} \frac{x}{a}$ .

*Díorthaigh chaighdeánacha feidhmeanna inbhéartacha*

$$f(x) = \sin^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f(x) = \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

Taispeánann an chéad sampla eile an chaoi ar féidir an fheidhm  $y = \sin^{-1} \frac{5x}{3}$  a dhifreáil leis an díorthach caighdeánach do  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  agus an *Chuingriail*.

### Sampla 1

Má tá  $y = \sin^{-1} \frac{5x}{3}$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\begin{aligned}y &= \sin^{-1} \frac{5x}{3} && \text{Bíodh } u = \frac{5x}{3} \\ \Rightarrow y &= \sin^{-1} u && \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{5}{3} \\ \frac{dy}{du} &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} && \dots a = 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{5}{3} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{5}{3\sqrt{1-\frac{25x^2}{9}}} = \frac{5}{3\sqrt{\frac{9-25x^2}{9}}} = \frac{5}{3\cdot\frac{1}{3}\sqrt{9-25x^2}} = \frac{5}{\sqrt{9-25x^2}}\end{aligned}$$

### Sampla 2

Má tá  $y = \tan^{-1}(2x + 1)$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\begin{aligned}y &= \tan^{-1}(2x + 1) && \text{Bíodh } u = 2x + 1 \\ \Rightarrow y &= \tan^{-1} u && \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \\ \frac{dy}{du} &= \frac{1}{1+u^2} && \dots a = 1, \text{ ó tharla go bhfuil } 2x + 1 = \frac{2x+1}{1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{1+u^2} \cdot 2 = \frac{2}{1+(2x+1)^2} = \frac{2}{1+4x^2+4x+1} = \frac{2}{2(2x^2+2x+1)} \\ &= \frac{1}{2x^2+2x+1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2x^2+2x+1}\end{aligned}$$

### Cleachtadh 2.7

1. Difreáil gach ceann díobh seo a leanas i leith  $x$ :

- (i)  $\sin^{-1} 6x$       (ii)  $\tan^{-1} 3x$       (iii)  $\sin^{-1}(2x + 1)$       (iv)  $\tan^{-1}(x^2)$

2. Má tá  $y = \sin^{-1}(3x - 1)$ , taispeáin go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{6x - 9x^2}}$ .

3. Faigh luach an díorthaigh i gcás gach ceann díobh seo a leanas:

(i)  $\sin^{-1}2x$  ag  $x = 0$                                  (ii)  $\tan^{-1}4x$  ag  $x = \frac{1}{4}$

4. Tugtar  $f(x)$ , thíos; faigh  $f'(x)$ :

(i)  $f(x) = \sin^{-1}\frac{3}{x}$    (ii)  $f(x) = \tan^{-1}\frac{x}{4}$

5. Úsáid *Rial an Toraidh* agus difreáil iad seo a leanas:

(i)  $y = x \sin^{-1}x$    (ii)  $2x \tan^{-1}x$

6. Má tá  $y = (\sin^{-1}x)^2$ , taispeáin go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

7. Má tá  $f(x) = \sin^{-1}(\cos x)$ , taispeáin go bhfuil  $f'(x) = k, k \in Z$ .

8. Má tá  $f(x) = \tan^{-1}(\cos x)$ , faigh luach  $f'(\frac{\pi}{6})$ .

9. Má tá  $y = \tan^{-1}\frac{1}{x}$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  ag  $x = 1$ .

10. Má tá  $y = \tan^{-1}(3x^2)$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  ag  $x = \frac{1}{3}$ .

11. Má tá  $y = \tan^{-1}x$ , taispeáin go bhfuil  $\frac{d^2y}{dx^2}(1+x^2) + 2x \frac{dy}{dx} = 0$ .

## Mír 2.8 Feidhmeanna easpónantúla a dhifreáil

Úsáidtear an focal **easpónant** go minic in áit an fhocail *séan*.

**Feidhm easpónantúil** a thugtar ar fheidhm ar nós  $y = 2^x$ , nuair atá an athróg sa séan.

Léirítear sa léaráid ar dheis graif na dtrí fheidhm seo

(i)  $y = 2^x$    (ii)  $y = e^x$    (iii)  $y = 4^x$

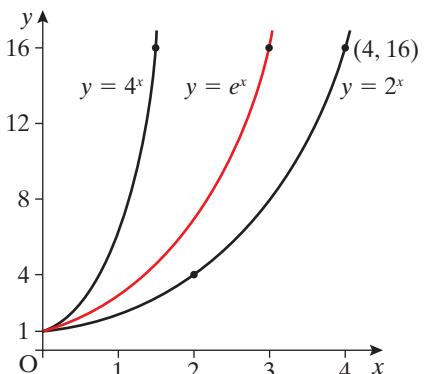
Léiríonn an cuar dearg an fheidhm  $y = e^x$ .

Is cinnte gurb í seo an fheidhm easpónantúil is tábhachtáil.

Tugtar **an** fheidhm easpónantúil uirthi de ghnáth.

Uimhir éagóimheasta é  $e$  dar luach 2.718, ceart go trí ionad dheachúlacha.

Tá an fheidhm  $y = e^x$  tábhachtach toisc go mbíonn an fhána ag pointe ar bith ar an gcuar cothrom le  $y$ -luach na feidhme i gcónaí.



Mar shampla, má tá  $x = 2$ , tá  $y = 7.39 \dots$

Má tharraingítear léaráid chruinn, is féidir a thaispeáint ag an bpointe ag a bhfuil  $x = 2$  gurb é 7.39 fána an tadhlaí freisin.

Tá díorthach an-tábhachtach le fáil dá bharr sin, mar atá:

$$\text{I gcás } y = e^x, \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Tabhair faoi deara gurb é a dhíorthach féin é  $e^x$ . Is é seo an t-aon fheidhm arb é a dhíorthach féin é.

Díorthach caighdeánach

$$\text{Má tá } y = e^x, \text{ tá } \frac{dy}{dx} = e^x.$$

**Nóta:** Feidhm a bhíonn ag fás de shíor é  $e^x$  agus is féidir é a úsáid chun fás cille, leathadh galair, nó méadú ar líon daonra a shamhadtú.

Feidhm laghdaitheach é  $e^{-x}$  agus is féidir leis seasamh do ráta meatha ar nós an ráta ag a gcailleann corp teas nó meath radaighníomhach.

Má tá  $y = e^{ax}$ , nuair atá a tairiseach, is féidir a thaispeáint leis an gCuingriail go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = ae^{ax}$ .

Má tá  $y = e^{6x}$ , nuair a úsáidtear an Chuingriail,

$$\frac{dy}{dx} = e^{6x} \cdot \frac{d}{dx}(6x) = e^{6x} \cdot 6 = 6e^{6x}$$

$$\begin{aligned} \text{Ar an gcaoi chéanna, má tá } y &= e^{x^2 + 4x}, \frac{dy}{dx} = e^{x^2 + 4x}(2x + 4) \\ &= (2x + 4)e^{x^2 + 4x} \end{aligned}$$

### Sampla 1

Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:

$$(i) \ y = 5e^{x^2} \quad (ii) \ y = e^{\cos x} \quad (iii) \ y = (e^x + 1)^4$$

$$(i) \ y = 5e^{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = 5e^{x^2} \cdot 2x = 10xe^{x^2}$$

$$(ii) \ y = e^{\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\sin x(e^{\cos x})$$

$$\begin{aligned} (iii) \ y = (e^x + 1)^4 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4(e^x + 1)^3 \cdot \frac{d}{dx}(e^x + 1) \\ &= 4(e^x + 1)^3 \cdot e^x = 4e^x(e^x + 1)^3 \end{aligned}$$

## Sampla 2

Má tá  $y = e^{2x} \cos 2x$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  ag  $x = \frac{\pi}{8}$ .

$$\begin{aligned}y &= e^{2x} \cos 2x \\ \text{Úsáidfimid } Riail an Toraidh \text{ anseo, } y &= uv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= e^{2x}(-2 \sin 2x) + \cos 2x(2e^{2x}) \quad \dots u = e^{2x} \text{ agus } v = \cos 2x \\ &= -2 \sin 2x \cdot e^{2x} + 2 \cos 2x \cdot e^{2x} \\ &= 2e^{2x}(-\sin 2x + \cos 2x) \\ &= 2e^{\frac{\pi}{4}}\left(-\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right) \quad \dots \text{ag } x = \frac{\pi}{8} \\ &= 2e^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2e^{\frac{\pi}{4}}(0) = 0 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= 0\end{aligned}$$

## Cleachtadh 2.8

1. Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:

- |                     |                      |                       |
|---------------------|----------------------|-----------------------|
| (i) $y = e^{4x}$    | (ii) $y = e^{-3x}$   | (iii) $y = e^{x^2}$   |
| (iv) $y = e^{2x+4}$ | (v) $y = e^{x^2+3x}$ | (vi) $y = e^{\sin x}$ |

2. Difreáil iad seo a leanas:

- |                           |                         |                     |
|---------------------------|-------------------------|---------------------|
| (i) $y = e^{\frac{x}{2}}$ | (ii) $y = e^{\sin^2 x}$ | (iii) $y = xe^{2x}$ |
|---------------------------|-------------------------|---------------------|

3. Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:

- |                         |                        |                                  |
|-------------------------|------------------------|----------------------------------|
| (i) $y = e^{2x} \sin x$ | (ii) $y = (e^x - 1)^2$ | (iii) $y = \frac{e^{2x+1}}{e^x}$ |
|-------------------------|------------------------|----------------------------------|

4. Difreáil iad seo a leanas:

- |                           |                             |                        |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------|
| (i) $y = e^{2x}(1 + e^x)$ | (ii) $t = \frac{e^{2x}}{x}$ | (iii) $x^2 e^{\cos x}$ |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------|

5. Má tá  $y = e^{3x} \sin(\pi x)$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  nuair atá  $x = 1$ .

6. Má tá  $y = e^{2x}$ , faigh  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

Uaidh sin, taispeáin go bhfuil  $\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ .

7. Má tá  $y = e^x(\cos x - \sin x)$ , taispeáin go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = -2e^x \sin x$ .

8. Má tá  $y = xe^x$ , taispeáin go bhfuil  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2\frac{dy}{dx}$ .

9. Má tá  $f(x) = e^{2x} - ae^x$ , taispeáin go bhfuil  $f'(x) = 0$  nuair atá  $e^x = \frac{a}{2}$ .

10. Má tá  $y = e^{mx}$ ,  $m \in R$ , faigh  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

Uайдh sin, faigh  $m$  if  $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ .

11. Bíodh  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Taispeáin go bhfuil  $f''(x) = f(x)$ , más é  $f''(x)$  dara díorthach  $f(x)$ .

12. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $y = 3e^x - \sin x + 5$  ag an bpointe ag a bhfuil  $x = 0$ .

13. Tadhlaí leis an gcuar  $y = 2e^x - x$  ag an bpointe  $(0,2)$  is ea an líne  $l_1$ .  
Tadhlaí leis an gcuar  $y = \sin 2x - x^2$  ag an mbunphointe is ea an líne  $l_2$ .  
Cruthaigh gurb é  $(2, 4)$  pointe trasnaithe  $l_1$  agus  $l_2$ .

## Mír 2.9 Feidhmeanna logartamacha a dhifreáil

Sa mhír roimhe seo, dúradh gur uimhir éagóimheasta é  $e$ , mar a bhfuil  $e = 2.718$ , ceart go trí ionad dheachúlacha.

**Logartaim aiceanta** a thugtar ar logartaim ar bhonn  $e$ .

In áit  $\log_e x$  a scríobh, úsáidtear an giorrúchán **ln x** de ghnáth.

Ón eolas atá againn ar logartaim, tá a fhios againn gur féidir an chothromóid

$8 = 2^3$  a scríobh san fhoirm  $\log_2 8 = 3$ .

Ar an gcaoi chéanna, is féidir  $x = e^y$  a scríobh san fhoirm  $\log_e x = y$  (nó  $\ln x = y$ ).

Chun díorthach  $y = \ln x$  a fháil, bainimid leas as an eolas seo:

má tá  $y = \ln x$ , tá  $e^y = x$ , de réir sainmhínithe.

$$y = \ln x$$

$$\Rightarrow x = e^y$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y \quad \dots \text{difréail i leith } y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} \quad \dots \text{is é } \frac{dy}{dx} \text{ deilín } \frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Díorthach caighdeánach

$$\text{Má tá } y = \ln x, \text{ tá } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Nuair a bhímid ag plé le logartaim aiceanta, bíonn na torthaí seo a leanas tábhachtach:

$$\log_e e^x = x \log_e e = x$$

$$\ln e^x = x, \text{ i gcás gach } x \in R$$

Ba chóir a thabhairt faoi deara freisin go bhfuil:

- (i)  $\log_e 1 = 0$  ... tá log 1 ar bhonn ar bith cothrom le nialas
- (ii)  $\log_e e = 1$  ... ( $\log_e k = 1$ )

Is féidir an obair a bhaineann le difréail feidhmeanna logartamacha a shimpliú ach leas a bhaint as dlíthe na logartam a thaispeántar thíos:

Dlíthe na Logartam

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \log_e(xy) = \log_e x + \log_e y & \text{(ii)} \quad \log_e\left(\frac{x}{y}\right) = \log_e x - \log_e y \\ \text{(iii)} \quad \log_e x^n = n \log_e x & \text{(iv)} \quad \log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} \end{array}$$

**Nóta:** Má tá  $y = \log_e(6x)$ , úsáidimid difréail logartamach agus an *Chuingriail* chun  $\frac{dy}{dx}$  a fháil.

$$y = \log_e(6x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6x} \cdot \frac{d}{dx}(6x) = \frac{1}{6x} \cdot 6 = \frac{1}{x}$$

$$\text{De ghnáth, má tá } y = \log_e(f(x)), \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

### Sampla 1

Faigh  $\frac{dy}{dx}$  má tá (i)  $y = \log_e(4x^2 + 1)$  (ii)  $y = \log_e(\sin^2 x)$ .

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y = \log_e(4x^2 + 1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{4x^2 + 1} \cdot \frac{d}{dx}(4x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{4x^2 + 1} \cdot 8x = \frac{8x}{4x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad y = \log_e(\sin^2 x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin^2 x) \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cos x = \frac{2 \cos x}{\sin x} \\ &= 2 \cot x \end{aligned}$$

## Sampla 2

Má tá  $y = \log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ , taispeán go bhfuil  $(1-x^2)\frac{dy}{dx} = 2$ .

$$\begin{aligned}y &= \log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ \Rightarrow y &= \log_e(1+x) - \log_e(1-x) \quad \dots \left(\log_e\frac{a}{b} = \log_e a - \log_e b\right) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+x} \cdot (1) - \frac{1}{1-x} \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2} \\ \therefore (1-x^2)\frac{dy}{dx} &= (1-x^2) \times \frac{2}{(1-x^2)} = 2\end{aligned}$$

## Cleachtadh 2.9

Faigh  $\frac{dy}{dx}$  na bhfeidhmeanna i gceisteanna (1–9):

- |                                |                                  |                                 |
|--------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| <b>1.</b> $y = \log_e 5x$      | <b>2.</b> $y = \log_e(2x + 3)$   | <b>3.</b> $y = \log_e(3x^2)$    |
| <b>4.</b> $y = \log_e(\sin x)$ | <b>5.</b> $y = \log_e(x^2 - 6x)$ | <b>6.</b> $y = \log_e(\cos 3x)$ |
| <b>7.</b> $y = x \log_e x$     | <b>8.</b> $y = x^2 \ln(3x)$      | <b>9.</b> $y = \frac{\ln x}{x}$ |

- 10.** Úsáid rialacha na logartam agus simplígh iad seo a leanas. Anois faigh  $\frac{dy}{dx}$  na bhfeidhmeanna.

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \quad y = \log_e(3x + 1)^3 & \text{(ii)} \quad y = \log_e\left(\frac{2x + 1}{1 - 3x}\right) & \text{(iii)} \quad y = \log_e\sqrt{1 + x^2} \\ \text{(iv)} \quad y = \log_e\sqrt{\sin x} & \text{(v)} \quad y = \log_e(x^2 + 4)^2 & \text{(vi)} \quad y = \log_e\sqrt{\frac{x}{1 + x}} \end{array}$$

- 11.** Má tá  $y = \ln 3x^4$ , faigh  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .
- 12.** Má tá  $y = [\log_e(x + 4)]^2$ , taispeán go bhfuil  $\frac{dx}{dy} = \frac{2 \log_e(x + 4)}{x + 4}$ .
- 13.** Má tá  $y = x \log_e x$ , faigh  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .
- 14.** Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = \log_e x - 2x + x^2$  ag an bpointe ag a bhfuil  $x = 2$ .
- 15.** Má tá  $y = (\ln x)^2$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  ag  $x = e$ .
- 16.** Má tá  $y = \ln(1 + \sin t)$ , faigh  $\frac{dy}{dt}$ .  
Má tá  $(1 + \sin t)\frac{d^2y}{dt^2} + k = 0$ , faigh luach  $k \in N$ .
- 17.** Má tá  $y = \ln(e^x \cos x)$ , taispeán go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = 1 - \tan x$ .

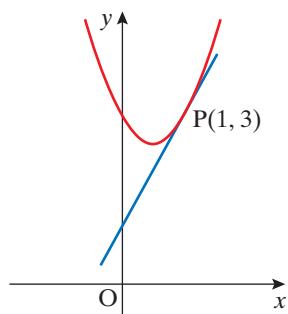
## Súil Siar 2 (Croícheisteanna)

---

1. Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:  
(i)  $y = x^2 + \frac{1}{x}$       (ii)  $y = (2x + 3)^3$       (iii)  $y = \sqrt{1 + 3x}$
2. Difreáil  $y = x^2 + 3x - 4$  ó bhunphrionsabail.
3. Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:  
(i)  $y = \frac{1}{3}(x + 2)^3$       (ii)  $y = \frac{2x}{x + 1}$
4. Faigh  $f'(x)$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:  
(i)  $f(x) = 2x^2 - \frac{3}{x^2}$       (ii)  $y = 4 \sin 6x$       (iii)  $y = 3e^{x^2}$
5. Faigh luach  $k$  má tá  $\frac{d}{dx} \left( \frac{2x + 3}{x - 4} \right) = \frac{k}{(x - 4)^2}$ .
6. Tá an pointe  $P(x, y)$  ar an gcuar ag a bhfuil an chothromóid  $y = 6x^2 - x^3$ .
  - (i) Faigh an luach ar  $x$  nuair is é 12 grádán an tadhlaí ag  $P$ .
  - (ii) Uайдh sin, faigh cothromóid an tadhlaí ag  $P$ .
7. Faigh  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:  
(i)  $y = 3x^2 - x + \frac{3}{x}$       (ii)  $y = \frac{3x^2}{x - 1}$       (iii)  $y = \cos^2 4x$
8. Má tá  $y = \frac{4x^2 + 6}{x}$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$  gan *Riaill an Lín* a úsáid.
9.  $f(x) = a \sin 3x$ , agus tá  $a$  tairiseach.  
Má tá  $f'(\pi) = 2$ , faigh  $a$ .
10. Is é  $y = x \sin 2x$  cothromóid cuar áirithe.  
Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe ag a bhfuil  $x = \frac{\pi}{3}$ .
11. Seo grádán an chuair  $C$ :  $\frac{dy}{dx} = (x + 1)(x - 2)$ .  
Tá an pointe  $P(1, 2)$  ar  $C$ .  
Faigh cothromóid an tadhlaí le  $C$  ag  $P$ .
12. Má tá  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ , faigh luach  $f'(4)$ .
13. Má tá  $y = 2x^2 - 1$ , faigh
  - (i) an meánráta ar a n-athraíonn  $y$  thar an eatramh  $[1, 4]$
  - (ii) ráta meandrach athraithe  $y$  i leith  $x$  nuair atá  $x = 4$ .

14. Má tá  $y = \tan^{-1}(5x)$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .

15. Taispeántar sa léaráid parabóil a bhfuil an chothromóid seo aici:  $y = 2x^2 - 2x + 3$ .  
Tarraingíodh tadhlaí leis an bparabóil ag P(1, 3).  
Faigh cothromóid an tadhlaí sin.



16. Tugtar an fheidhm  $f(x) = 2x^{-3} + \frac{k}{2}x^{-2} - x, x \neq 0, k \in R$ .  
Má tá  $f'(-2) = 0$ , faigh luach  $k$ .

## Súil Siar 2 (Ardcheisteanna)

- Faigh ráta athraithe na feidhme  $y = \sin x - \cos x$  ag an bpointe ag a bhfuil  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = x^2 \sin x$  ag an bpointe ag a bhfuil  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- Faigh comhordanáidí an dá phointe ar an gcuar  $y = x^2 + \ln x$  ag a bhfuil fána an tadhlaí leis an gcuar cothrom le 3.
- Má tá  $y = x - 1 + \frac{1}{x-1}, x \neq 1$ , faigh na luachanna ar  $x$  a fhágann go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = 0$ .
- Difreáil gach ceann díobh seo a leanas, agus sloinn gach freagra san fhoirm is simplí de:
  - $y = \ln(3x^4)$
  - $y = \ln\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$
- Má tá  $y = e^{nx}$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$  agus  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .  
Uaidh sin, faigh dhá luach ar  $n$  a fhágann go bhfuil  $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ .
- Faigh comhordanáidí an dá phointe ar an gcuar  $y = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$  ag a bhfuil na tadhlaithe leis an gcuar comhthreomhar leis an líne  $y = 4x - 7$ .
- Tá fána an chuairt  $y = a\sqrt{x} - 5$  ag an bpointe  $(4, b)$  cothrom le 2.  
Faigh luach  $a$  agus luach  $b$ .
- Tá uisce á dhoirteadh as umar agus is féidir samháltú a dhéanamh ar an toirt atá fanta leis an gcothromóid  $V = 80(30 - t)^3$ .  
Léiríonn an léaráid ar an gcéad leathanach eile cuid de ghraf na cothromóide.

- (i) Faigh comhordanáidí A agus B agus mínígh a bhfuil suntasach faoi na pointí maidir leis an gcothromóid.
- (ii) Cé mhéad uisce atá san umar tar éis deich nóiméad?
- (iii) Faigh an meánrátá ar a ndoirtear an t-uisce as an umar sa chéad deich nóiméad.
- (iv) Faigh an ráta meandrach ar a ndoirtear an t-uisce nuair atá  $t = 10$  nóiméad.

**10.** Má tá  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$  agus sloinn do fhreagra san fhoirm  $\frac{1}{(1-x^2)^k}$ , nuair is uimhir chóimheasta é  $k$ .

**11.** Má tá  $y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ , faigh luach  $\frac{dy}{dx}$  ag  $x = 1$ .

**12.** Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $y = x^3 e^x$  ag an bpointe ag a bhfuil  $x = 0$ .

**13.** Má tá  $y = kx^2$  agus  $x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + y = 0$ , faigh luach an tairisigh  $k$ , nuair atá  $x \in R$  agus  $k \neq 0$ .

**14.** Is neastachán tosaigh é  $x_1$  ar fhréamh na feidhme  $f(x) = x^3 + x^2 - 1$  agus is dara neastachán é  $x_2$ .

Má nasctar na neastacháin leis an bhfoirmle  $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ , faigh luach ar  $x_2$  má tá  $x_1 = 1$ .

**15.** Má tá  $y = \ln(1 + e^x)$ , taispeáin go bhfuil  $\frac{d^2y}{dx^2} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{dy}{dx}$ .

**16.** Taispeántar sa léaráid an cuar  $y = x^3 - x + 1$ .

Tá na  $x$ -chomhordanáidí  $-1$  agus  $-1 + h$  ag na pointí A agus B faoi seach ar an gcuar.

- (i) Taispeáin go bhfuil  $y$ -chomhordanáid an phointe B cothrom le

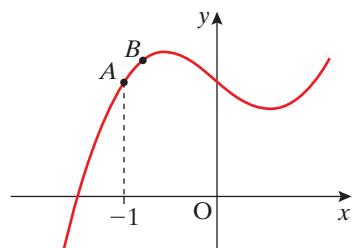
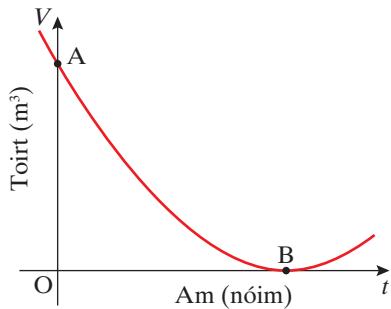
$$1 + 2h - 3h^2 + h^3$$

- (ii) Faigh grádán an chorda AB san fhoirm

$$p + qh + rh^2$$

nuair is slánuimhreacha iad  $p, q$  agus  $r$ .

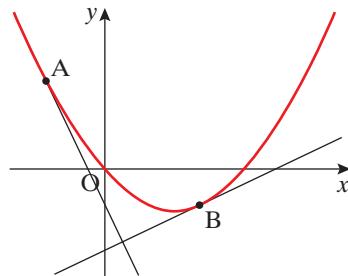
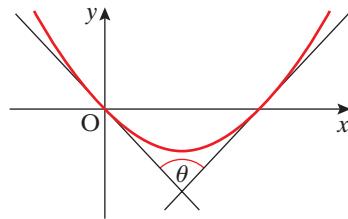
- (iii) Mínigh an chaoi ar féidir do fhreagra ar chuid (ii) a úsáid chun grádán an tadhlaí leis an gcuar ag A a fháil. Tabhair luach an ghrádáin seo.



## Súil Siar 2 (Freagraí níos faide)

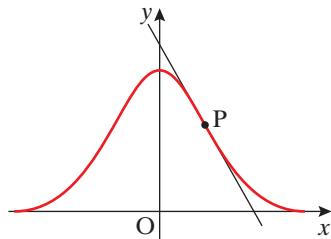
- 1.** Cuir i gcás an fheidhm  $y = x(x - 2)$ .
- Scríobh síos comhordanáidí na bpointí ag a dtrasnaíonn an cuar an  $x$ -ais.
  - Taispeán gurb é an comhartha an t-aon difríocht idir fhánaí an chuair ag na pointí seo agus mínígh an tábhacht chéimseátúil a bhaineann leis seo.
  - Faigh cothromóidí na dtadhlaithe leis an gcuar ag na pointí seo.
  - Faigh an uillinn ( $\theta$ ) idir na tadhlaithe.
  - Bíodh  $y = x(x - 2)(x - 5)$ .  
Más iad  $p, q$  agus  $r$  fánaí na dtadhlaithe leis an gcuar ag na pointí ag a dtrasnaíonn an cuar an  $x$ -ais, cruthaigh go bhfuil  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$ .
- 2.**
- Difreáil  $y = 2 \ln(x\sqrt{x^2 + 1})$ .  
Tabhair do fhreagra san fhoirm  $\frac{k(kx^2 + 1)}{x(x^2 + 1)}$ , nuair a chaithfear  $k$  a fháil agus nuair atá  $k \in N$ .
  - Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $y = 2 \ln(x\sqrt{x^2 + 1})$  ag an bpointe ag a bhfuil  $x = 1$ .
- 3.** Taispeántar ar dheis graf na feidhme  $f(x) = \frac{x^2}{4} - x$ .  
Tá na comhordanáidí  $(3, -\frac{3}{4})$  ag an bpointe B.
- Faigh cothromóid an tadhlaí ag B.
  - Tá pointe A ar an gcuar sa chaoi is go bhfuil an tadhlaí ag A ingearach leis an tadhlaí ag B.  
Faigh comhordanáidí A.
  - Má thrasnaíonn na tadhlaithe ag A agus ag B a chéile ag an bpointe C, faigh comhordanáidí C.
  - Taispeán go bhfuil achar an triantáin ABC cothrom le  $\frac{125}{16}$ .
- 4.** Pointí ar an gcuar  $f(x) = x^3 - x$  is ea P agus Q.
- Faigh, i dtéarmaí  $h$ , fána na líne trí P(2, 6) agus Q, nuair is é  $(2 + h)$   $x$ -chomhordanáid Q.
  - Uaidh sin, faigh fána na mírlíne [PQ], nuair atá
 

(i) $h = 0.5$	(ii) $h = 0.1$	(iii) $h = 0.01$	(iv) $h = 0.001$
---------------	----------------	------------------	------------------
  - Cén luach a ndruideann fána PQ leis de réir mar  $h \rightarrow 0$ ?
  - Uaidh sin, céard é fána an chuair ag P?
  - Más iad  $(a, a^3 - a)$ , comhordanáidí P, agus más é  $a + h$   $x$ -chomhordanáid Q, faigh fána PQ i dtéarmaí  $a$ .
  - Uaidh sin, faigh fána an tadhlaí leis an gcuar seo ag an bpointe P( $a, a^3 - a$ ).



5. (a) Bíodh  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ .  
Taispeán gurb é  $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$  dara díorthach  $f(x)$  i leith  $x$ .

- (b) Pointe athchasaídí ar an gcuar  
 $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$  é an pointe P sa chéad cheathrú.  
Taispeán go dtrasnaíonn an tadhlaí ag P  
an  $x$ -ais ag  $(2, 0)$ .



6. Mar seo a fhaightear trastomhas crainn ( $D$  cm)  $t$  bliain tar éis an 1 Eanáir 1990:  
 $D = 50e^{kt}$ .

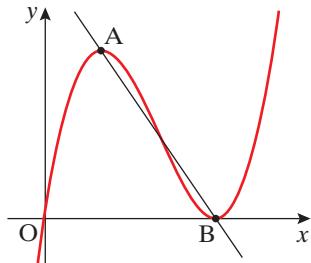
- (a) Cruthaigh go bhfuil  $\frac{dD}{dt} = cD$  má tá c tairiseach.  
(b) Má tá  $k = 0.2$ , faigh ráta méadaithe  $D$  nuair atá  $D = 100$ .

Tabhair do fhreagra ina cm/bliain, ceart go dtí an cm is gaire.

7. (i) Faigh fána an chuairt  $y = \ln\sqrt{1 + \sin 2x}$  ag an bpointe ag a bhfuil  $x = \frac{\pi}{2}$ .  
(ii) Má tá  $y = (x^2 - 1)^n, n \in R$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .  
Uайдh sin, taispeán go bhfuil  $(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} - 2nxy = 0$ .  
(iii) Má tá  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$ , taispeán go mbíonn  $f'(x)$  deimhneach i gcónaí.

8. Sainíonn  $f(x) = x(x - k)^2, k \in R$  feidhm.

- (i) Faigh  $f'(x)$  agus sloinn do fhreagra i bhfoirm fhachtóirithe.  
(ii) Faigh comhordanáidí na bpointí ar an gcuar ag a bhfuil na tadhlaithe comhthreomhar leis an  $x$ -ais.  
(iii) Taispeán gur féidir cothromóid na líne a nascann na pointí seo a scríobh mar seo:  
 $y = -\frac{2k^2}{9}(x - k)$ .  
(iv) Más ionann na pointí a fuair tú in (ii) thusas agus A agus B, taispeán go dtrasnaíonn AB an cuar ag lárphointe [AB].



# An Calcas Difréálach in Úsáid

## Focail Thábhachtacha

feidhm mhéadaitheach    feidhm laghdaitheach    pointí cónaitheacha  
 uaspointe logánta    íospointe logánta    pointe athchasaidh    feidhm na fána  
 ráta athraithe    treoluas    luasghéarú    rátaí athraithe gaolmhara

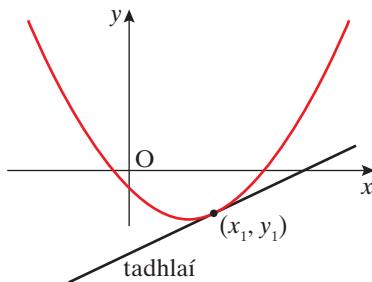
### Mír 3.1 Tadhlaithe – Feidhmeanna méadaitheacha agus feidhmeanna laghdaitheacha

Dúradh sa chaibidil roimhe seo i dtaobh feidhm ar bith  $y = f(x)$ , gur féidir glacadh leis an bhfeidhm dhíorthaithe  $\frac{dy}{dx}$  i dtéarmaí céimseatan mar fhána tadhlaí le cuar ag pointe ar bith ar an gcuar sin.

Má tá  $y = f(x)$ , is ionann  $y = f'(a)$  agus fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe mar a bhfuil  $x = a$ .

Mar seo a gheofar cothromóid an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe  $(x_1, y_1)$ :

- Luach  $\frac{dy}{dx}$  a fháil.
  - Luach  $\frac{dy}{dx}$  a fháil ag  $(x_1, y_1)$ .
  - Leas a bhaint as an gcothromóid
- $$y - y_1 = m(x - x_1)$$
- go bhfaighidh tú cothromóid an tadhlaí ag an bpointe  $(x_1, y_1)$ .



### Sampla 1

Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $y = \frac{x^2}{3} - x + 1$  ag an bpointe  $(4, \frac{7}{3})$ .

Gheobhaimid fána an tadhlaí leis an gcuar ach  $\frac{dy}{dx}$  a fháil ar dtús.

$$\begin{aligned} y = \frac{x^2}{3} - x + 1 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3} - 1 \\ &= \frac{2(4)}{3} - 1 = \frac{5}{3} \quad \dots \text{ag } x = 4 \end{aligned}$$

Cothromóid an tadhlaí ag  $(4, \frac{7}{3})$ :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}(x - 4)$$

$$\Rightarrow 3y - 7 = 5x - 20$$

$\Rightarrow 5x - 3y - 13 = 0$  an chothromóid a theastaíonn.

## Sampla 2

Cé na pointí ar an gcuar  $y = x^3 - 9x^2 + 20x - 8$  ag a bhfuil an tadhlaí comhthreomhar leis an líne  $4x + y - 3 = 0$ ?

Is ionann fána na líne  $4x + y - 3 = 0$  agus  $-4$ . ...  $y = -4x + 3$

Líne ar bith atá comhthreomhar le  $4x + y - 3 = 0$ , is é an fhána atá léi ná  $-4$ .

Faighimid  $\frac{dy}{dx}$  chun fána tadhlaí ar bith le  $y = x^3 - 9x^2 + 20x - 8$  a fháil.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 20$$

I gcás fána  $-4$ ,  $3x^2 - 18x + 20 = -4$

$$\Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 2$$
 nó  $x = 4$

Anois faighimid na  $y$ -luachanna comhfhareagracha le haghaidh  $x = 2$  agus  $x = 4$ .

$$x = 2 \Rightarrow y = (2)^3 - 9(2)^2 + 20(2) - 8 \Rightarrow y = 4$$

∴ Pointe amháin ag a bhfuil fána  $-4$  é  $(2, 4)$

$$x = 4 \Rightarrow y = (4)^3 - 9(4)^2 + 20(4) - 8 \Rightarrow y = -8.$$

∴ Pointe eile ag a bhfuil fána  $-4$  é  $(4, -8)$

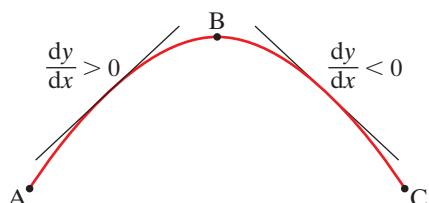
∴ Is iad an dá phointe a theastaíonn ná  $(2, 4)$  agus  $(4, -8)$ .

## Feidhmeanna méadaitheacha agus feidhmeanna laghdaitheacha

Ach an cuar ar dheis a scrúdú ó chlé go deas, feicimid gur ag éirí (nó méadaitheach) atá sé ó A go B, agus laghdaitheach ó B go C.

Deimhneach atá fána an tadhlaí (i.e.  $\frac{dy}{dx}$ ) ó A go B.

Diúltach atá fána an tadhlaí ó B go C.



Cuimhnigh air seo

$\frac{dy}{dx} > 0$ , agus an cuar méadaitheach.

$\frac{dy}{dx} < 0$ , agus an cuar laghdaitheach.

### Sampla 3

Is feidhm é  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ . Faigh na heatraimh ina bhfuil an fheidhm

- (i) méadaitheach      (ii) laghdaitheach

- (i) Le linn do  $f(x)$  a bheith méadaitheach,  $f'(x) > 0$ .

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 > 0 \\&\Rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \\&\Rightarrow (x - 3)(x + 1) > 0\end{aligned}$$

Má tharraingímid sceitse garbh den fheidhm chearnach  $y = x^2 - 2x - 3$ , feicfimid an méid seo:

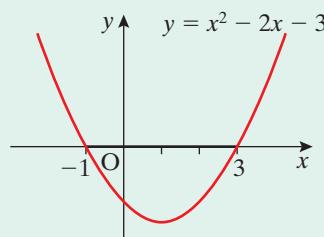
$$(x - 3)(x + 1) > 0 \Rightarrow x > 3 \text{ agus } x < -1.$$

Dá bhrí sin, méadaitheach atá,  $f(x)$  nuair atá  $x > 3$  agus  $x < -1$ .

- (ii) Le linn do  $f(x)$  a bheith laghdaitheach, is diúltach atá  $f'(x)$ .

De réir an ghraif, diúltach atá  $f'(x)$  nuair atá  $(x - 3)(x + 1) < 0$ , i.e. nuair atá  $x > -1$  agus  $x < 3$ .

$$\therefore \text{laghdaitheach atá } f(x) \text{ san eatramh } -1 < x < 3.$$



### Sampla 4

Taispeán gur méadaitheach atá an cuar  $y = x^3 + 3x^2 + 6x$  i gcás gach luacha ar  $x \in R$ .

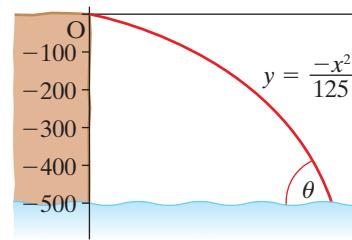
Más méadaitheach atá an cuar, is deimhneach atá  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\begin{aligned}y = x^3 + 3x^2 + 6x &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x + 6 \\&= 3(x^2 + 2x + 2) \\&= 3(x^2 + 2x + 1 + 1) \\&= 3[(x + 1)^2 + 1]\end{aligned}$$

Ó tharla  $(x + 1)^2, x \in R$  a bheith deimhneach i gcónaí, is deimhneach atá  $3[(x + 1)^2 + 1]$ . Mar sin is méadaitheach atá an cuar i gcás gach  $x \in R$  ó tharla  $3[(x + 1)^2 + 1]$  a bheith deimhneach i gcás gach  $x \in R$ .

## Cleachtadh 3.1

1. Faigh fána an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe a thugtar i ngach ceann de na feidhmeanna seo a leanas:
  - (i)  $y = x^2 - 3x + 2$  at  $(1, 0)$
  - (ii)  $y = x + \frac{1}{x}$  at  $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$
2. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$  ag an bpointe  $(3, 1)$ .
3. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $f(x) = x^2 - 6x$  ag an bpointe mar a bhfuil  $x = 2$ .
4. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $y = x^3 + \frac{1}{2x^2}$  ag an bpointe mar a bhfuil  $x = 1$ .
5. Faigh an luach ar  $k$  más ionann 3 agus fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = x^2 + kx$  ag an bpointe mar a bhfuil  $x = -1$ .
6. Más ionann 5 agus fána an tadhlaí leis an gcuar  $y = x^2 + 3x - 1$  ag pointe áirithe, faigh comhordanáidí an phointe sin.
7. Faigh comhordanáidí an phointe ar an gcuar  $y = x^2 + 4x + 6$  ag a bhfuil an fhána cothrom le  $-2$ .
8. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $y = \frac{5x^2}{1+x^2}$  ag an bpointe  $(2, 4)$ .
9. Faigh na pointí ar an gcuar  $y = x^3 - 12x + 4$  mar a bhfuil fána an tadhlaí cothrom le nialas.
10.  $y = ax^2 + bx + 5$  an chothromóid atá ag cuar áirithe. Más é 4 an fhána atá leis an gcuar ag an bpointe  $(5, 0)$ , faigh luach na dtairiseach  $a$  agus  $b$ .
11. Is leis an gcothromóid  $y = ax^2 + b$  a shainítear cuar áirithe, áit ar tairisigh iad  $a$  agus  $b$ . Más ionann 3 agus fána an chuair ag an bpointe  $(2, -2)$ , faigh luach  $a$  agus luach  $b$ .
12. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $y = \ln x + x - 2$  ag an bpointe mar a bhfuil  $x = 1$ .
13. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $y = e^{3x}$  ag an bpointe  $(0, 1)$ .
14. Faigh comhordanáidí an dá phointe ar an gcuar  $y = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$  mar a bhfuil na tadhlaithe leis an gcuar comhthreomhar leis an líne  $y = 4x - 7$ .
15. Caitheann Sorcha cloch go cothrománach ó phointe atá ar bharr aill 500 m.  
Seo an chothromóid atá ag conair na cloiche:  $y = \frac{-x^2}{125}$ .  
(Is ag pointe an teilgin a thosaítear na haiseanna.)
  - (i) Cá fhad amach san fharraige a théann an chloch?
  - (ii) Más ionann tan  $\theta$  agus fána an chuair ag an bpointe sin, faigh an uillinn ag a dtéann an chloch isteach san uisce.



- 16.** Cén comhartha atá ar  $\frac{dy}{dx}$  le linn do chuar a bheith (i) méadaitheach (ii) laghdaitheach?

Faigh an t-eatramh ansin ina bhfuil gach ceann den dá fheidhm seo a leanas laghdaitheach.

(a)  $y = x^2 - x - 6$

(b)  $y = x^3 + 6x^2 - 2$

- 17.** Tá  $f(x) = 4x^2 + 4x + 7$ .

(i) Faigh  $f'(x)$ .

(ii) Uaidh sin, faigh raon na luachanna ar  $x$  a fhágann

(a)  $f(x)$  gur méadaitheach atá      (b)  $f(x)$  gur laghdaitheach atá.

- 18.** Faigh raon na luachanna ar  $x$  a fhágann gur feidhm mhéadaitheach é  $f(x)$  i ngach ceann síobh seo:

(i)  $f(x) = 4x - 3x^2$

(ii)  $f(x) = 3x^2 + 8x + 2$

(iii)  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$

- 19.** Faigh raon na luachanna ar  $x$  a fhágann gur feidhm laghdaitheach é  $f(x)$  i ngach ceann síobh seo:

(i)  $f(x) = 3x - 5x^2$

(ii)  $f(x) = 4 - 2x - x^2$

(iii)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

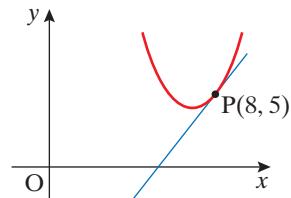
- 20.** Taispeáin gur feidhm mhéadaitheach é  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 18x + 4$  i gcás gach luacha ar  $x \in R$ .

- 21.** Taispeáin gur méadaitheach atá an cuar  $y = \frac{2x+1}{3x+6}$  i gcás gach  $x \neq -2$ .

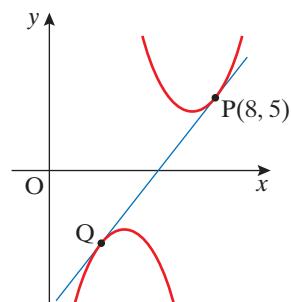
- 22.**  $y = x^2 - 14x + 53$  an chothromóid atá ag paraból.

Tá tadhlaí leis an bparaból ag an bpointe P(8, 5).

(i) Faigh cothromóid an tadhlaí sin.



(ii) Taispeáin go bhfuil an tadhlaí a fuair tú in (i) ina thadhlaí le paraból eile freisin, an pharaból a bhfuil an chothromóid  $y = -x^2 + 10x - 27$  aici, agus faigh comhordanáidí an phointe teagmhála, Q.



- 23.** Is féidir cosán thar bhearnas sléibhe a shamháltú leis an gcothromóid  $y = 2 + 0.12x - 0.01x^3$ , áit arb iad  $x$  an fad cothrománach agus  $y$  an fad ceartingearach, iad araon tomhaiste ina gciliméadair,  $0 \leq x \leq 3$ .

(i) Faigh an grádán ag túis an chosáin agus ag deireadh an chosáin.

(ii) Ríomh an pointe ag a bhfuil an grádán cothrom le nialas, agus ríomh freisin airde an bhearnais.

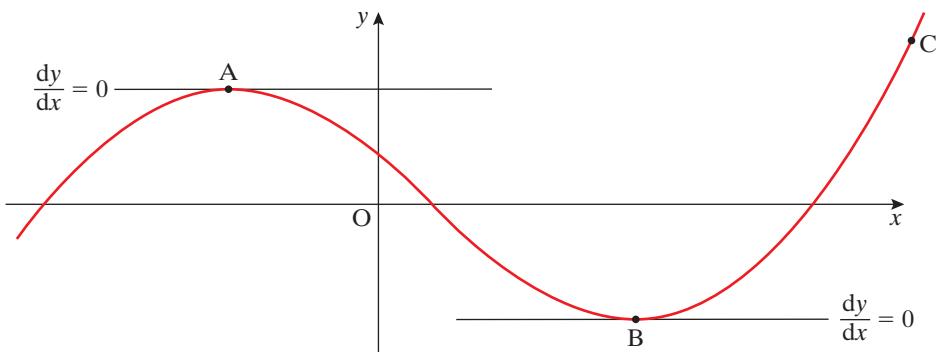
24.  $y = \sqrt{x + 2}$  n chothromóid atá ag cuar áirithe. Buaileann sé leis an  $x$ -ais ag A agus leis an  $y$ -ais ag B.
- Faigh comhordanáidí A agus B.
  - Bain úsáid as an gcuingriail chun  $\frac{dy}{dx}$  a fháil.
  - (i) Faigh grádán an chuair san áit a bhfuil  $x = -1$ .
  - (ii) Faigh cothromóid an tadhlaí ag an bpointe ag a bhfuil  $x = -1$ .
  - (iii) Má bhuaileann an tadhlaí leis an  $x$ -ais ag C agus leis an  $y$ -ais ag D, faigh an fad  $|CD|$ .
  - Faigh na luachanna ar  $x$  a fhágann go bhfuil  $\frac{dy}{dx} < 1$ .

## Mír 3.2 Pointí cónaitheacha

---

Féach ar an léaráid thíos. Comhthreomhar leis an  $x$ -ais atá na tadhlaithe leis an gcuar ag pointe A agus ag pointe B, agus is ionann dá bhrí sin fána gach tadhlaí agus nialas.

**Pointí cónaitheacha** a thugtar ar phointí ar chuar ag arb ionann  $\frac{dy}{dx}$  agus nialas.



Is pointí cónaitheacha iad A agus B ar an gcuar thuas, agus tugtar **pointí casaidh** orthu chomh maith.

**Uaspoinnte logánta** a thugtar ar an bpointe casaidh ag A, ó tá luach na feidhme ag an bpointe sin níos mó ná luach ar bith ar an bhfeidhm go díreach ar dheis nó ar chlé A.

Ní mar a chéile i gcónaí uasluach feidhme agus an luach is mó ar an bhfeidhm.

Is léir é sin ar an gcuar sa léaráid thuas: is mó luach na feidhme ag C ná luach na feidhme ag A.

**Íospoinnte casaidh** nó **íospoinnte logánta** a thugtar ar an bpointe casaidh ag B thuas.

Mar seo a fhaightear pointí casaidh cuair:

- $\frac{dy}{dx}$  na feidhme a fháil
- glacadh le  $\frac{dy}{dx} = 0$ , agus an chothromóid a réiteach
- i gcás gach luacha ar  $x$ , an luach comhfhreagrach ar  $y$  a fháil.

## Sampla 1

Faigh pointí casaidh an chuair  $y = x + \frac{1}{x}$ .

Gheobhaimid na pointí casaidh ach an chothromóid  $\frac{dy}{dx} = 0$  a réiteach.

$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y = x + x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

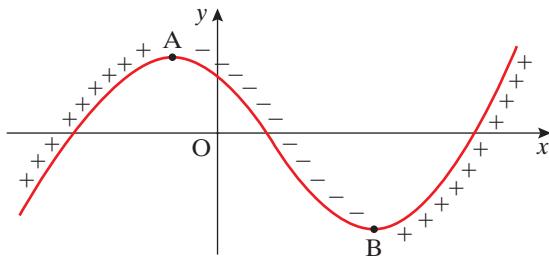
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \\ \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2 \text{ agus } x = -1 \Rightarrow y = -2$$

$\therefore$  Is iad  $(1, 2)$  agus  $(-1, -2)$  pointí casaidh an chuair.

## A dhéanamh amach cén cineál pointe casaidh atá ann

Is iad na comharthaí deimhneacha (+) sa léaráid thíos a insíonn dúinn cá bhfuil fána an chuair deimhneach (i.e.  $\frac{dy}{dx} > 0$ ), agus is iad na comharthaí diúltacha (-) a insíonn dúinn cá bhfuil fána an chuair diúltach (i.e.  $\frac{dy}{dx} < 0$ ).



De réir mar a dhruidtear ón taobh clé leis an bpointe A, is deimhneach atá fána an chuair ach í a bheith ag dul i laghad. Is ionann an fhána agus nialas ag A féin, agus diúltach atá an fhána ar dheis A. Mar sin, de réir mar a ghluaiastear tríd an bpointe A, athraíonn fána an chuair ón deimhneach go dtí an diúltach (i.e. is ag dul i laghad atá an fhána).

Mar sin, diúltach atá ráta athraithe  $\frac{dy}{dx}$  (i.e.  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ).

$\Rightarrow$  Diúltach a bhíonn  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ag uasphointe casaidh.

Ar an gcuma chéanna, ón diúltach go dtí an deimhneach a athraíonn fána an chuair ag an bpointe B, is é sin le rá gur ag dul i méid atá an fhána.

Mar sin, deimhneach atá ráta athraithe  $\frac{dy}{dx}$  (i.e.  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ) ag an bpointe B.

$\Rightarrow$  Deimhneach a bhíonn  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ag íosphointe casaidh.

Tástail an dara  
diorthach le haghaidh  
pointí casaidh

Ag uasphointe casaidh,  $\frac{dy}{dx} = 0$  agus  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ , i.e. diúltach

Ag íosphointe casaidh,  $\frac{dy}{dx} = 0$  agus  $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ , i.e. deimhneach

## Sampla 2

Faigh pointí casaidh an chuair  $y = x^3 - 9x^2 + 15x$  agus déan amach cén cineál pointí casaidh iad.

Gheobhaimid na pointí casaidh ach an chothromóid  $\frac{dy}{dx} = 0$  a réiteach.

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 15$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = 0 &\Rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \\ &\Rightarrow (x - 5)(x - 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 5 \text{ nó } x = 1\end{aligned}$$

Nuair atá  $x = 5$ ,  $y = (5)^3 - 9(5)^2 + 15(5) \Rightarrow y = -25$

$\therefore$  is pointe casaidh é  $(5, -25)$ .

Nuair atá  $x = 1$ ,  $y = (1)^3 - 9(1)^2 + 15(1) = 7$

$\therefore$  is pointe casaidh eile é  $(1, 7)$ .

Déanfaimid amach cén cineál pointí casaidh iad ach  $\frac{d^2y}{dx^2}$  a fháil.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 15 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 18$$

$$\begin{aligned}\text{Nuair atá } x = 5, \frac{d^2y}{dx^2} &= 6(5) - 18 = 12, \text{ uimhir dheimhneach.} \\ &\Rightarrow \text{is fíosphointe casaidh é } (5, -25).\end{aligned}$$

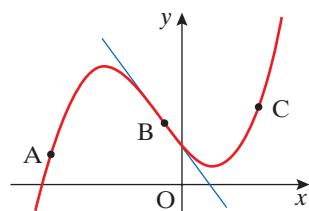
$$\begin{aligned}\text{Nuair atá } x = 1, \frac{d^2y}{dx^2} &= 6(1) - 18 = -12, \text{ uimhir dhiúltach.} \\ &\Rightarrow (1, 7) \text{ is uasphointe casaidh é } (1, 7).\end{aligned}$$

## Pointí Athchasaíd

Cuasach thusatá an cuar sa léaráid thíos ón bpointe A go dtí an pointe B, agus **cuasach thíos** ón bpointe B go dtí an pointe C.

**Pointe athchasaíd** a thugtar ar an bpointe B,  
áit a n-athraíonn an cuar.

Ag pointe athchasaíd, trasnaíonn an tadhlaí an cuar.



Tá  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$  ag pointe athchasaídh, B, ar an gcuar  $y = f(x)$ , agus tagann athrú ar an gcomhartha agus an cuar ag gabháil trí B.

Tá le feiceáil sa léaráid ar an leathanach roimhe seo nach ionann agus nialas i gcónaí an fhána ag pointe athchasaídh.

### *Pointe Athchasaídh*

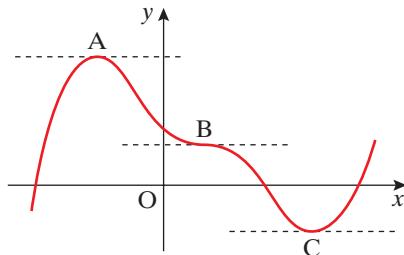
Tá  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$  ag pointe athchasaídh, B, ar an gcuar  $y = f(x)$ , agus tagann athrú ar an gcomhartha agus an cuar ag gabháil trí B.

Mar sin, is mar seo a fhaightear pointe/pointí athchasaídh cuair:

- (i)  $\frac{d^2y}{dx^2}$  a fháil
- (ii) an chothromóid  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$  a réiteach
- (iii) i gcás gach luacha ar  $x$ , an luach comhfhireagrach ar  $y$  a fháil.

**Nóta:** Is pointe athchasaídh é an pointe B ar an gcuar ar dheis. Tá an tadhlaí leis an gcuar ag B comhthreomhar leis an x-ais freisin.

**Diallaítpointe** nó **pointe athchasaídh cothrománach** a thugtar ar an bpointe B.



### **Sampla 3**

Faigh pointe athchasaídh an chuair  $y = x^3 - 3x^2 - 2$ .

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 3x^2 - 2 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - 6x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 \\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0 &\Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Nuair atá } x = 1, y = (1)^3 - 3(1)^2 - 2 = -4$$

$\therefore$  Is é  $(1, -4)$  an pointe athchasaídh.

## Sampla 4

Fíoraigh nach bhfuil pointe casaidh ar bith ná pointe athchasaидh ar bith ar an gcuar  $y = \frac{x+2}{2x-3}$ .

Fíoraigh chomh maith gur ag dul i laghad atá an cuar i gcás gach luacha ar  $x \in R$ .

Gheobhaimid na pointí casaidh ach an chothromóid  $\frac{dy}{dx} = 0$  a réiteach.

$$\begin{aligned}y &= \frac{x+2}{2x-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(2x-3)(1) - (x+2)(2)}{(2x-3)^2} \\&= \frac{2x-3-2x-4}{(2x-3)^2} = \frac{-7}{(2x-3)^2}\end{aligned}$$

Ní fhéadfadh an slonn  $\frac{-7}{(2x-3)^2}$  a bheith cothrom le nialas riamh, **mar nach mbíonn codán ina nialas mura mbíonn an t-uimhreoir ina nialas.**

Ó tá  $\frac{-7}{(2x-3)^2} \neq 0$ , níl pointe casaidh ar bith ar an gcuar.

Gheobhaimid an pointe athchasaидh ach an chothromóid  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$  a réiteach.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{-7}{(2x-3)^2} = -7(2x-3)^{-2} \\&\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 14(2x-3)^{-3}(2) = \frac{28}{(2x-3)^3}\end{aligned}$$

Ó tá  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{28}{(2x-3)^3} \neq 0$ , níl pointe athchasaидh ar bith ar an gcuar.

Ag dul i laghad a bhíonn cuar más diúltach a bhíonn  $\frac{dy}{dx}$ .

$\frac{dy}{dx} = \frac{-7}{(2x-3)^2}$ , rud a bhíonn diúltach i gcónaí, ós deimhneach a bhíonn  $(2x-3)^2$  i gcónaí.

$\Rightarrow$  Ag dul i laghad atá an cuar i gcás gach  $x \in R$ .

## Cleachtadh 3.2

1. Faigh pointe casaidh na feidhme  $y = x^2 - 4x + 9$  agus taispeáin gur íospointe logánta atá ann.
2. Faigh pointe casaidh an chuairt  $y = 4 - 8x - 2x^2$  agus taispeáin gur uaspointe logánta atá ann.
3. Faigh pointe casaidh na feidhme  $y = 3x^2 - 6x + 4$  agus déan amach cé acu uaspointe logánta nó íospointe logánta atá ann.
4. Faigh uaspointe casaidh agus íospointe casaidh an chuairt  $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 2$ .

- 5.** Faigh comhordanáidí na bpointí casaith ar gach ceann de na cuair seo a leanas, agus déan amach cén cineál pointí casaith iad:
- (i)  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$       (ii)  $y = \frac{x^2}{x+2}$
- 6.** Faigh comhordanáidí uaspointhe casaith agus íospointhe casaith na feidhme  
 $f(x) = 4x + \frac{4}{x}$ .
- 7.** Faigh pointe casaith na feidhme  $y = x^2 + \frac{250}{x}$  agus déan amach cé acu uaspointhe casaith nó íospointhe casaith é.
- 8.** Faigh pointe casaith na feidhme  $y = x - \sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ) agus déan amach cén cineál pointe casaith é.
- 9.** Réitigh an chothromóid  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ , go bhfaighidh tú comhordanáidí an phointe athchasaith ar gach ceann de na cuair seo:
- (i)  $y = x^3 + 3x^2 + 1$       (ii)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ .
- 10.** Taispeán go bhfuil pointe athchasaith ar an gcuar  $y = \cos x$  ag  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- 11.** Pointí casaith iad  $(0, 4)$  agus  $(-1, 5)$  ar an bhfeidhm  $y = ax^3 + bx^2 + c$ . Faigh luach  $a$ ,  $b$  agus  $c$ .
- 12.** Tá  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ ,  $x \in R$  agus  $x \neq 3$ .  
Taispeán nach bhfuil pointe casaith ar bith ar ghraf  $y = f(x)$ .
- 13.** Cothromóid cuair é  $y = 2x^2 - \ln x$ ,  $x > 0$ .
- (i) Taispeán gurb ionann 3 agus fána an chuair ag an bpointe mar a bhfuil  $x = 1$ .  
(ii) Faigh comhordanáidí phointe casaith an chuair agus fiosraigh cé acu uaspointhe logánta nó íospointhe logánta é an pointe sin.
- 14.** Seo cothromóid feidhme:  $y = e^x - x$ .
- (i) Faigh comhordanáidí phointe cónaitheach na feidhme seo.  
(ii) Déan amach cén cineál pointe cónaitheach atá ann.
- 15.** (a) Faigh na pointí cónaitheacha ar an gcuar a bhfuil an chothromóid  $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$  aige agus scríobh síos cén cineál iad.  
(b) (i) Taispeán go bhfuil  $(x-2)^2(x-5) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ .  
(ii) Uaidh sin, sceitseáil graf  $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ .
- 16.** Sainítear an fheidhme  $f(x) = (1+x)\log_e(1+x)$  le haghaidh  $x > -1$ .
- (i) Taispeán go bhfuil pointe casaith ag an gcuar  $y = f(x)$  ag  $\left(\frac{1-e}{e}, \frac{-1}{e}\right)$ .  
(ii) Déan amach cé acu uaspointhe logánta nó íospointhe logánta é an pointe casaith.

- 17.** Tá uaspointe ar an bhfeidhm  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ag  $(0, 4)$  agus tá pointe athchasaидh ag  $(1, 0)$ .  
Faigh luach  $a, b, c$  agus  $d$ .
- 18.** Tá  $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ,  $x \in R$  agus  $x \neq -2$ .  
Taispeán nach bhfuil pointe casaidh ná pointe athchasaидh ar bith ar ghraf  $f(x)$ .
- 19.** Bíodh  $g(x) = x^2 + \frac{a}{x^2}$ , áit ar réaduimhir é a agus  $x \in R$ ,  $x \neq 0$ .  
Má tá pointe casaidh ar  $g(x)$  ag  $x = 2$ ,
- (i) faigh luach
  - (ii) taispeán nach bhfuil uaspointe logánta ar bith ar  $g(x)$ .
- 20.** Tiomáintear leoraí díosail ó Luimneach go Gaillimh ar luas seasta de  $v$  ciliméadar san uair.  
Seo mar a fhaightear costas iomlán an turais, €C:  $C = \frac{1400}{v} + \frac{2v}{7}$ .
- (i) Faigh an luach ar  $v$  a fhágann gur íosluach é  $C$ .
  - (ii) Faigh  $\frac{d^2C}{dv^2}$  agus, uaidh sin, fíoraigh gur íosluach é  $C$  i gcás an luacha sin ar  $v$ .
  - (iii) Ríomh íoschoistas iomlán an turais.

### Mír 3.3 Graif den fheidhm dhíorthaithe (nó d'fheidhm na fána)

Is é an cuar ar dheis graf na feidhme

$$y = x^2 - 2x - 3.$$

Is ionann  $\frac{dy}{dx}$  don fheidhm seo agus  $2x - 2$ .

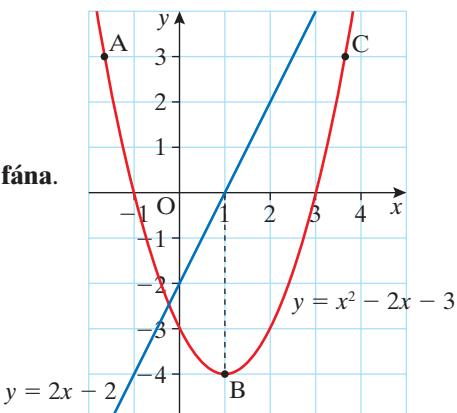
Is é  $y = 2x - 2$  an **fheidhm dhíorthaithe** nó **feidhm na fána**.

Seasann an líne ghorm d'fheidhm seo na fána.

Tá an méid seo le tabhairt faoi deara ón dá ghraf:

- (i) Ó A go B ar an gcuar, diúltach atá an fhána.  
Don  $x$ -eatramh seo, diúltach atá feidhm na fána (an líne ghorm) freisin, i.e. tá an líne ghorm faoi bhun na  $hx$ -aise.
- (ii) Ó B go C ar an gcuar, deimhneach atá an fhána.  
Don  $x$ -eatramh seo, deimhneach atá feidhm na fána (an líne ghorm) freisin, i.e. tá an líne ghorm os cionn na  $hx$ -aise.
- (iii) Is ionann fána an chuair ag an bpointe B agus nialas, i.e.  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Ag an bpointe B,  $x = 1$ . Tabhair faoi deara gurb ionann feidhm na fána agus nialas freisin ag an bpointe ag a bhfuil  $x = 1$ .

Léiríonn sé sin gurb ionann  $\frac{dy}{dx}$  (feidhm na fána) agus nialas ag pointe casaidh.



## Feidhm na fána i gcás feidhm chiúbach

Is graf d'fheidhm chiúbach,  $y = f(x)$ , é an cuar dearg ar dheis.

Is é an cuar gorm graf fheidhm na fána,  $y = g(x)$ .

Ar na gnéithe a bhaineann leis na cuair seo tá:

- San fheidhm  $y = f(x)$ , i gcás  $x < -3$ , deimhneach atá an fhána.

Léirítear é sin i bhfeidhm na fána  $y = g(x)$ , áit ar deimhneach atá  $g(x)$  i gcás  $x < -3$ .

- Diúltach atá fána an chuair ó A go B.

Is é sin, ó  $x > -3$  go dtí  $x < 2$ , diúltach atá an fhána.

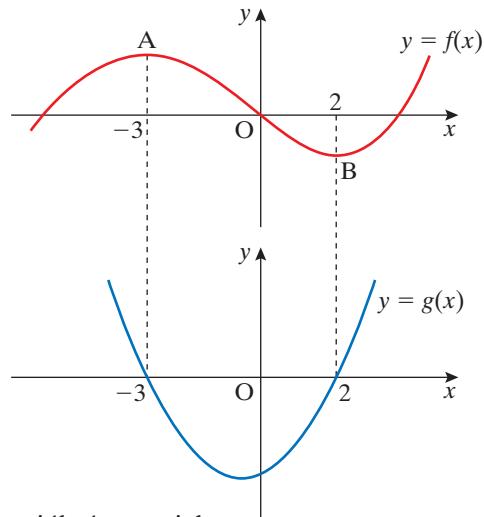
Is léir gur diúltach atá feidhm na fána i gcás  $-3 < x < 2$ .

- Ag  $x = -3$  agus  $x = 2$ , is ionann fána na feidhme ciúbaí agus nialas.

Ag an dá  $x$ -luach sin, is ionann feidhm na fána agus nialas freisin.

- I gcás  $x > 2$ , deimhneach atá fána na feidhme ciúbaí.

I gcás  $x > 2$ , léiríonn feidhm na fána é sin ós deimhneach atá sí sin freisin i gcás  $x > 2$ .



### Sampla 1

Tá graf na feidhme  $y = f(x)$  le feiceáil ar dheis.  
Bain úsáid as an ngraf chun raon na luachanna ar  $x$  a scríobh síos i ngach cás acu seo:

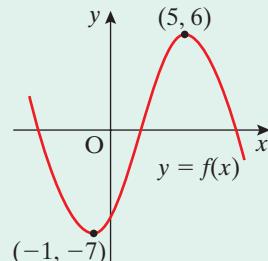
$$(i) f'(x) > 0 \quad (ii) f'(x) < 0 \quad (iii) f'(x) = 0.$$

- (i) Seasann  $f'(x)$  d'fhána an chuair ag pointe ar bith.

$$\therefore f'(x) > 0 \text{ i gcás } -1 < x < 5$$

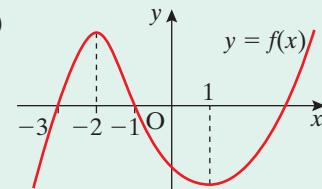
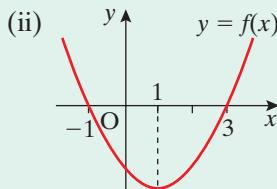
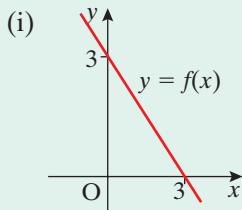
- (ii)  $f'(x) < 0$  i gcás  $x < -1$  agus  $x > 5$

- (iii)  $f'(x) = 0$  ag  $x = -1$  agus ag  $x = 5$

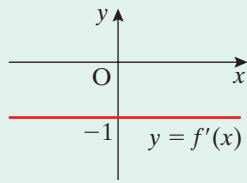


### Sampla 2

Tarraing sceitse garbh de  $y = f'(x)$  i gcás gach ceann de na feidhmeanna grafta seo a leanas.



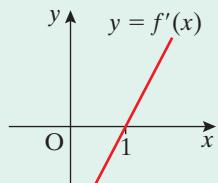
(i)  $f'(x) = -1$  ... an fhána i gcás gach  $x$ .



(ii)  $f'(x) > 0$  i gcás  $x > 1$

$f'(x) < 0$  i gcás  $x < 1$

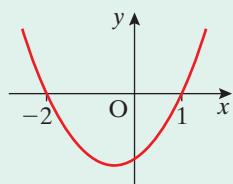
$f'(x) = 0$  i gcás  $x = 1$



(iii)  $f'(x) > 0$  i gcás  $x < -2$  agus  $x > 1$

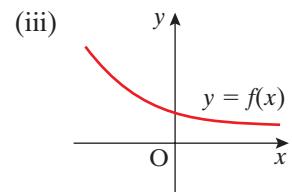
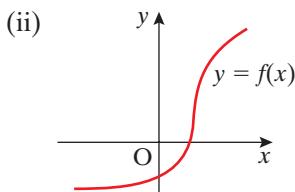
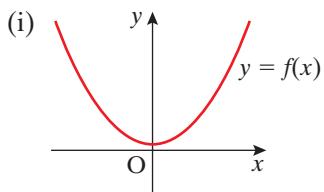
$f'(x) < 0$  i gcás  $-2 < x < 1$

$f'(x) = 0$  i gcás  $x = -2$  agus  $x = 1$

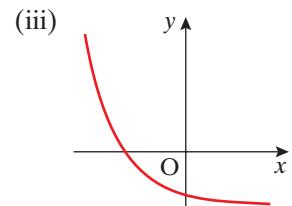
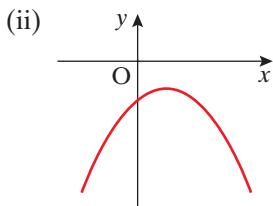
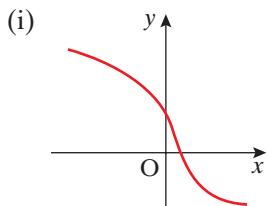


### Cleachtadh 3.3

1. Cé acu de na cuair seo a leanas de  $y = f(x)$  a fhágann gur deimhneach atá  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach luacha a  $x$ ?

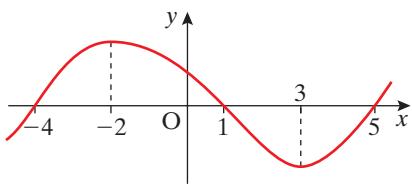


2. Cé acu de na cuair seo a leanas a fhágann gur diúltach atá  $\frac{dy}{dx}$  i gcás gach luacha ar  $x$ ?

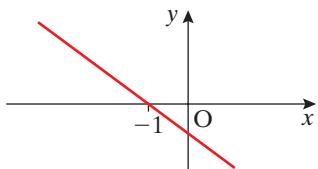
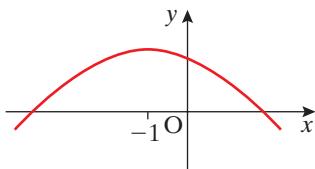


3. Tá graf na feidhme  $y = f(x)$  le feiceáil ar dheis.

- (i) Mínigh céard is ciall le ' $f'(x) > 0$ '?
- (ii) Cén raon luachanna ar  $x$  a fhágann go bhfuil  $f'(x) > 0$ ?
- (iii) Cén raon luachanna ar  $x$  a fhágann go bhfuil  $f'(x) < 0$ ?
- (iv) Cé na luachanna ar  $x$  a fhágann go bhfuil  $f'(x) = 0$ ?



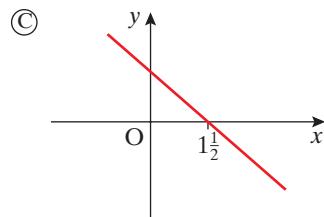
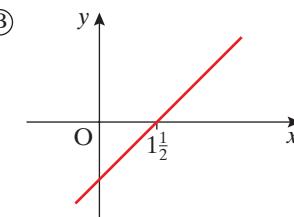
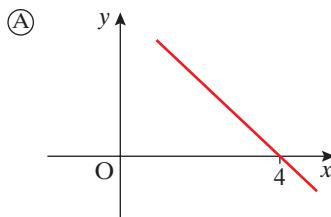
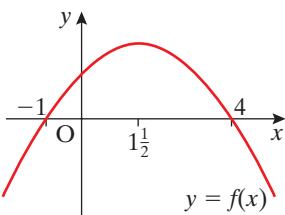
4. Féach ar an gcuar agus ar an líne ar dheis. Tabhair trí chuíos a seasann an líne d'fheidhm fána an chuair.



5. Graf den fheidhm  $y = f(x)$  atá sa léaráid ar dheis.

Cé acu de na trí ghraf thíos a sheasann do ghraf fheidhm na fána  $y = f'(x)$ ?

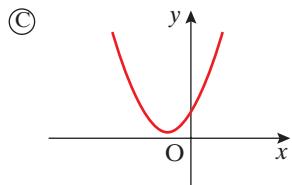
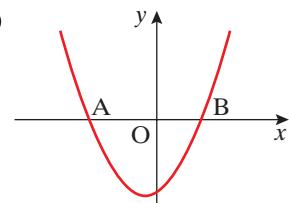
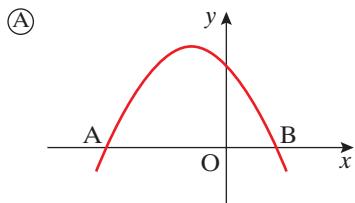
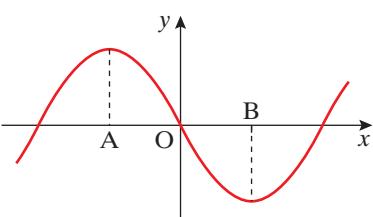
Mínigh do fhreagra.



6. Tá graf na feidhme  $y = f(x)$  le feiceáil ar dheis.

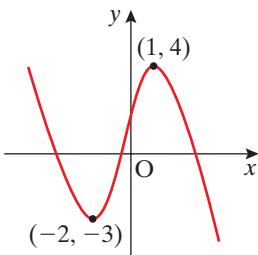
Cé acu de na trí ghraf thíos a sheasann d'fheidhm na fána i gcás an chuair sin?

Mínigh do fhreagra.

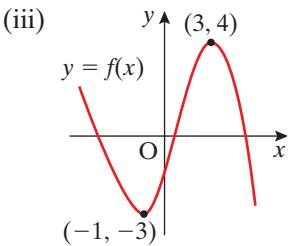
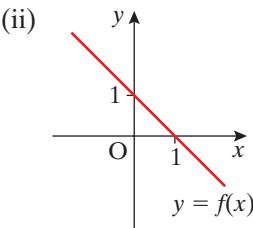
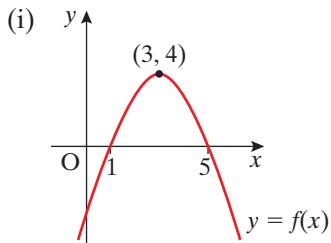


7. I gcás ghraf  $y = f(x)$ , faigh:

- (i)  $\{x : f'(x) > 0\}$
- (ii)  $\{x : f'(x) < 0\}$
- (iii)  $\{x : f'(x) = 0\}$

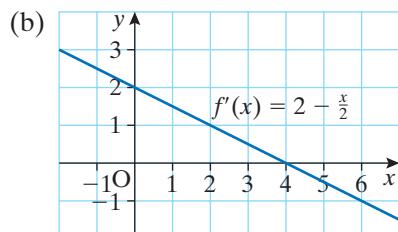
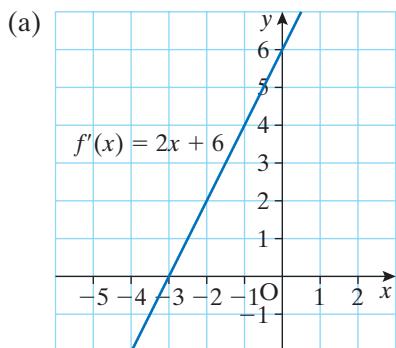


8. Tarraing sceitse garbh de ghraf  $y = f'(x)$  i gcás gach ceann díobh seo:



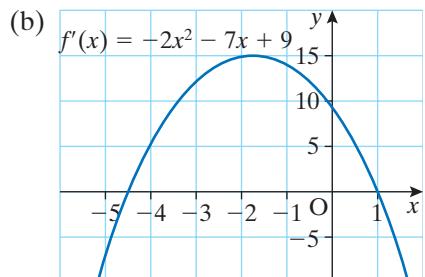
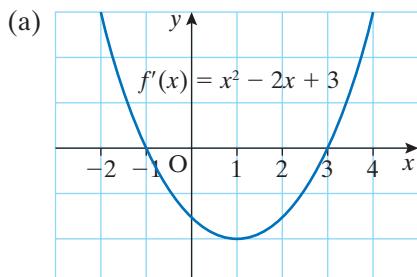
9. Tugtar thíos feidhm na fána i gcás dhá chuar  $y = f(x)$ :

- I gcás gach cuair, faigh
- (i)  $x$ -chomhordanáid an phointe casaidh
  - (ii) an raon luachanna ar  $x$  a fhágann gur laghdaitheach atá an cuar.



10. Tugtar thíos an graf d'fheidhm na fána i gcás dhá chuar.

- I gcás gach cuair, faigh
- (i)  $x$ -chomhordanáid na bpointí cónaitheacha
  - (ii) an raon luachanna ar  $x$  a fhágann gur méadaitheach atá an cuar.



- 11.** Is é díorthach na feidhme  $f$  ná  $f'(x) = x^2 - 9$ .  
 Seo dhá ráiteas maidir le  $f$ :
1. Méadaitheach atá  $f$  ag  $x = 1$ .
  2. Tá pointe cónaitheach ag  $f$  ag  $x = -3$ .

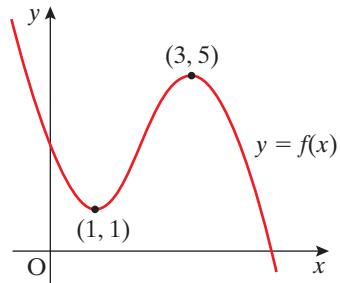
Cé acu seo a leanas atá fíor?

- A. Níl ceachtar den dá ráiteas ceart.
- B. Níl ach ráiteas 1 ceart.
- C. Níl ach ráiteas 2 ceart.
- D. Tá an dá ráiteas ceart.

- 12.** Tá graf na feidhme ciúbaí  $y = f(x)$  le feiceáil sa léaráid. Tá pointí casaidh ag  $(1, 1)$  agus  $(3, 5)$ .

Tarraing sceitse garbh de ghraf

- (i)  $y = f'(x)$
- (ii)  $y = f''(x)$



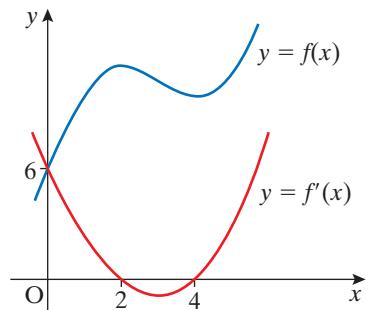
- 13.** Taispeántar dhá ghraf sa léaráid: an fheidhm chiúbach  $y = f(x)$  agus a feidhm dhíorthaithe  $y = f'(x)$ .

Gabhann an dá ghraf tríd an bpointe  $(0, 6)$ .

Gabhann graf  $y = f'(x)$  trí na pointí  $(2, 0)$  agus  $(4, 0)$  freisin.

Más san fhoirm  $k(x - a)(x - b)$  atá  $y = f'(x)$ ,

- (i) scríobh síos luach  $a$  agus luach  $b$
- (ii) faigh luach  $k$ .

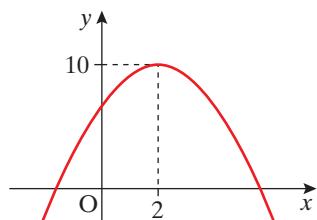


## Mír 3.4 Fadhbanna lena mbaineann uasluachanna agus íoslúachanna

Taispeánadh i mír 3.2 gur mór an áis é an calcalas difréálach le taispeáint gurb é 10 uasluach na feidhme ar dheis, agus go dtarlaíonn sé sin nuair atá  $x = 2$ .

Sa mhír seo, taispeánfaimid cén chaoi le leas a bhaint as an gcalcalas difréálach chun uasluach nó íoslúach feidhm ar bith a fháil, mar shampla €C le seasamh do chostas, Achar (A) le seasamh d'achar, nó  $V$  le seasamh do thoirt.

Is iad seo na céimeanna a thabharfar leis na fadhbanna is bunúsaí a réiteach i dtaobh uasluachanna agus íoslúachanna:



- Léaráid a tharraingt, nuair is gá, agus na toisí a thugtar duit a mharcáil uirthi.
- Cothromóid a bhfuil athróg amháin inti a scríobh le haghaidh na cainníochta a bhfuil a huasluach, nó a híosluach, le fáil.  
Más i dtéarmaí dhá athróg atá an chothromóid, úsáid a bhaint as an eolas a thugtar duit chun ceann de na hathróga a scríobh i dtéarmaí na hathróige eile ionas gur féidir an chainníocht a scríobh i dtéarmaí athróg amháin ansin.
- An fheidhm a dhifreáil agus a chothromú le nialas, i.e.  $f'(x)$  a fháil agus glacadh leis go bhfuil  $f'(x) = 0$ .
- An chothromóid  $f'(x) = 0$  a réiteach go bhfaightear an luach/na luachanna ar  $x$  a thugann an t-uasluach nó an t-íosluach.
- An luach/na luachanna sin ar  $x$  a chur isteach sa chothromóid a thugtar go bhfaightear an t-uasluach nó an t-íosluach.
- Leas a bhaint as tástáil an dara síorthach (i.e.  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ) go bhfaightear amach cé acu uasluach nó íosluach a thugann an luach/na luachanna sin ar  $x$ .

### Sampla 1

Táirgeann monarcha  $n$  earra in aghaidh na huaire.

$$\text{Tá na forchostais, } C(n) = \mathbb{E} \left( 400 - 16n + \frac{n^2}{4} \right).$$

Cé mhéad earra ba chóir a tháirgeadh chun na forchostais a íoslaghcdú?

$$C = \mathbb{E} \left( 400 - 16n + \frac{n^2}{4} \right)$$

$$\frac{dC}{dn} = -16 + \frac{n}{2}$$

$$\frac{d^2C}{dn^2} = \frac{1}{2} \text{ rud atá } > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dn} = 0 \Rightarrow -16 + \frac{n}{2} = 0 \\ \Rightarrow n = 32 \end{aligned}$$

Ó tharla go bhfuil  $\frac{d^2C}{dn^2} > 0$ , is é  $n = 32$  an líon earraí ba chóir a tháirgeadh chun na forchostais a íoslaghcdú.

### Sampla 2

De mhiotal caol atá bosca dronuilleogach dúnnta déanta. Is ionann fad an bhosca agus trí oiread a leithid.  $36 \text{ cm}^3$  toirt an bhosca agus  $x \text{ cm}$  a leithead.

Taispeáin gurb é seo achar an dromchla:s  $\left( 6x^2 + \frac{96}{x} \right) \text{ cm}^2$ .

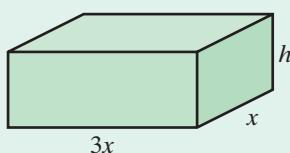
Faigh na toisí a fhágann go bhfuil an t-achar is lú sa bhosca.

$$\text{Toirt} = 36 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow 3x^2h = 36$$

$$\Rightarrow x^2h = 12$$

$$\Rightarrow h = \frac{12}{x^2}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Achar an dromchla} &= 2(3xh) + 2(xh) + 2(3x^2) \\
 &= 6xh + 2xh + 6x^2 \\
 &= 8xh + 6x^2 \\
 &= 8x\left(\frac{12}{x^2}\right) + 6x^2 = \left(\frac{96}{x} + 6x^2\right) \text{ cm}^2 \quad \dots \left(h = \frac{12}{x^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Achar an dromchla } (S) = \left(6x^2 + \frac{96}{x}\right) \text{ cm}^2$$

$$\frac{dS}{dx} = 12x - \frac{96}{x^2} \quad \dots \left(\frac{96}{x} = 96x^{-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow 12x - \frac{96}{x^2} &= 0 \\
 \Rightarrow 12x^3 - 96 &= 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2
 \end{aligned}$$

Le fiosrú cé acu uasluach nó íosluach a fhaighimid ón luach sin ar  $x$ ,

$$\text{faighimid } \frac{d^2S}{dx^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dx} = 12x - \frac{96}{x^2} &= 12x - 96x^{-2} \\
 \Rightarrow \frac{d^2S}{dx^2} &= 12 + 192x^{-3} \\
 &= 12 + \frac{192}{x^3} = 12 + \frac{192}{8} \text{ nuair atá } x = 2 \\
 &= 36 > 0 \Rightarrow \text{íosluach}
 \end{aligned}$$

Nuair atá  $x = 2$ , is iad toisí an bhosca:

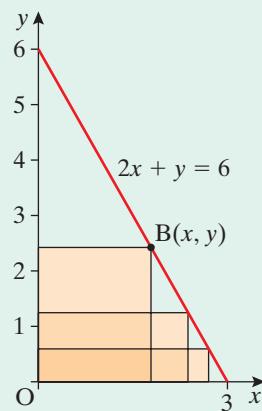
$$\text{fad} = 3x = 6; \text{leithead} = x = 2; \text{airde} = \frac{12}{x^2} = 3$$

$\therefore$  Is iad 6 cm faoi 2 cm faoi 3 cm na toisí.

### Sampla 3

Chun dronuilleog a dhéanamh, úsáidtear an  $x$ -ais dheimhneach, an  $y$ -ais dheimhneach agus pointe  $B(x, y)$  ar an líne  $2x + y = 6$ , mar atá le feiceáil ar dheis.

- (i) Faigh slonn le haghaidh achar,  $A$  aonad cearnach, na dronuilleoige seo i dtéarmaí  $x$ .
- (ii) Céard é tacar fearainn na luachanna ar  $x$ ?
- (iii) Bain leas as an difréail chun an t-achar is mó a d'fhéadfadh a bheith sa dronuilleog seo a aimsiú.



(i) Achar = fad × leithead

$$A = x(y) = xy$$

Anois scríobhaimid an t-achar i dtéarmaí athróig amháin.

Ó tharla go bhfuil  $2x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - 2x$

$$\text{Achar } (A) = x(6 - 2x) = 6x - 2x^2$$

(ii) Ó tharla go dtrasnaíonn an líne an  $x$ -ais ag  $(3, 0) \Rightarrow 0 < x < 3$ .

(iii)  $A = 6x - 2x^2$

$$\frac{dA}{dx} = 6 - 4x$$

$\Rightarrow 6 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1.5 \dots$  le go mbeidh uasluach nó íoslach ann,  $\frac{dA}{dx} = 0$

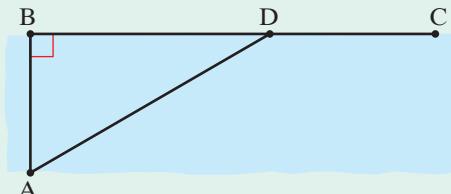
$$\frac{d^2A}{dx^2} = -4, \text{ rud atá níos lú ná 0}$$

Nuiratá  $x = 1.5$ , tá uasluach ann ó tharla go bhfuil  $\frac{d^2A}{dx^2} < 0$ .

Uasachar  $= 6(1.5) - 2(1.5)^2 = 4.5$  aonad cearnach.

#### Sampla 4

Is mian le fear dul ó phointe A ar thaobh amháin d'abhairn go dtí pointe C ar an taobh thall, mar a thaispeántar. Tá an pointe C 9 km ón bpóinte B. Tá an pointe B 3 km trasna na habhann go díreach ó A.

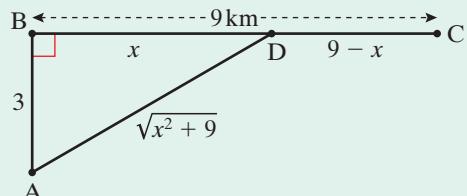


Tá an fear in ann rámhaíocht ag 4 km/h agus siúl ag 5 km/h. Má rámhaíonn an fear ó A go D agus má shiúlann sé ó D go C, faigh  $|BD|$  sa chaoi is go dtéann an fear ó A go C chomh tapa agus is féidir.

$$\text{Bíodh } |BD| = x \text{ km}$$

$$\Rightarrow |DC| = (9 - x) \text{ km}$$

$$\text{agus } |AD| = \sqrt{x^2 + 9} \text{ km}$$



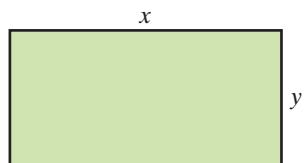
Méid ama ag dul ó A go D  $= \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4}$  uair an chloig  $\dots$  ( $Am = \frac{\text{Fad}}{\text{Luas}}$ )

Méid ama ag dul ó D go C  $= \frac{9-x}{5}$  uair an chloig

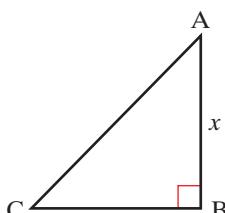
$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{Méid ama iomlán, } T &= \left( \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{9 - x}{5} \right) \text{ uair an chloig} \\
 &= \frac{1}{4}(x^2 + 9)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{5}(9 - x) \\
 \frac{dT}{dx} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{5} \\
 &= \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{5} \\
 \frac{dT}{dx} = 0 &\Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{5} = 0 \\
 \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 9}} &= \frac{1}{5} \\
 \Rightarrow \frac{x^2}{16(x^2 + 9)} &= \frac{1}{25} \\
 \Rightarrow 25x^2 &= 16x^2 + 144 \\
 \Rightarrow 9x^2 &= 144 \\
 \Rightarrow x^2 &= 16 \Rightarrow x = \pm 4 \\
 \Rightarrow x = 4 \text{ km} &\dots \text{tabhair neamháird ar an bhfreagra diúltach} \\
 \Rightarrow |BD| &= 4 \text{ km}
 \end{aligned}$$

## Cleachtadh 3.4

- Má tá  $x + y = 6$  agus  $A = x^2y$ , faigh uasluach A.
- Seo mar a fhaightear imlíne, P cm, cruth áirithe a bhfuil slios air x cm ar fad:  
 $P(x) = \frac{1152}{x} + 8x + 20$ .
  - Ríomh an luach ar x a fhágann gur íoslach é P.
  - Déan amach íoslach sin P.
- Fál 100 m atá thart ar phíosa dronuilleogach talún.  
 Más x m ar fad atá an cró sin, scríobh y  
 i dtéarmaí x.  
 Faigh uaidh sin uasachar an phíosa talún.



- Athraíonn fad [AB] agus [BC] ar an triantán dronuilleach ABC ar dheis sa chaoi is gurb ionann suim an dá shlios agus 8 cm i gcónaí.
  - Má tá  $|AB| = x$ , sloinn  $|BC|$  i dtéarmaí x.
  - Faigh uasachar an triantáin ABC.



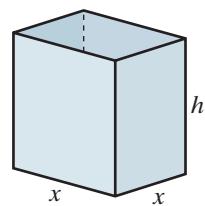
5. Is é an toilleadh atá in umar stórála i bhfoirm ciúbóidigh ná  $108 \text{ m}^3$ . Tá bonn cearnógach dar slios  $x$  méadar air, tá sleasa ceartingearacha air agus tá sé oscailte ag an mbarr.

(i) Sloinn an airde,  $h$ , i dtéarmaí  $x$ .

(ii) Taispeán gur mar seo a fhaightear achar an dromchla  $S$ :

$$S = x^2 + \frac{432}{x}$$

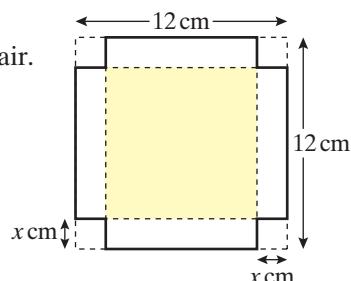
(iii) Faigh toisí an umair má tá achar an dromchla le bheith chomh beag agus is féidir.



6. Tá leathán cearnógach cairtchláir ann, 12 cm an slios, a mbaintear cearnóg as gach ceann de na ceithre chúinne air. Cearnóga cothroma atá iontu agus iad  $x$  cm ar fad. Castar in airde na sleasa ansin go ndéantar bosca oscailte dronuilleogach.

(i) Scríobh toirt an bhosca i dtéarmaí  $x$ .

(ii) Taispeán gur ag  $x = 2$  atá an uastoirt sa bhosca.



7.  $54 \text{ cm}^2$  atá in achar iomlán an dromchla ar bhosca dúnta dronuilleogach áirithe. Bonn cearnógach a bhfuil slios  $x$  cm air atá faoin mbosca. Tá an bosca  $h$  cm ar airde.

(i) Scríobh  $h$  i dtéarmaí  $x$ .

(ii) Scríobh toirt an bhosca i dtéarmaí  $x$ .

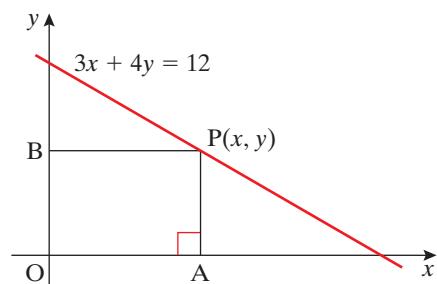
(iii) Cén luach ar  $x$  a fhágann gur uasluach atá sa toirt? Uaidh sin, faigh an toirt sin.

8. Sa léaráid ar dheis taispeántar an líne  $3x + 4y = 12$  ar a bhfuil an pointe P( $x, y$ ). Is dronuilleog é OAPB.

(i) Sloinn comhordanáidí P i dtéarmaí  $x$  amháin.

(ii) Sloinn achar na dronuilleoige OAPB i dtéarmaí  $x$ .

(iii) Faigh luach  $x$  más uasluach é achar OAPB, agus uaidh sin faigh an t-achar sin.



9. Tá canna sorcóireach dúnta  $h$  cm ar airde, agus  $r$  cm ar fad atá a gha. Más ionann achar iomlán an dromchla agus  $24\pi \text{ cm}^2$ , faigh slonn le haghaidh na toirte,  $V \text{ cm}^3$ , i dtéarmaí  $r$ .

Uaidh sin, faigh an luach ar  $r$  a fhágfaidh gur uasluach a bheidh sa toirt.

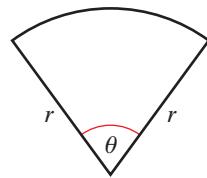
[**Nóta:** Is é achar an dromchla ar shorcóir dúnta ná  $2\pi r^2 + 2\pi rh$ .]

10. Nuair a shuimítear le chéile airde dronchón ciorclach agus ga a bhoinn, 20 cm a fhaightear.

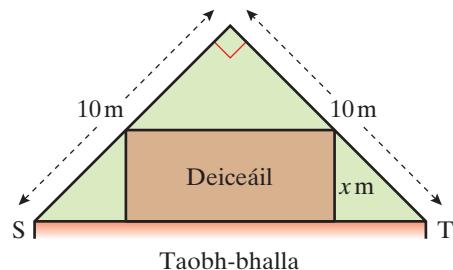
(i) Sloinn an airde,  $h$ , i dtéarmaí an gha,  $r$ .

(ii) Cén luach ar  $r$  a fhágann gur uasluach atá sa toirt?

- 11.** Is ionann imlíné teascóig ciorcail ar ga dó  $r$  agus 8 méadar.
- Sloinnn  $\theta$  i dtéarmaí  $r$ , áit arb é  $\theta$  uillinn na teascóige ina raidiain, mar a thaispeántar.
  - Uaidh sin, taispeáin gurb ionann achar na teascóige ina mhéadair chearnacha agus  $4r - r^2$ .
  - Faigh an t-achar is mó a d'fhéadfadh a bheith sa teascóig.



- 12.** Cruth triantán comhchosach dronuilleach atá ar ghairdín duine áirithe.  
Tá sé i gceist deiceáil admhaid dhronuilleogach a chur síos le taobh an tí, mar a thaispeántar sa léaráid.



- (i) Faigh an luach cruinn ar  $|ST|$ .
- Más ionann leithead na deiceála agus  $x$  méadar, taispeáin gur mar seo a fhaightear achar na deiceála, A méadar cearnach:

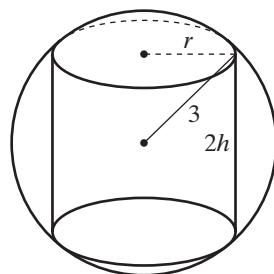
$$A = (10\sqrt{2})x - 2x^2.$$

- (b) Faigh na toisí a fhágann gur uaslúach é achar na deiceála.

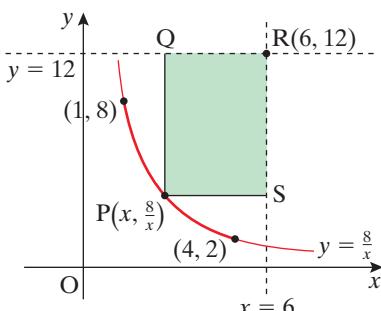
- 13.** Sa léaráid ar dheis taispeántar sorcóir a gearradh ó sféar soladach arb é 3 cm fad a gha.  
Más é  $2h$  airde an tsorcóra, faigh fad a gha i dtéarmaí  $h$ .

Uaidh sin, taispeáin gur mar seo a fhaightear toirt, V, an tsorcóra:  $V = 2\pi h(9 - h^2)$ .

Anois faigh uastoirt an tsorcóra.



- 14.** Déantar an dronuilleog PQRS de réir na gcoinníollacha seo a leanas:
- › tá na línte  $x = 6$  agus  $y = 12$  ina dteorainneacha léi
  - › tá P ar an gcuar a bhfuil an chothromóid  $y = \frac{8}{x}$  aige, idir  $(1, 8)$  agus  $(4, 2)$
  - › is é R an pointe  $(6, 12)$ .

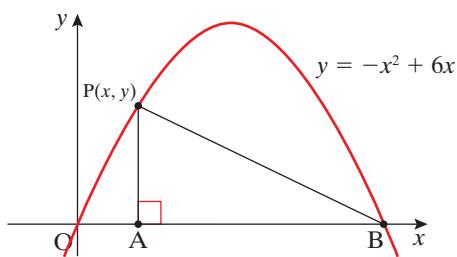


- (i) Sloinn fad [PS] agus fad [RS] i dtéarmaí  $x$ ,  $x$ -chomhordanáid P.
- Uaidh sin, taispeáin gur mar seo a fhaightear achar, A aonad cearnach, PQRS:

$$A = 80 - 12x - \frac{48}{x}.$$

- (b) Faigh an luach is mó agus an luach is lú a d'fhéadfadh a bheith ar  $A$ , agus faigh na luachanna comhfheagracha ar  $x$  dá dtarlaíonn siad.

- 15.** Sa léaráid taispeántar cuid den chuar  $y = -x^2 + 6x$  agus é ag trasnú na hx-aise ag an mbunphointe agus ag an bpointe B.  
Is pointe ar an gcuar é P(x, y) agus tá PA  $\perp$  AB.
- Sloinn comhordanáidí P i dtéarmaí x amháin.
  - Sloinn achar an triantáin ABP i dtéarmaí x.
  - Faigh uasachar an triantáin ABP.



- 16.** x cm ar doimhneacht agus y cm ar leithead atá trasghearradh bíoma.

Is mar seo a fhaightear neart, S, an bhíoma:  $S = 5x^2y$ .

Is ionann imlíne trasghearradh den bhíoma agus 120 cm.

- Faigh y i dtéarmaí x.
- Sloinn S i dtéarmaí x.
- Céard iad na luachanna a d'fhéadfadh a bheith ar x?
- Faigh na luachanna ar x agus y a thugann an bíoma is láidre.
- Más gá go mbeadh trasghearradh an bhíoma níos lú ná 19 cm ar doimhneacht, faigh uasneart an bhíoma.

## Mír 3.5 Rátaí athraithe

Tá sé feicthe againn inár gcuid staidéir ar an gcalcalas go dtí seo seo gurb ionann  $\frac{dy}{dx}$  agus ráta athraithe y i leith x.

Ar an gcaoi chéanna, má sheasann V don toirt agus t don am, is é  $\frac{dV}{dt}$  ráta athraithe na toirte i leith an ama.

Is léir gur féidir leas a bhaint as próiseas na difréala chun aghaidh a thabhairt ar a lán cineálacha fadhbanna lena mbaineann rátaí athraithe.

Ceann de na feidhmeanna is tábhachtaí de chuid an ráta athraithe ná gluaiseacht cáithní a thosaíonn ag pointe fosaithe O. Mar seo a shainmhínítear an **díláithriú**: an t-athrú ar shuíomh an cháithní fad is a bhaineann sé le O.

Sa staidéar seo ar an ngluaisne i líne dhíreach, is minic a thagaimid ar chothromóidí den chineál seo:  $s = 2t^2 - 3t + 4$ .

Is ionann s sa chothromóid sin agus an fad a ghluaistear (díláithriú), agus is ionann t agus an t-am a thógann sé.

Le  $\frac{ds}{dt}$  a chuirtear in iúl ráta athraithe s i leith t (i.e. an treoluas).

D'fhéadfadh an treoluas a bheith deimhneach, diúltach nó cothrom le nialas.

Má bhíonn an treoluas deimhneach, is ar dheis a bhíonn an cáithní ag gluaiseacht.

Má bhíonn an treoluas diúltach, is ar chlé a bhíonn an cáithní ag gluaiseacht.

Má bhíonn an treoluas cothrom le nialas, bíonn an cáithní ina stad go meandrach.

**Luasghéarú** (*a*) an réada atá ag gluaiseacht a thugtar ar ráta athraithe an treoluais i leith an ama.

$$\therefore \text{luasghéarú } (a) = \frac{dv}{dt} \text{ nó } \frac{d^2s}{dt^2}.$$

*Luas agus  
Luasghéarú*

Más ionann  $s$  agus an fad a ghluaiseann réad san am  $t$

- (i) is ionann  $\frac{ds}{dt}$  agus treolus an réada ag pointe ar bith ama  
(ii) is ionann  $\frac{d^2s}{dt^2}$  agus luasghéarú an réada.

**Nóta:** I bhformhór mór na gceisteanna sa chéad chleachtadh eile, is ionann ‘treolus’ agus luas.

### Sampla 1

Gluaiseann réad áirithe ina líne dhíreach sa chaoi is gur leis an gcothromóid seo a leanas a chuirtear in iúl an fad  $s$ , ina mhéadair, a ghluaiseann sé ó phointe fosaithe in imeacht  $t$  soicind:

$$s = 10 + 27t - t^3.$$

- Faigh (i) an luas a bhíonn faoi tar éis 2 soicind  
(ii) an méid soicindí go dtí go stopann an réad  
(iii) an luasghéarú tar éis 2 soicind.

(i)  $s = 10 + 27t - t^3$

$$\begin{aligned}\text{Luas} &= \frac{ds}{dt} = 27 - 3t^2 \\ &= 27 - 3(2)^2 \\ &= 15 \text{ mhéadar/soicind, tar éis 2 soicind}\end{aligned}$$

- (ii) Más ina stad a bhíonn an réad, is ionann an luas agus nialas.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} = 0 &\Rightarrow 27 - 3t^2 = 0 \\ &\Rightarrow 3t^2 = 27 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3 \quad \dots (t > 0)\end{aligned}$$

∴ tar éis 3 soicind a stopann an réad

- (iii) Is ionann  $\frac{d^2s}{dt^2}$  agus an luasghéarú.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} = 27 - 3t^2 &\Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -6t \\ &\Rightarrow \text{luasghéarú} = -12 \text{ mhéadar/soicind}^2, \text{ nuair atá } t = 2\end{aligned}$$

**Nóta:** is ionann méadair/soicind<sup>2</sup> agus ‘méadair in aghaidh an tsoicind in aghaidh an tsoicind’.

## Sampla 2

Fuair an stiúrthóir margaíochta ar chomhlacht áirithe amach gur féidir an t-ioncam,  $\epsilon R$ , ó líon seasta earraí táirgthe ag  $\epsilon P$  an ceann a fháil ach leas a bhaint as an bhfoirmle

$$R = 30P - 2P^2.$$

- (i) Faigh  $\frac{dR}{dP}$  agus mínígh céard is ciall leis sin.
- (ii) Ríomh  $\frac{dR}{dP}$  nuair atá  $P = 10$ .
- (iii) Cé na praghanna díola a fhágann go bhfuil an t-ioncam ag méadú?

(i)  $R = 30P - 2P^2$

$$\frac{dR}{dP} = 30 - 4P$$

Is é  $\frac{dR}{dP}$  an ráta ar a bhfuil an t-ioncam ag méadú fad is a bhaineann sé leis an bpraghás,  $P$ .

(ii)  $\frac{dR}{dP} = 30 - 4P = 30 - 4(10) = -10$ , nuair atá  $P = 10$

(iii) Tá an t-ioncam ag méadú nuair atá  $\frac{dR}{dP}$  deimhneach.

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dP} > 0 \text{ nuair atá } 30 - 4P > 0 \\ 30 > 4P \\ 4P < 30 \\ P < 7.5\end{aligned}$$

I gcás  $P < €7.50$ , méadaíonn an t-ioncam de réir mar a mhéadaíonn  $P$ .

**Nóta:** De ghnáth, glactar leis gurb é is ciall le “ráta athraithe ...” ná an ráta athraithe i leith an **ama**.

Ach ní mór gach ceist a léamh go cúramach chun na hathróga agus na rátaí ábhartha a shainaithint.

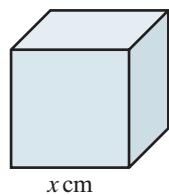
## Cleachtadh 3.5

1. Is é an gaol idir  $p$  agus  $q$  ná  $p = 2q^3 + q$ .  
Faigh ráta athraithe  $p$  i leith  $q$  nuair atá  $q = 4$ .

2. Nascann an chothromóid  $y = 2x^2 + x$  na hathróga  $x$  agus  $y$ .  
(i) Faigh ráta athraithe  $y$  i leith  $x$  nuair atá  $x = 4$ .  
(ii) Faigh luach  $x$  nuair is ionann ráta athraithe  $y$  i leith  $x$  agus 9.

3. Is é an t-achar atá i gciorcal a bhfuil ga  $r$  aige ná  $A = \pi r^2$ .  
Faigh ráta athraithe achar an chiorcail i leith an gha nuair is ionann an ga agus  
(i) 5 cm    (ii) 10 cm.

4. Scríobh síos an toirt atá i gciúb a bhfuil slios  $x$  cm air.  
 Faigh ráta athraithe na toirte i leith  $x$  nuair atá  
 (i)  $x = 10$  cm      (ii) the volume =  $125 \text{ cm}^3$ .



5. Leis an bhfoirmle seo a leanas a thugtar an daonra,  $P$ , in eastát tithíochta nua  $t$  bliain tar éis dáta ar leith:  $P = 100(5 + t - 0.25t^2)$ .  
 Faigh ráta athraithe an daonra tar éis 3 bliana.

6. Is ionann na sócmhainní ionchais,  $\€M$ , ag comhlacht nua atá beartaithe agus  $M = 200\,000 + 600t^2 - \frac{200}{3}t^3$ , áit arb é  $t$  líon na míonna tar éis bhunú an chomhlachta.
- (i) Faigh ráta fáis na sócmhainní ag  $t$  mí.
  - (ii) Faigh ráta fáis na sócmhainní nuair atá  $t = 3$ .
  - (iii) An mbeidh ráta fáis na sócmhainní cothrom le nialas ag am ar bith?

7. Leis an bhfoirmle seo a leanas a chuirtear in iúl an fad, ina mhéadair, a ghluaiseann réad in  $t$  soicind:

$$s = t^3 - 2t^2 + 3t - 4.$$

Faigh (i) an luas agus (ii) an luasghéarú nuair atá  $t = 4$ .

8. Ina líne dhíreach a ghluaiseann an réad seo sa chaoi is gurb é seo a leanas foirmle an fhaid,  $s$  méadar, a ghluaistear in imeacht  $t$  soicind:

$$s = t^3 - 4t^2 + 4t.$$

- (i) Faigh luas an réada tar éis 3 shoicind.
- (ii) Faigh luasghéarú an réada tar éis 1 soicind amháin.
- (iii) Cé mhéad soicind go dtí go mbíonn an réad ina stad ar feadh meandair?

9. Má theilgtear réad in airde, is ionann a airde ina méadair os cionn phointe an teilgin tar éis  $t$  soicind agus

$$h = 600t - 5t^2.$$

- (i) Cé mhéad soicind go stopann an réad ar feadh meandair?
- (ii) Faigh ina km an uasairde a bhaineann an réad amach.

10. Ina líne dhíreach a ghluaiseann an cáithnín  $P$ . Is é  $s = t^3 - 2t^2 + 4t$  an díláithriú ina mhéadair, tar éis  $t$  soicind, ón bpointe fosaithe O ar an líne. Ríomh
- (i) an fad ó  $P$  go dtí O ag  $t = 2$
  - (ii) na hamanna arb ionann treolusas  $P$  agus 4 mhéadar sa soicind.

- 11.** Gluaiseann cáithnín ina líne dhíreach sa chaoi is gur leis an bhfoirmle seo a fhaightear a shuíomh,  $s$  cm, fad is a bhaineann sé le O ag  $t$  soicind ( $t \geq 0$ )

$$s = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 5.$$

- (i) Cathain a bhíonn a threoluas cothrom le nialas, agus céard é a luasghéarú ag na pointí sin?
- (ii) Cathain a bhíonn a luasghéarú cothrom le nialas, agus cén treoluas a bhíonn faoi ag an am sin?

- 12.** Tá cáithnín ag gluaiseacht ina líne dhíreach. Tá sé  $x$  cm ón bpóinte O ag am  $t$  soicind ( $t \geq 0$ ), áit a bhfuil  $x = t^3 - 11t^2 + 24t - 3$ .

- (i) Cá bhfuil sé i dtosach agus cén treoluas atá faoi?
- (ii) Faigh an treoluas a bhíonn faoi ag am ar bith.
- (iii) Cé na hamanna a mbíonn an cáithnín ina stad?
- (iv) Cá mbíonn an cáithnín nuair a bhíonn sé ina stad?
- (v) Cé chomh fada is atá treoluas an cháithnín diúltach?
- (vi) Faigh a luasghéarú ag am ar bith.
- (vii) Cathain atá luasghéarú an cháithnín cothrom le nialas? Cén treoluas atá faoi agus cá bhfuil sé ag an am sin?

- 13.** Fásann líon áirithe ceall,  $n$ , i gcaitheamh méid ama  $t$  sa chaoi is go bhfuil  $n = n_0 e^{0.2t}$  áit a bhfuil  $n_0 = 5$ .

- (i) Faigh líon na gceall nuair atá  $t = 0$  agus nuair atá  $t = 10$ .
- (ii) Faigh an meánráta fáis i gcaitheamh na tréimhse  $t = 0$  go dtí  $t = 10$ .
- (iii) Faigh an ráta fáis meandrach nuair atá  $t = 5$ .

## Mír 3.6 Rátaí athraithe gaolmhara

---

Sa mhír roimhe seo, bhíomar ag plé le húsáid an díorthaigh mar thomhas ar ráta athraithe feidhme i leith na hathróige.

Má sheasann  $A = \pi r^2$  don achar i gciорcal ar ga dó  $r$ , is ionann  $\frac{dA}{dr}$  agus ráta athraithe an achar i leith  $r$ .

Ach is i leith an ama a thomhaistear formhór na rátaí athraithe i gcásanna praiticiúla.

Mar shampla, más ionann  $V$  agus an toirt,

is ionann  $\frac{dV}{dt}$  agus ráta athraithe na toirte i leith an ama.

Is minic a thugtar ráta athraithe amháin dúinn agus a iarrtar orainn ráta athraithe eile a fháil. Baintear an-leas as an gCuingrial sna cásanna sin agus muid ag iarraidh teacht ar an ráta athraithe a theastaíonn.

De réir na Cuingrialach tá  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .

Is féidir é sin a scríobh san fhoirm  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\bullet} \cdot \frac{d\bullet}{dx}$ , áit arb ionann  $\bullet$  agus athróg ar bith.

Mar shampla,  $\frac{dA}{dr} = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{dt}{dr}$

Má insítear dúinn go bhfuil  $\frac{dA}{dr} = 8$ , tá  $\frac{dr}{dA} = \frac{1}{8}$ .

Ar an gcaoi chéanna, má tá  $\frac{dV}{dt} = 6\pi$ , tá  $\frac{dt}{dV} = \frac{1}{6\pi}$ .

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\frac{dr}{dt}}$$

Tá léiriú sna samplaí seo a leanas ar mhodh réitithe fadhbanna i dtaobh rátaí gaolmhara.

### Sampla 1

Ar an ráta 2 cm/s atá méadú ag teacht ar gha ciorcail.

Faigh an ráta ar a bhfuil an t-achar ag méadú nuair atá an ga 3 cm ar fad.

Tá a fhios againn go bhfuil  $\frac{dr}{dt} = 2$  agus is é  $\frac{dA}{dt}$  atá uainn.

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dA}{dr} \\ &= 2 \cdot 2\pi r \\ &= 2 \cdot 2\pi(3) \quad \dots r = 3 \\ &= 12\pi \\ \therefore \frac{dA}{dt} &= 12\pi \text{ cm}^2/\text{s}\end{aligned}$$

Gheobhaimid  $\frac{dA}{dr}$ , ach an fhoirmle  $A = \pi r^2$  a úsáid.  
 $\Rightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r$

Beidh na céimeanna seo ina gcabhair agat agus tú ag réiteach fadhbanna i dtaobh rátaí athraithe gaolmhara.

1. Scríobh síos an ráta a theastaíonn uait, e.g.  $\frac{dA}{dt}$ .
2. Scríobh síos an ráta a thugtar duit, e.g.  $\frac{dr}{dt}$ .
3. Bain úsáid as an gCuingriail chun na rátaí sin a nascadh:  $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{\text{?}} \cdot \frac{\text{?}}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$
4. Aimsigh cothromóid a cheanglaíonn le chéile na hathróga sa ráta atá ar iarraidh, i.e.  $A = \pi r^2$ .

### Sampla 2

Leis an slonn  $V = 12h^2$  a chuirtear in iúl toirt ( $V \text{ cm}^3$ ), an uisce i gcoimeádán, áit arb ionann  $h$  agus doimhneacht an uisce.

Ar ráta seasta  $90 \text{ cm}^3/\text{s}$  atá an t-uisce ag sileadh isteach sa choimeádán.

Faigh, ina cm/s, an ráta ar a bhfuil doimhneacht an uisce ag méadú nuair atá  $h = 3$ .

Is é luach  $\frac{dh}{dt}$  atá le fáil amach againn, agus tá a fhios againn go bhfuil  $\frac{dV}{dt} = 90$ .

$$\text{Tá } \frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dh}{dV}$$

Is é luach  $\frac{dh}{dV}$  atáimid a lorg.

$$V = 12h^2 \text{ (tugtha)} \Rightarrow \frac{dV}{dh} = 24h \Rightarrow \frac{dh}{dV} = \frac{1}{24h}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dh}{dV}$$

$$= 90 \times \frac{1}{24h} = \frac{90}{24(3)} = \frac{90}{72} = \frac{5}{4} \text{ nuair atá } h = 3$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{5}{4} \text{ cm/s}$$

### Cleachtadh 3.6

1. Líon isteach an ráta atá ar iarraidh i ngach ceann díobh seo:

(i)  $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \dots$

(ii)  $\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{dt} \cdot \dots$

(iii)  $\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{ds} \cdot \dots$

2. Faigh an ráta a iarrtar i ngach ceann díobh seo:

(i)  $\frac{dA}{dt} = 8, \frac{dA}{dr} = 4, \frac{dr}{dt} = ?$

(ii)  $\frac{dV}{dt} = 8, \frac{dr}{dt} = 2, \frac{dV}{dr} = ?$

3. Má tá  $\frac{dy}{dx} = 10$  agus  $\frac{dx}{dt} = 2$ , faigh  $\frac{dy}{dt}$ .

4. Má tá  $A = \pi r^2$  agus  $\frac{dr}{dt} = 1$ , faigh  $\frac{dA}{dt}$  nuair atá  $r = 5$ .

5. Ar an ráta 3 cm/soicind atá méadú ag teacht ar gha ciorcail.  
Faigh ráta méadaithe an achair nuair atá  $r = 9$  cm.

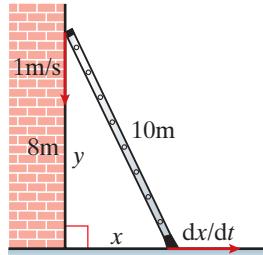
6. Ar an ráta 5 cm/s atá méadú ag teacht ar fhad an tsleasa ar chearnóg.  
Faigh ráta méadaithe an achair nuair atá an slios 10 cm ar fad.

7. Má tá  $M = (2p + 3)^4$ , faigh  $\frac{dM}{dt}$  nuair atá  $p = 1$ , given that  $\frac{dp}{dt} = 2$ .

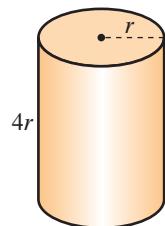
8. Má tá  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  agus  $\frac{dV}{dt} = 6 \text{ cm}^3/\text{sec}$ , faigh  $\frac{dr}{dt}$  nuair atá  $r = 3$  cm.

- 9.** Ar an ráta  $24\pi \text{ cm}^3/\text{s}$  atá méadú ag teacht ar thoirt sféir.  
Faigh ráta méadaithe an gha nuair atá sé  $6 \text{ cm}$  ar fad.
- 10.**  $40 \text{ cm}$  an fad tairiseach a bhíonn in imlíne dronuilleoige.  
Tá slíos amháin  $x \text{ cm}$  ar fad agus tá sé ag méadú ar ráta  $0.5 \text{ cm/s}$ .  
 (i) Faigh, i dtéarmaí  $x$ , slonn ar achar na dronuilleoige.  
 (ii) Faigh an ráta méadaithe ar an achar nuair atá  $x = 3 \text{ cm}$ .
- 11.** Is é seo cothromóid an riain ag liathróid áirithe:  $y = x - \frac{x^2}{40}$ ,  $x \geq 0$ .  
Má tá  $\frac{dx}{dt} = 10\sqrt{2}$  i gcás gach  $t$ , faigh  $\frac{dy}{dt}$  nuair atá  $x = 10$ .
- 12.** Tá pumpa ag líonadh balún sféarúil le haer.  
Tá ga an bhalúin ag méadú ar ráta  $1 \text{ cm/s}$  nuair is ionann fad an gha agus  $2 \text{ mhéadar}$ .  
 (i) Faigh an ráta ar a bhfuil an pumpa ag obair (i.e. ráta athraithe na toirte).  
 (ii) Má leanatar de bheith ag pumpáil an aeir ar an ráta sin, faigh ráta athraithe an gha nuair atá sé  $5 \text{ mhéadar}$  ar fad.  
 (iii) Cén ráta ar a bhfuil achar an dromchla ar an mbalún ag méadú nuair atá  $r = 5 \text{ m}$ ?

- 13.** Tá dréimire  $10 \text{ m}$  leagtha i gcoinne balla ceartingearach.  
Tá barr an dréimire ag airde  $8 \text{ m}$  suas an balla agus  
tá sé ag sleamhnú síos an balla ar ráta  $1 \text{ m/s}$ .  
Cén ráta ar a bhfuil bun an dréimire ag sleamhnú feadh  
na talún nuair atá barr an dréimire  $8 \text{ m}$  suas an balla?



- 14.** Sorcóir ciorclach ar ga dó  $r \text{ cm}$ , tá sé  $4r \text{ cm}$  ar airde,  
agus tá toirt  $V \text{ cm}^3$  ann.  
Scríobh  $V$  i dtéarmaí  $r$ , agus uaidh sin faigh slonn le haghaidh  $\frac{dV}{dr}$ .  
Tá an ga ag méadú ar ráta  $0.5 \text{ cm/s}$  nuair is ionann fad  
an gha agus  $6 \text{ cm}$ .  
Faigh an ráta méadaithe ar thoirt an tsorcóra ag an bpointe ama sin.



- 15.** A  $\text{cm}^2$  an t-achar atá i gciorcal áirithe, ga  $r \text{ cm}$  atá ann, agus imlíne  $C \text{ cm}$  air.  
Taispeáin go bhfuil  $\frac{dC}{dA} = \frac{1}{r}$ .  
Ar an ráta  $2 \text{ cm}^2/\text{s}$  atá méadú ag teacht ar achar ciorcail.  
Faigh an ráta méadaithe ar an imlíne nuair atá an ga  $3 \text{ cm}$  ar fad.

## Súil Siar 3 (Croícheisteanna)

---

1. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $y = x^2 - \frac{9}{x}$  ag an bpointe mar a bhfuil  $x = 3$ .
2. Faigh pointí cónaitheacha an chuair  $y = x^3 - 12x + 5$  agus, i gcás gach pointe, déan amach an uaspoinTE nÓ íospointe é.
3. Tá pointe cónaitheach ar an gcuar  $f(x) = x^3 - bx^2 - 9x + 7$  nuair atá  $x = -1$ .  
Faigh luach  $b$ .
4. Faigh raon na luachanna ar  $x$  a fhágann gur laghdaitheach atá an fheidhm  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ .
5. Tá an pointe  $P(x, y)$  ar an gcuar a bhfuil an chothromóid  $y = 6x^2 - x^3$  aige.
  - (i) Faigh an luach ar  $x$  a fhágann gurb ionann 12 agus grádán an tadhlaí ag  $P$ .
  - (ii) Uaidh sin, faigh cothromóid an tadhlaí ag  $P$ .
6. Gluaiseann cáithnín ina líne dhíreach, agus tar éis  $t$  soicind, tá sé  $s$  méadar ón bpointe fosaithe O, rud a shainítear san fhoirmle  $s = 2t^3 - 24t$ .
  - (i) Faigh an luas faoin gcáithnín i gceann 4 soicind.
  - (ii) Cé mhéad soicind go dtí go mbíonn an cáithnín ina stad?
7.  $y = x \sin 2x$  an chothromóid atá ag cuar.  
Faigh fána an chuair ag an bpointe ag a bhfuil  $x = \frac{\pi}{3}$ .
8. I gcás  $x + y = 100$ , cruthaigh gur uaslúach é an toradh  $P = xy$  nuair atá  $x = y$ , agus faigh an t-uaslúach ar  $P$ .
9. Tugann  $s(x) = -x^3 + 3x^2 + 360x + 5000$  garluach ar líon na mbradán atá ag snámh in aghaidh srutha in abhainn áirithe chun sceitheadh. Seasann  $x$  do theocht an uisce ina céimeanna ( $^{\circ}\text{C}$ ). (Ní bhíonn an fheidhm seo bailí ach amháin i gcás  $6 \leq x \leq 20$ .)  
Faigh an teocht uisce a fhágann go mbíonn an t-uaslón bradán ag snámh in aghaidh srutha.
10. Ar an ráta  $12 \text{ cm}^3/\text{soicind}$  atá méadú ag teacht ar thoirt ciúib.  $x \text{ cm}$  ar fad atá imeall an chiúib.  
Faigh an ráta méadaithe ar fhad imeall an chiúib nuair is ionann toirt an chiúib agus  $125 \text{ cm}^3$ .
11.  $y = x + \frac{4}{x}$  an chothromóid atá ag cuar.  
Taispeáin gur íospointe casaidh é  $(2, 4)$  agus faigh comhordanáidí an uaspoinTE casaidh.  
Faigh chomh maith tacar na luachanna ar  $x > 0$  a fhágann an cuar méadaitheach.

- 12.** Gabhann cuar  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tríd an bpointe  $(2, 24)$  agus is ionann grádán an chuaire ag an bpointe sin agus  $22$ .  
Is é  $6$  luach  $f''(x)$ .

- (i) Faigh luach  $a, b$  agus  $c$ .
- (ii) Faigh comhordanáidí na bpointí ag a dtrasnaíonn an cuar an  $x$ -ais.
- (iii) Faigh comhordanáidí an íosphointe casaidh.

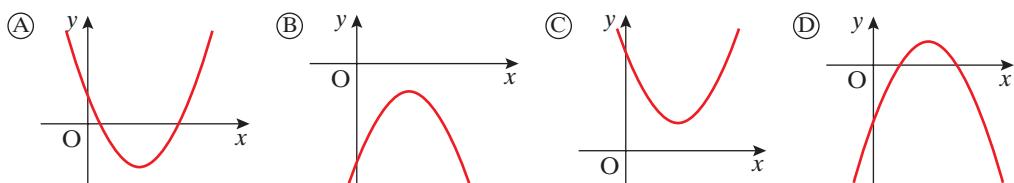
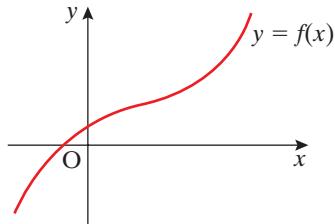
- 13.** Tá gás ag éalú as balún sféarach ar ráta  $10\pi \text{ cm}^3$  sa nóiméad.  
Cé chomh tapa is atá an ga ag laghdú nuair atá an ga  $5 \text{ cm}$  ar fad?

- 14.** Caitear teilgeán go ceartingearach anuas ón talamh. Leis an bhfoirmle  $s = 196t - 4.9t^2$  a fhaightear an fad,  $s$  méadar, os cionn na talún, áit arb é  $t$  soicind an méid ama agus é tomhaiste ó am an teilgin.  
Faigh an méid ama a thóig sé ar an teilgeán chun an uasairde a bhaint amach, agus faigh an uasairde sin.

- 15.** Tá an graf d'fheidhm chiúbach  $y = f(x)$  le feiceáil ar dheis.

Taispeánann ceann de na ceithre léaráid A, B, C, D thíos an graf de dhíorthach  $f$ .

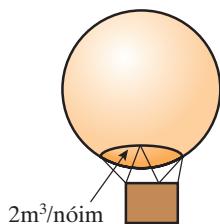
Luaigh cé acu é, agus cosain do fhreagra.



### Súil Siar 3 (Ardcheisteanna)

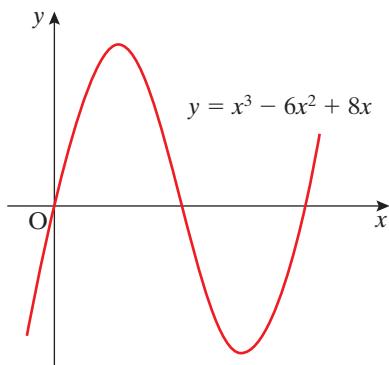
1. Faigh cothromóid an tadhlaí leis an gcuar  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$  ag an bpointe  $(2, 1)$ .
2. Faigh comhordanáidí an dá phointe ar an gcuar  $y = x^2 + \ln x$  ag a bhfuil fána an tadhlaí cothrom le  $3$ .

3. Tá aer á shéideadh isteach i mbalún te sféarúil sa chaoi is go bhfuil an toirt ann ag méadú ar ráta tairiseach  $2 \text{ m}^3$  sa nóiméad.
- Faigh ráta méadaithe an gha nuair atá  $r = 2.5 \text{ m}$ .
  - Faigh ráta méadaithe achar an dromchla nuair atá  $r = 2.5 \text{ m}$ .



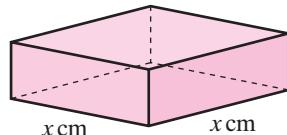
4. Sa léaráid ar dheis taispeántar sceitse den chuar a bhfuil an chothromóid  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$  aige.

- Faigh comhordanáidí na bpointí ar an gcuar ag a bhfuil grádán an tadhlaí cothrom le  $-1$ .
- Is tadhlaí leis an gcuar seo í an líne  $y = 4 - x$  ag an bpointe A. Faigh comhordanáidí A.
- Tarraing sceitse garbh de ghraf  $\frac{dy}{dx}$ .



5. Feicfidh tú ar dheis léaráid de bhosca oscailte dronuilleogach cairtchláir.  $500 \text{ cm}^3$  an toirt atá sa bhosca. Bonn cearnógach atá ar an mbosca,  $x \text{ cm}$  an slíos.

- Más  $A \text{ cm}^2$  achar an chairtchláir atá sa bhosca, taispeán gurb í an fhoirmle  $A = x^2 + \frac{2000}{x}$  a thugann an t-achar.
- Faigh íosachar an chairtchláir a úsáideadh.



6. An costas ar rud a dhéanamh, braitheann sé ar an méid ama,  $t$  uair an chloig, a chaitear i mbun oibre air.

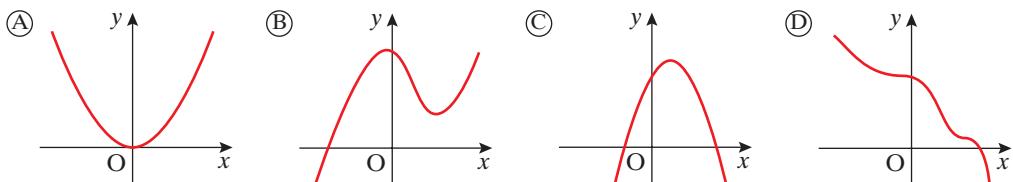
Is féidir an costas  $\text{€}C$  a shamháltú leis an gcothromóid  $\text{€}C = \frac{16}{t^3} + \frac{3t^2}{4}$ .

- Faigh ráta athraithe an chostais nuair atá  $t = 4$  uair an chloig.
- Faigh an t-íoshostas ar an rud a dhéanamh.

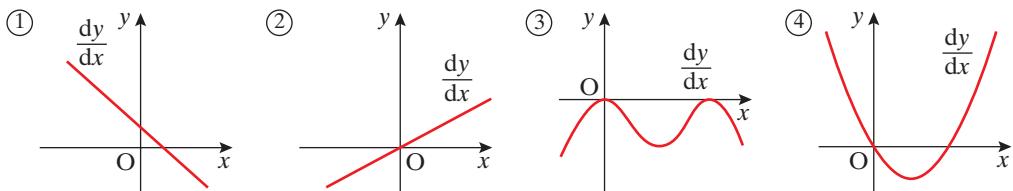
7. Má tá  $y = xe^x$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .

Uайд sin, faigh comhordanáidí phointe casaidh an chuair  $y = xe^x$  agus déan amach cé acu uaspoinnte casaidh nó íospointe casaidh é.

8. Tugtar thíos graif cheithre fheidhm A, B, C agus D.



Taispeántar thíos graif na bhfeidhmeanna fána do na ceithre fheidhm sin.  
Meaitseáil gach graf le graf na feidhme fána aige.



- 9.** Cothromóid cuair é  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Gabhann an cuar sin tríd an bpointe  $(1, 1)$  agus tá pointí casaidh air ag  $x = -1$  agus  $x = 3$ .

Faigh luach  $a, b$  agus  $c$ .

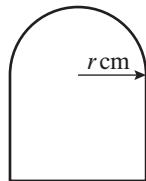
- 10.** Imlíne 40 cm atá ar línlíocht le haghaidh fuinneoige.

Barr leathchiorclach ar bhonn dronuilleogach atá ann, mar a taispeántar. Taispeán gurb í an fhoirmle

$$A = 40r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2} \text{ a thugann achar na fuinneoige, } A \text{ cm}^2. \text{ Is é } r \text{ ga an leathchiorcail.}$$

Faigh an t-uasluach ar an achar. Tabhair do fhreagra

$$\text{san fhoirm } \frac{a}{b + \pi}, a, b \in N.$$



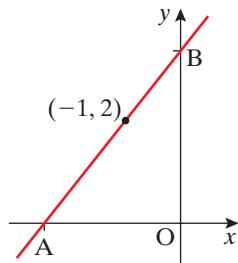
- 11.** Líne dhíreach agus fána m léi, gabhann sí tríd an bpointe  $(-1, 2)$ , trasnaíonn an  $x$ -ais ag A, agus an  $y$ -ais ag B.

Faigh, i dtéarmaí  $m$ , comhordanáidí A agus B.

- (i) Taispeán gurb í an chothromóid

$$A = \frac{(m+2)^2}{2m} \text{ a thugann achar an triantáin AOB}$$

- (ii) Uайдh sin, faigh íoslúach A.



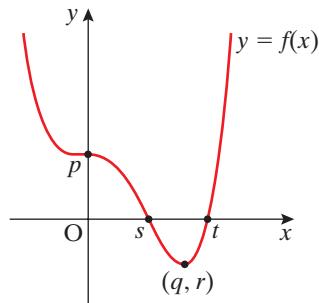
- 12.** Tá pointí cónaitheacha ag  $(0, p)$  agus ag  $(q, r)$  ar an ngraf de  $y = f(x)$  ar dheis.

Seo dhá ráiteas maidir le  $f(x)$ :

- (1)  $f(x) < 0$  i gcás  $s < x < t$   
 (2)  $f'(x) \leq 0$  i gcás  $x < q$

Cé acu seo a leanas atá fíor?

- A Níl ceachtar den dá ráiteas ceart.  
 B Níl ach ráiteas (1) ceart.  
 C Níl ach ráiteas (2) ceart.  
 D Tá an dá ráiteas ceart.



- 13.** Cothromóid cuair é  $f(x) = x^3 + 3kx^2 + 32$ ,  $k \in R$ .

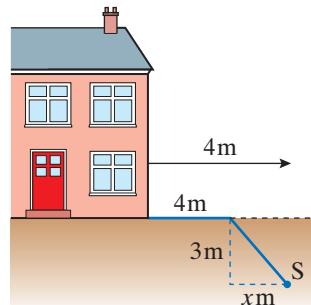
Faigh comhordanáidí an dá phointe casaidh ar an gcuar, agus scríobh comhordanáidí pointe amháin díobh sin i dtéarmaí  $k$ .

Uайд sin, faigh an luach ar  $k$  a fhágann trí fhréamh réadacha a bheith leis an gcothromóid  $f(x) = 0$ , agus dhá cheann díobh a bheith mar a chéile.

- 14.** Tá teach le nascadh ag S le soláthar gáis ón bpíomhlíne, fad 4m go cothrománach ón teach agus 3m faoi bhun an dromchla.

Cosnaíonn sé €25 sa mhéadar chun an phíblíne a leagan faoi thalamh agus €10 sa mhéadar ar an talamh.

Faigh an fad píblíne a leagtar ar an dromchla chun an costas iomlán a fósaghcdú.



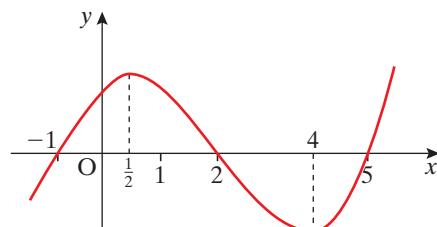
- 15.** Tá graf na feidhme  $y = f(x)$  le feiceáil ar dheis.

(i) Tarraing graf  $y = f'(x)$ .

Taispeán na háiteanna a dtrasnaíonn an graf an  $x$ -ais.

(ii) Tarraing sceitse de ghraf  $y = f''(x)$ .

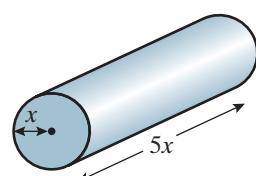
Mínigh an ceangal idir an pointe ag a dtrasnaíonn an graf seo an  $x$ -ais agus pointe suntasach ar ghraf  $y = f(x)$ .



### Súil Siar 3 (Freagraí níos faide)

- 1.** Sa léaráid seo taispeántar slat mhiotail i bhfoirm dronsorcóir ciorclach atá ag méadú de réir mar a théitear é. I gceann  $t$  soicind, is ionann ga na slaité agus  $x$  cm agus is ionann fad na slaité agus  $5x$  cm.

Tá an t-achar i dtrasghearradh na slaité ag méadú ar ráta tairiseach  $0.032 \text{ cm}^2/\text{sec}$ .



- (a) Faigh  $\frac{dx}{dt}$  nuair is é 2 cm ga na slaité. Tabhair an freagra ceart go dtí 3 fhigír bhunúsacha.
- (b) Faigh an ráta méadaithe ar thoirt na slaité nuair atá  $x = 2$ .

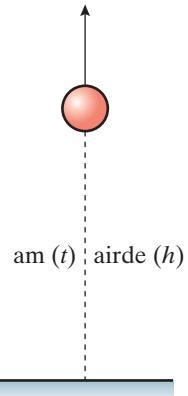
- 2.**  $x$  cm agus  $3x$  cm ar fad atá na sleasa ar bhonn bloc dronuilleogach. Is ionann suim fhaid a chuid imeall go léir agus 20 cm.

- (a) Faigh slonn, i dtéarmaí  $x$ , ar airde an bhloic.
- (b) Taispeán gur mar seo a fhaightear an toirt,  $V \text{ cm}^3$ :  $V = 15x^2 - 12x^3$ .

- (c) Cé na luachanna ar  $x$  ba chóir a chur san áireamh, i.e. faigh fearann na feidhme a bhfuil an riail  $V = 15x^2 - 12x^3$ ?
- (d) Faigh  $\frac{dV}{dx}$ .
- (e) Faigh  $\left\{x: \frac{dV}{dx} = 0\right\}$  agus uaidh sin faigh an uastoirt a d'fhéadfadh a bheith ann.

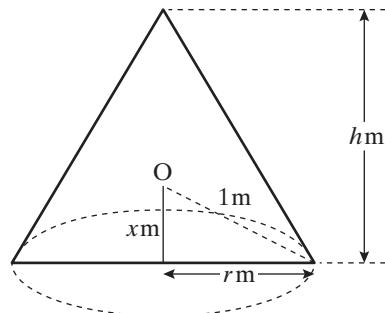
- 3.** Caitear liathróid in airde go ceartingearach. Leis an bhfoirmle  $h = 2 + 40t - 5t^2$  a fhaightear airde,  $h$  méadar, na liathróide os cionn leibhéal na talún. Tomhaistear  $t$  ina shoicindí agus tá  $t > 0$ .

- (i) Faigh ráta athraithe na hairde nuair atá  
 (a)  $t = 2$       (b)  $t = 2.5$
- (ii) Faigh an t-am a bhfuil ráta athraithe na hairde cothrom le nialas. Déan cur síos ar ghluaísne na liathróide agus í gar don luach sin ar  $t$ .
- (iii) Faigh airde na liathróide nuair is ionann ráta athraithe na hairde agus nialas.
- (iv) Faigh ráta athraithe na hairde nuair atá  $t = 6$  agus léirmhínigh an freagra.
- (v) Má thomhaiseann ráta athraithe na hairde luas na liathróide, faigh an luas ar a bhfágann an liathróid an lámh.
- (vi) Faigh luach  $t$  ceart go dtí 2 ionad dheachúlacha agus, uaidh sin, déan meastachán ar luas na liathróide agus í ag titim ar an talamh.



- 4.** Tá dronchón ciorclach istigh i sféar ar ga dó 1m, mar a thaispeántar. Tá lárphointe an sféir, O,  $x$  m ó bhonn an chóin.

- (a) Leis an bhfoirmle  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  a fhaightear toirt coín.  
 Faigh: (i)  $r$  i dtéarmaí  $x$   
 (ii)  $h$  i dtéarmaí  $x$
- (b) Taispeáin go bhfuil  $V = \frac{\pi}{3}(1 + x - x^2 - x^3)$ .

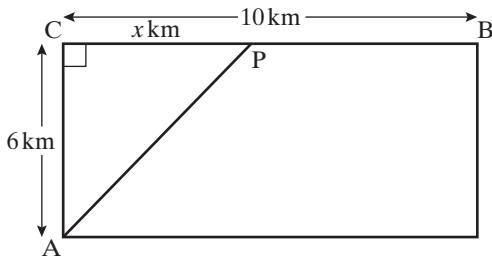


- (c) Tabhair fearann oiriúnach don fheidhm dar riail

$$V = \frac{\pi}{3}(1 + x - x^2 - x^3).$$

- (d) (i) Faigh  $\frac{dV}{dx}$ .  
 (ii) Faigh  $\left\{x: \frac{dV}{dx} = 0\right\}$ .  
 (iii) Tabhair an uastoirt a d'fhéadfadh a bheith sa chón.

5. Tá bádóir ag an bpointe A. Tá sé 6 km ón bpointe is gaire, C, ar chladach díreach. Is mian leis dul go dtí an pointe B, 10 km ó C, áit a bhfuil  $\angle ACB = 90^\circ$ . Is féidir leis rámhaíocht ag 5 km/h agus taisteal feadh an chladaigh ag 13 km/h. Rámhaíonn sé go dtí an pointe P áit a bhfuil  $|PC| = x$  km agus ansin taistealaíonn sé ar an mbóthar feadh an chladaigh go dtí B.



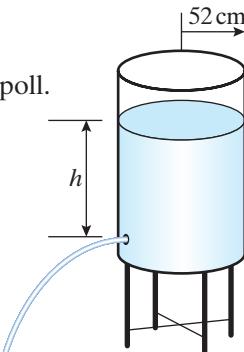
- (i) Sloinn  $|AP|$  agus  $|PB|$  i dtéarmaí  $x$ .
  - (ii) Faigh  $x$  más íosluach atá sa mhéid ama a chaitear ag dul ó A go B.
  - (iii) Ríomh an t-íosmhéid ama sin, ceart go dtí an nóiméad is gaire.
6. Bíodh dlús daonra cathrach =  $P$ . Braitheann an dlús daonra ar an nga a roghnaítear ó lárphointe na cathrach.  
I gcás cathair áirithe, tá  $P = 10 + 40r - 20r^2$ , áit a dtomhaistear  $P$  ina mhílte agus  $r$  ina chiliméadar ó lár na cathrach.
- (a) Céard é an dlús daonra ag lárphointe na cathrach?
  - (b) Céard iad na luachanna a d'fhéadfadh a bheith ar  $r$ ? (i.e. faigh fearann na luachanna ar  $r$ .)
  - (c) Sceitseáil graf de  $P$  i gcoinne  $r$ .
  - (d) Faigh  $\frac{dP}{dr}$ .
  - (e) Faigh luach  $\frac{dP}{dr}$  ag  $r = 0.5, 1$  agus  $2$ .
  - (f) Faigh an luach ar  $r$  (an fad ó lárphointe na cathrach) ag a bhfuil an dlús daonra is mó. Uайдh sin, faigh an dlús daonra i gcás an luacha sin ar  $r$ .

7. Tá poll in aice leis an mbun in umar sorcóireach oscailte d'uisce. Is é ga an umair ná 52 cm. Is ciorcal ar ga dó 1 cm é an poll. Titeann leibhéal an uisce de réir mar a éalaíonn an t-uisce tríd an bpoll.

Ar feadh tréimhse 20 nóiméad áirithe, tugtar airde dhromchla an uisce leis an bhfoirmle

$$h = \left(10 - \frac{t}{200}\right)^2$$

áit arb é  $h$  airde dhromchla an uisce, ina cm, agus é tomhaiste ó lár an phoill, agus arb é  $t$  an t-am ina shoicindí ó phointe ama áirithe  $t = 0$ .



- (a) Céard é airde an dromchla ag an am  $t = 0$ ?
- (b) Cé mhéad soicind a bheidh caite nuair a bheidh airde 64 cm ag an dromchla?
- (c) Faigh an ráta ar a bhfuil **toirt** an uisce san umar ag laghdú ag an bpointe ama áirithe nuair is é 64 cm a airde.

Tabhair do fhreagra ceart go dtí an  $\text{cm}^3$  is gaire in aghaidh an tsoicind.

- (d) Is ionann an ráta ar a bhfuil toirt an uisce san umar ag laghdú agus an luas ar a bhfuil an t-uisce ag teacht amach as an bpoll, iolraithe faoi achar an phoill. Faigh an luas ar a bhfuil an t-uisce ag teacht amach as an bpoll ag an bpointe ama nuair is é 64 cm a airde.
- (e) Taispeáin, de réir mar a athraíonn  $t$ , gur iolraí tairiseach ar  $\sqrt{h}$  é luas an uisce ag teacht amach as an bpoll.
- (f) Tá sé ar eolas againn go dtugtar luas uisce atá ag teacht amach as poll mar seo, ina cheintiméadair in aghaidh an tsoicind, leis an bhfoirmle

$$v = c\sqrt{1962h}$$

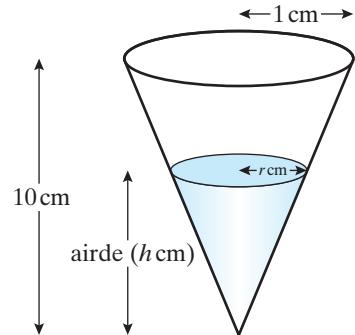
áit ar tairiseach é  $c$  a bhraitheann ar ghnéithe áirithe den pholl.

Faigh, ceart go dtí ionad deachúlach amháin, luach  $c$  i gcás an phoill seo.

- 8.** Cruth dronchón ciorclach atá ar choimeádán áirithe atá 10 cm ar airde agus a bhfuil ga a bhoinn 1 cm ar fad. Baintear úsáid as an gcoimeádán seo chun breith ar an uisce atá ag sceitheadh ó sconna.

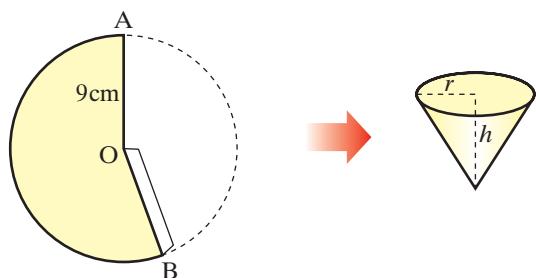
Tá an sconna ag ligean amach uisce ar ráta  $0.1 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

- (a) Scríobh cothromóid le haghaidh thoirt an uisce sa chón i dtéarmaí  $r$  agus  $h$ .
- (b) Bain leas as triantáin chomhchosúla chun gaol idir  $r$  agus  $h$  a aimsiú.
- (c) Sloinn an toirt i dtéarmaí  $h$ .
- (d) Scríobh an ráta  $0.1 \text{ cm}^3/\text{s}$  ina dhifréálach.
- (e) Agus tú ag úsáid na cuingrialach, faigh an ráta ar a bhfuil an t-uisce ag éirí nuair atá an t-uisce leath bealaigh suas an cóin.
- (f) Bain leas as an toradh in (e) thusa chun an ráta ar a bhfuil achar an dromchla ag méadú ag an bpointe sin a aimsiú.



- 9.** Baineann comhlacht úsáid as páipéar uiscedhíonach chun cupáin sho-chaite chónúla ólacháin a dhéanamh. Chun gach cupán a dhéanamh, gearrtar teascóig AOB as píosa ciorclach páipéir de gha 9 cm. Ansin ceanglaítear na himill AO agus OB chun an cupán a dhéanamh, mar a thaispeántar.

Is é gaimeall an chupáin ná  $r$ , agus is é airde an chupáin ná  $h$ .



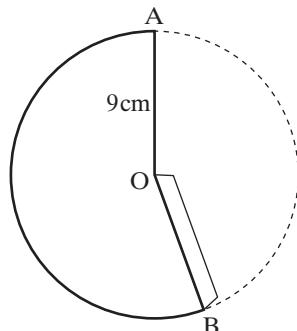
- (a) Agus  $r^2$  á shloinneadh i dtéarmaí  $h$  agat, taispeáin go dtugtar toilleadh an chupáin, ina  $\text{cm}^3$ , leis an bhfoirmle

$$V = \frac{\pi}{3}h(81 - h^2).$$

- (b) Tá dhá luach dheimhneacha ar  $h$  a fhágann gurb é  $\frac{154\pi}{3}$  toilleadh an chupáin.  
 Is slánuimhir é ceann amháin de na luachanna sin.  
 Faigh an dá luach.  
 Bíodh an réiteach neamh-shlánuimhreach ceart go dtí dhá ionad dheachúlacha.
- (c) Faigh an toirt is mó is féidir a bheith sa chupán, ceart go dtí an  $\text{cm}^3$  is gaire.
- (d) Comhlánaigh an tábla thíos chun ga, airde agus toilleadh gach ceann de na cupáin a bhí i gceist sna codanna (b) agus (c) thusas, a thaispeáint.  
 I ngach cás, bíodh an ga agus an airde ceart go dtí dhá ionad dheachúlacha.

	na cupáin i gcuid (b)	an cupán i gcuid (c)
ga ( $r$ )		
airde ( $h$ )		
toilleadh ( $V$ )	$\frac{154\pi}{3} \approx 161 \text{ cm}^3$	$\frac{154\pi}{3} \approx 161 \text{ cm}^3$

- (e) Go praiticiúil, cé acu ceann de na cupáin thusas ar a bhfuil an cruth is réasúnta mar chupán cónlúil?  
 Tabhair cúis le do fhreagra.
- (f) I gcás an chupán a roghnaigh tú i gcuid (e), faigh tomhas na huillinne AOB a chaithfear a ghearradh as an diosca ciocrach chun an cupán a dhéanamh.  
 Tabhair do fhreagra ina chéimeanna, ceart go dtí an chéim is gaire.



10. Is ar oileán iargúlta, agus ansin amháin, atá speiceas neamhchoitianta d'éan le fáil. Leis an bhfoirmle seo a thuartar daonra na n-éan,  $P$ , de réir samhail mhatamaiticiúil:

$$P = 150 + 300e^{-0.05t}$$

áit arb é  $t$  líon na mblianta ó tosaíodh ag faire.

- (a) De réir na samhla, cé mhéad éan a bhí ann nuair a tosaíodh ag faire?
- (b) De réir na samhla, cén ráta athraithe a bheidh ar dhaonra na n-éan deich mbliana ó tosaíodh ag faire.
- (c) De réir na samhla, cén luach teorantach a bheidh ar dhaonra na n-éan (i.e. de réir mar a dhruideann  $t$  le héigríoch)?
- (d) Beidh an speiceas i dteideal a bheith ar *liosta an Chiste Dhomhanda Fiadhúlra (WWF) de specis atá i mbaol* nuair a thitfidh an daonra faoi bhun 200. Cathain a tharlóidh sé sin de réir na samhla?

*Focail Thábhachtacha*

frithdhifreáil suimeáil suimeálaí ionsuimeáil tairiseach na suimeála  
 feidhm easpónantúil treolus luasghéarú suimeálaí cinnte  
 suimeálaí éiginnte meánluach feidhme eatraimh

**Mír 4.1 An fhrithdhifreáil**

Cuir i gcás an chothromóid  $y = x^2$ .

Ach an difréáil a dhéanamh, faighimid  $\frac{dy}{dx} = 2x$ .

Is é  $2x$  díorthach na feidhme  $y = x^2$ .

Is léir uaidh sin, nuair a thugtar an díorthach  $2x$ , gur féidir cothromóid na feidhme a scríobh síos, i.e.  $y = x^2$ .

An **fhrithdhifreáil** a thugtar ar an bpróiseas a bhaineann le feidhm a fháil óna díorthach.

Cuir i gcás anois na feidhmeanna seo:

$y = x^2$ ,  $y = x^2 + 1$  agus  $y = x^2 + 2$ .

Is é díorthach gach ceann de na feidhmeanna sin ná  $\frac{dy}{dx} = 2x$ , mar atá léirithe ag an líne dhearg ar dheis.

Deirtear gur **frithdhíorthaigh** de chuid  $2x$  iad na sloinn  $x^2$ ,  $x^2 + 1$  agus  $x^2 + 2$ .

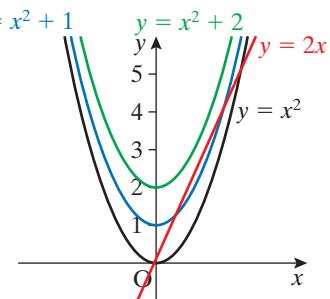
Ag tosú le  $\frac{dy}{dx} = 2x$ , dúinn, níl aon teorainn leis an méid

luachanna a d'fhéadfadh a bheith ar  $y$ , iad ar fad san fhoirm  $y = 2x + c$ , áit ar tairiseach anaithnid é  $c$ .

Bainimid úsáid as an nodaireacht  $\int 2x \, dx = x^2 + c$  chun é seo a chur in iúl: 'is é frithdhíorthach ginearálta  $2x$  i leith  $x$  ná  $x^2 + c$ '.

Is léir ó na samplaí thusas gurb ionann an **fhrithdhifreáil** agus an difréáil droim ar ais.

An **tsuimeáil** is gnách a thabhairt ar an bhfrithdhifreáil.



Más é  $f'(x)$  díorthach  $f(x)$ , tá  $\int f'(x) \, dx = f(x) + c$ .

Más é  $\frac{dy}{dx}$  díorthach  $y$ , tá  $\int \left( \frac{dy}{dx} \right) \, dx = y + c$ .

Cuir i gcásanois na feidhmeanna seo agus a gcuid díorthach:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$$

.....

Ach an próiseas sin a iompú droim ar ais, faighimid

$$\int 2x \, dx = x^2 \Rightarrow \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\int 3x^2 \, dx = x^3 \Rightarrow \int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\int 7x^6 \, dx = x^7 \Rightarrow \int x^6 \, dx = \frac{1}{7}x^7 + c$$

.....

Is léir ón bpatrún sin go bhfaighimid riail le haghaidh na suimeála ach an riail le haghaidh na difréala a iompú droim ar ais. Seo an riail le haghaidh na suimeála:

$$\text{Sa chás ginearálta: } \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

I bhfocail

Chun cumhacht de chuid  $x$  a shuimeáil, méadaigh ar an gcumhacht de 1, agus roinn an méid sin ar an gcumhacht nua.

Seo roinnt torthaí úsáideacha le haghaidh sloinn a shuimeáil, torthaí a leanann ó na torthaí comhfhireagracha le haghaidh na difréala.

1.  $\int af(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$ , is é sin gur féidir fachtóir tairiseach ar bith a thabhairt taobh amuigh de chomhartha na suimeála.
2.  $\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$  ... suimeáil gach téarma leis féin.
3.  $\int a \, dx$ , áit ar tairiseach,  $= ax + c$ , ó tá  $\frac{d}{dx}(ax + c) = a$ .

Chun feidhm,  $f(x)$ , a shuimeáil i leith  $x$ , scríobhaimid

$$\int f(x) \, dx.$$

Mar seo a deirtear é sin: ‘suimeálaí  $f(x)$  i leith  $x$ ’.

An ionsuimeáil a thugtar ar an bhfeidhm atá le suimeáil, i.e.  $f(x)$ .

### Sampla 1

Faigh (i)  $\int (3x^2 + 4x + 5) \, dx$       (ii)  $\int (2x - 1)^2 \, dx$ .

$$(i) \int (3x^2 + 4x + 5) dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 5x + c \\ = x^3 + 2x^2 + 5x + c \quad \dots \text{ná déan dearmad ar } c$$

$$(ii) \int (2x - 1)^2 dx = \int (4x^2 - 4x + 1) dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + x + c \\ = \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x + c$$

Ní san fhoirm  $ax^n$  a bhíonn cuid de na sloinn, ná ní ina suim feidhmeanna ná ina ndifríocht idir fheidhmeanna san fhoirm sin a scríobhtar iad. Is gá sna cásanna sin athrú a chur ar an ionsuimeáil sa tslí is gur san fhoirm  $ax^n$  a bheidh gach téarma.

### Sampla 2

Faigh (i)  $\int \frac{x^3 - 4x}{x} dx$     (ii)  $\int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right) dx$     (iii)  $\int \sqrt{x}(x + 4) dx$

$$(i) \int \frac{x^3 - 4x}{x} dx = \int \left(\frac{x^3}{x} - \frac{4x}{x}\right) dx = \int (x^2 - 4) dx = \frac{x^3}{3} - 4x + c$$

$$(ii) \int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right) dx = \int \left(x^3 + x^{-2} + x^{\frac{1}{2}}\right) dx \\ = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(iii) \int \sqrt{x}(x + 4) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}\right) dx \\ = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

### Tairiseach na suimeála a fháil

Tá tairiseach éiginnte c i ngach ceann de na samplaí thuas.

**Tairiseach na suimeála** is gnách a thabhairt ar an tairiseach éiginnte sin.

Gheofar amach tairiseach na suimeála ach a thuilleadh eolais a fháil ar an bhfeidhm.

Tá léiriú air sin sa sampla seo a leanas.

### Sampla 3

$y = f(x)$  an chothromóid atá ag cuar. Gabhann sé tríd an bpointe  $(2, 0)$ .

Má tá  $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ , faigh  $f(x)$ .

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (3x^2 - x^{-2}) dx \\&= \frac{3x^3}{3} - \frac{x^{-1}}{-1} = x^3 + \frac{1}{x} + c\end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + c$$

Ó tharla go bhfuil  $(2, 0)$  ar an gcuar, sásáíonn  $(2, 0)$  an chothromóid  $y = f(x)$ .

$$\Rightarrow 0 = 2^3 + \frac{1}{2} + c$$

$$\Rightarrow 0 = 8\frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -8\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = x^3 + \frac{1}{x} - 8\frac{1}{2}$$

### Cleachtadh 4.1

1. Faigh gach ceann de na suimeálaithe seo a leanas:

(i) $\int x \, dx$	(ii) $\int x^2 \, dx$	(iii) $\int (3x^2 + 4x) \, dx$
(iv) $\int -2x^2 \, dx$	(v) $\int 3 \, dx$	(vi) $\int (-x^2 + 3) \, dx$
(vii) $\int (4x^3 + 6x) \, dx$	(viii) $\int (2x^2 - 3x - 1) \, dx$	(ix) $\int 12y^2 \, dy$

2. Faigh gach ceann de na suimeálaithe seo:

(i) $\int x^{-2} \, dx$	(ii) $\int 2x^{-3} \, dx$	(iii) $\int \frac{3}{x^2} \, dx$
(iv) $\int -\frac{2}{x^3} \, dx$	(v) $\int \sqrt{x} \, dx$	(vi) $\int 3x^{\frac{1}{2}} \, dx$
(vii) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$	(viii) $\int \sqrt[3]{x} \, dx$	(ix) $\int 4\pi r^2 \, dr$

3. Suimeáil gach ceann díobh seo i leith  $x$ :

(i) $\int \left(2x^3 + \frac{3}{x^2}\right) dx$	(ii) $\int \left(\frac{4}{x^2} - 2 + x^3\right) dx$	(iii) $\int (4\sqrt{x} - 3) dx$
(iv) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$	(v) $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx$	(vi) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx$

4. Faigh  $y$  i dtéarmaí  $x$  i gcás gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x$	(ii) $\frac{dy}{dx} = 6x^3 - 4x^2 + x - 5$
--------------------------------	--

5. Faigh (i)  $\int (x - 3)^2 dx$       (ii)  $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$       (iii)  $\int \sqrt{x}(x - 3) dx$
6. Faigh (i)  $\int \frac{x^4 - 3x^3 + 4x}{x} dx$       (ii)  $\int \frac{3x^3 - x^2 + 6}{x^2} dx$       (iii)  $\int \frac{x^2 - 2x + 6}{\sqrt{x}} dx$
7. Tá an pointe  $(-1, 4)$  ar chuar a bhfuil an chothromóid  $y = f(x)$  aige.  
Má tá  $f'(x) = 2x$ , faigh cothromóid an chuair.
8. Faigh an fheidhm  $y = f(x)$  má tá  $f'(x) dx = 2x - 5$  agus má ghabhann an cuar tríd an bpointe  $(1, 7)$ .
9. Má tá  $\int (6x + 5) dx = 19$  nuair atá  $x = 2$ , faigh tairiseach na suimeála.
10. Faigh tairiseach na suimeála más ionann  $\int (6x^2 - 8x + 5) dx$  agus 7 nuair atá  $x = 2$ .
11. Faigh  $y$  i dtéarmaí  $x$  i ngach ceann díobh seo a leanas:  
 (i) Tá  $\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x$  agus  $y = 2$  nuair atá  $x = 0$   
 (ii) Tá  $\frac{dy}{dx} = 3 - x^2$  agus  $y = 2$  nuair atá  $x = 3$
12. Tá  $\frac{dV}{dt} = t^2 - t$  nuair atá  $t > 1$  agus  $V = 9$  nuair atá  $t = 3$ .  
 (i) Faigh  $V$  i dtéarmaí  $t$ .      (ii) Faigh luach  $V$  nuair atá  $t = 10$ .
13. Maidir leis an gcuar  $y = f(x)$  tá  $f'(x) = 4x + k$ , áit a bhfuil  $k$  ina thairiseach. Tá pointe casaidh ag  $(-2, -1)$  ar an gcuar.  
 (i) Faigh luach  $k$ .  
 (ii) Faigh comhordanáidí an phointe ag a mbuaileann an cuar leis an  $y$ -ais.
14. Maidir le cuar áirithe, tá  $\frac{dy}{dx} = 2x + k$ , áit a bhfuil  $k$  ina thairiseach. Gabhann an tadhlaí ag  $(3, 6)$  tríd an mbunphointe. Faigh grádán an tadhlaí sin agus déan amach uaidh sin:  
 (i) luach  $k$       (ii) cothromóid an chuair.

## Mír 4.2 Feidhmeanna easpónantúla agus triantánúla a shuimeáil

I gcaibidil 2 d'fhoghlaim tú an méid seo:

- |   |               |   |
|---|---------------|---|
| (i) Má tá $f(x) = e^x$ , tá $f'(x) = e^x$         | $\Rightarrow$ | $\int e^x dx = e^x + c$                   |
| (ii) Má tá $f(x) = e^{ax}$ , tá $f'(x) = ae^{ax}$ | $\Rightarrow$ | $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$ |
| (iii) Má tá $f(x) = a^x$ , tá $f'(x) = a^x \ln a$ | $\Rightarrow$ | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$     |

## Sampla 1

Faigh frithdhíorthach gach ceann díobh seo a leanas:

$$(i) \int e^{3x} dx \quad (ii) \int (e^{4x} + 6x) dx \quad (iii) \int (e^{5x} + 2) dx \quad (iv) \int (e^x + e^{-x}) dx$$

$$(i) \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c \quad (ii) \int (e^{4x} + 6x) dx = \frac{1}{4} e^{4x} + \frac{6x^2}{2} + c \\ = \frac{1}{4} e^{4x} + 3x^2 + c$$

$$(iii) \int (e^{5x} + 2) dx = \frac{1}{5} e^{5x} + 2x + c \quad (iv) \int (e^x + e^{-x}) dx = e^x + \frac{e^{-x}}{-1} + c \\ = e^x - \frac{1}{e^x} + c$$

## Sampla 2

Má tá  $y = 5^x$ , bain úsáid as rialacha na logartam chun  $x$  a fháil i dtéarmaí  $y$ .

Uайдh sin, faigh (i)  $\frac{dx}{dy}$       (ii)  $\frac{dy}{dx}$ .

Bain úsáid as an bhfreagra ar (ii) le taispeáint go bhfuil  $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$ .

$$\begin{aligned} y &= 5^x \\ \ln y &= x \ln 5 \quad \dots \text{faigh logartam aiceanta an dá thaobh} \\ \therefore x &= \frac{\ln y}{\ln 5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i) \quad x &= \frac{1}{\ln 5} \cdot \ln y & (ii) \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{1}{y} & &= 1 \div \frac{1}{(\ln 5)(y)} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{(\ln 5)(y)} & &= (\ln 5)(y) \\ & & &= 5^x \ln 5 \end{aligned}$$

Ó tharla go bhfuil  $\frac{dy}{dx} = 5^x \ln 5$ , tá  $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$ .

## Suimeálaithe san fhoirm $\int \sin ax$ agus $\int \cos ax$

Agus muid i mbun staidéir ar an gcalcalas difréálach, fuaireamar díorthaigh  $\sin x$ ,  $\sin mx$ ,  $\cos x$  agus  $\cos mx$ .

Bainfimid leas as na torthaí sin anois go scríobhaimid síos suimeálaithe caighdeánacha na bhfeidhmeanna triantánúla bunúsacha.

(i) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos$	$\Rightarrow$	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$
(ii) $\frac{d}{dx} \sin mx = m \cos mx$	$\Rightarrow$	$\int \cos mx \, dx = \frac{\sin mx}{m} + c$
(iii) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$	$\Rightarrow$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
(iv) $\frac{d}{dx} \cos mx = -m \sin mx$	$\Rightarrow$	$\int \sin mx \, dx = -\frac{\cos mx}{m} + c$

### Sampla 3

Faigh (i)  $\int \cos 4x \, dx$  (ii)  $\int \sin 3x \, dx$ .

$$(i) \int \cos 4x \, dx = \frac{\sin 4x}{4} + c = \frac{1}{4} \sin 4x + c$$

$$(ii) \int \sin 3x \, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + c = -\frac{1}{3} \cos 3x + c$$

### Sampla 4

Má tá  $y = \sin 3x^2$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .

Uaidh sin, faigh  $\int 6x \cos 3x^2 \, dx$ .

$$y = \sin 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos 3x^2 \times \frac{d}{dx}(3x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x \cos 3x^2$$

$$\text{Ó tharla go bhfuil } \frac{dy}{dx} = 6x \cos 3x^2 \Rightarrow \int 6x \cos 3x^2 \, dx = \sin 3x^2 + c$$

### Sampla 5

Bíodh  $h(x) = x \ln x$ ,  $x \in R, x > 0$ .

(i) Faigh  $h'(x)$ .

(ii) Uaidh sin, faigh  $\int \ln x \, dx$ .

$$(i) \quad h(x) = x \ln x$$

$$h'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \times x \quad \dots \text{1ú} \times \text{dforthach an 2ú} + 2\text{ú} \times \text{dforthach an 1ú}$$

$$h'(x) = 1 + x \ln x$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \int(1 + \ln x) dx = x \ln x \quad \dots \text{ó (i) thus} \\
 \text{Ach } & \int(1 + \ln x) dx = \int 1 dx + \int \ln x dx \\
 \therefore & \int 1 dx + \int \ln x dx = x \ln x \\
 \therefore & \int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx \\
 & = x \ln x - x \\
 \therefore & \int \ln x dx = x \ln x - x + c
 \end{aligned}$$

## Cleachtadh 4.2

1. Faigh na suimeálaithe seo a leanas:

$$\begin{array}{llll}
 \text{(i)} \quad \int e^{2x} dx & \text{(ii)} \quad \int 3e^x dx & \text{(iii)} \quad \int 2e^{4x} dx & \text{(iv)} \quad \int e^{-3x} dx
 \end{array}$$

2. Déan suimeáil ar gach ceann díobh seo a leanas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \quad \int (e^{3x} + 4) dx & \text{(ii)} \quad \int 4e^{\frac{1}{2}x} dx & \text{(iii)} \quad \int \left(e^{4x} + \frac{1}{e^{4x}}\right) dx
 \end{array}$$

3. Má tá  $y = e^{x^2}$ , scríobh síos  $\frac{dy}{dx}$ .

Uaidh sin, faigh  $\int 2x e^{x^2} dx$ .

4. Faigh gach ceann de na suimeálaithe seo a leanas:

$$\begin{array}{llll}
 \text{(i)} \quad \int \cos 3x dx & \text{(ii)} \quad \int \sin 4x dx & \text{(iii)} \quad \int -\sin 5x dx & \text{(iv)} \quad \int \cos kx dx, k \in N
 \end{array}$$

5. Déan suimeáil ar gach ceann díobh seo a leanas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \quad \int 3 \cos 6x dx & \text{(ii)} \quad \int (\cos 2x - \sin 5x) dx & \text{(iii)} \quad \int 3 \cos(-9x) dx
 \end{array}$$

6. Faigh  $\int 3(e^x - 4 \sin 3x + 2) dx$ .

7. Faigh na suimeálaithe seo a leanas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)} \quad \int (4e^{2x} + 4 \sin 3x) dx & \text{(ii)} \quad \int (3 \cos x - 2 \cos 4x) dx
 \end{array}$$

8. Má tá  $y = \cos 4x^2$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .

Uaidh sin, faigh  $\int -8x \sin 4x^2 dx$ .

- 9.** Má tá  $\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$ , bain leas as an ionannas sin chun suimeáil a dhéanamh ar gach ceann díobh seo a leanas:

$$(i) \int \frac{e^{2x} + 4}{e^x} dx \quad (ii) \int \frac{e^{x+2} + 3}{e^x} dx \quad (iii) \int \frac{1 + 3e^x}{e^{2x}} dx$$

- 10.** Faigh (i)  $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$       (ii)  $\int (3 + e^x)(2 + e^{-x}) dx$ .

- 11.** Má tá  $y = 7^x$ , bain leas as rialacha na logartam chun  $x$  a fháil i dtéarmaí  $y$ .

(i) Uaidh sin, faigh  $\frac{dy}{dx}$ .

(ii) Anois faigh  $\frac{dy}{dx}$  i dtéarmaí  $x$ .

(iii) Bain úsáid as an bhfreagra a fuair tú ar (ii) le taispeáint go bhfuil  $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + c$ .

- 12.** Má tá  $\frac{dy}{dx} = ae^{-x} + 2$ ,  $a \in R$  agus  $\frac{dy}{dx} = 5$  nuair atá  $x = 0$ .

Faigh slonn le haghaidh  $y$ , má tá  $y = -3$  nuair atá  $x = 0$ .

- 13.** Maidir le cuar áirithe, tá  $\frac{dy}{dx} = e^{kx}$ , áit a bhfuil  $k$  ina thairiseach. Gabhann an tadhlaí ag  $(1, e^2)$  tríd an mbunphointe. Faigh grádán an tadhlaí sin agus déan amach uaidh sin:

(i) luach  $k$       (ii) cothromóid an chuair.

- 14.** Bíodh  $f(x) = 2x e^x$ .

(i) Faigh  $f'(x)$ .

(ii) Uaidh sin, faigh  $\int 2x e^x dx$ .

- 15.** Má tá  $f(x) = x \sin x$ , faigh  $f'(x)$ .

Uaidh sin, faigh  $\int x \cos x dx$ .

- 16.** Bíodh  $f(x) = 4xe^{2x}$ .

(i) Faigh  $f'(x)$ .

(ii) Uaidh sin, faigh  $\int 8x e^{2x} dx$ .

- 17.** Má tá  $y = 2xe^{3x} + \cos x$ , faigh  $\frac{dy}{dx}$ .

Uaidh sin, faigh  $\int 6x e^{3x} dx$ .

## Mír 4.3 An tsuimeáil in úsáid

Agus muid i mbun staidéir ar an gcalcalas difreálach, d'fhoghlaímíomar, maidir le cothromóid ar nós

$$s = 2t^2 - 3t + 4,$$

go seasann  $s$  do dhíláithriú réada ó bhunphointe fosaithe éigin tar éis  $t$  soicind.

D'fhoghlaímíomar freisin go seasann  $\frac{ds}{dt}$  rdon luas nó treolus  $v$ .

Tugaimis  $a$  ar an luasghéarú. Is é an sainmhíniú ar luasghéarú réada ná ráta athraithe an treoluais i leith an ama,

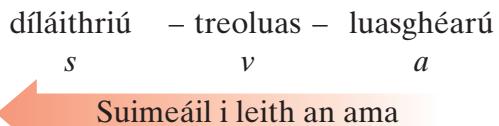
$$\text{is é sin, } \frac{dv}{dt} = a \quad \text{nó} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Dá réir sin, tá díláithriú, treolus agus luasghéarú naschta le chéile ag próiseas na difréala i leith an ama.

Nascann an tsuimeáil le chéile freisin iad ach droim ar ais a bhíonn an t-ord, i.e.  $a, v$  agus  $s$ . Ach slonn le haghaidh luasghéarú réada i leith an ama a shuimeáil, faighimid slonn le haghaidh threolus an réada.

Déantar achoimre air sin sa léaráid ar dheis.

Difréail i leith an ama



### Sampla 1

Gluaiseann réad ina líne dhíreach.

Ag am  $t$  soicind, is mar seo a fhaightear a luasghéarú:  $a = 6t + 1$ .

Nuair atá  $t = 0$ , 2 m/s an treolus atá faoin réad agus is ionann a dhíláithriú ó phointe fosaithe O agus 1 mhéadar.

- Faigh sloinn le haghaidh  $v$  agus  $s$  i dtéarmaí  $t$ .
- Faigh an treolus atá faoin réad tar éis 4 shoicind.

(i) Tá  $a = 6t + 1$ , i.e.  $\frac{dv}{dt} = 6t + 1$

$$\text{Treolus } (v) = \int(6t + 1) dt$$

$$\therefore v = \frac{6t^2}{2} + t + c, \quad \text{i.e. } v = 3t^2 + t + c$$

$$\text{Nuair atá } t = 0, \text{ tá } v = 2; \text{ mar sin, } 2 = 0 + 0 + c \quad \therefore c = 2$$

$$\text{Mar sin, } v = 3t^2 + t + 2 \quad \dots c = 2$$

$$\text{Ag úsáid } v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + t + 2$$

$$\Rightarrow s = \int (3t^2 + t + 2) dt$$

$$s = \frac{3t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t + c$$

$$s = t^3 + \frac{t^2}{2} + 2t + c$$

Nuair atá  $t = 0$ ,  $s = 1 \Rightarrow 1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$

$$\text{Mar sin, } s = t^3 + \frac{t^2}{2} + 2t + 1$$

(ii) Treolusas  $= v = 3t^2 + t + 2$

$$\Rightarrow v = 3(4)^2 + (4) + 2 \quad \dots \text{nuair atá } t = 4$$

$v = 54$  m/sec nuair atá  $t = 4$

Mar sin, tá an treolusas  $= 54$  m/s tar éis 4 shoicind.

## Cleachtadh 4.3

I gceisteanna (1–5), seasann  $s$  méadar don díláithriú fad is a bhaineann sé le pointe fosaithe O, seasann  $v$  m/s don treolusas, agus seasann  $a$  m/s<sup>2</sup> don luasghéarú.

1. Tosaíonn réad ó phointe fosaithe agus gluaiseann sé ina líne dhíreach.

Mar seo a fhaightear an treolusas atá faoi tar éis  $t$  soicind:  $v = 5t + 4$ .

- (i) Má sheasann  $s$  don fhad slí ón mbunphointe, sloinn  $s$  i dtéarmaí  $t$ , má tá  $s = 0$  nuair atá  $t = 0$ .

- (ii) Faigh fad slí an réada ón mbunphointe tar éis 4 shoicind.

2. Tá réad ag taisteal ar threolusas  $v = \frac{ds}{dt} = t^2 - 4t + 3$ .

- (i) Faigh an luasghéarú nuair atá  $t = 5$ .

- (ii) Más é  $s$  an fad slí atá déanta, sloinn  $s$  i dtéarmaí  $t$ , má tá  $s = 4$  nuair atá  $t = 3$ .

- (iii) Faigh an díláithriú nuair atá  $t = 1$ .

3. Seo mar a fhaightear luasghéarú réada:  $a = 6t - 12$ .

- (i) Faigh an treolusas  $v$  i dtéarmaí  $t$ , má tá  $v = 9$  nuair atá  $t = 0$ .

- (ii) Faigh an díláithriú  $s$  i dtéarmaí  $t$ , má tá  $s = 6$  nuair atá  $t = 0$ .

- (iii) Faigh luachanna  $t$  nuair a bhíonn an réad ina stad.

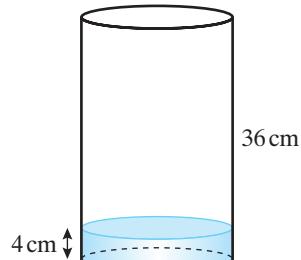
4. Is féidir luasghéarú cáithnín a shamháltú leis an gcothromóid  $a = (2t - 3)$  cm/s.

Má thosaíonn an cáithnín 2 mhéadar ón bpointe O (ag gluaiseacht amach ó O) agus más 3 m/s an luas atá faoi nuair atá  $t = 0$ , faigh

- (i) an treolusas,  $v$ , agus an díláithriú,  $s$ , i dtéarmaí  $t$

- (ii) an treolusas agus an díláithriú nuair atá  $t = 2$  shoicind.

5. Teiltgtear réad in airde go ceartingearach.  $25 \text{ m/s}$  an treoluas tosaigh atá faoi.  $-10 \text{ m/s}^2$  an luasghéarú atá faoi. Faigh
- treoluas an réada ag am ar bith i dtéarmaí an ama,  $t$
  - a airde,  $s$ , os cionn an phointe teilgin ag am ar bith
  - an méid ama a thógann sé air chun a uasairde a bhaint amach
  - an uasairde a bhaintear amach
  - an méid ama a thógann sé air chun filleadh ar an bpointe teilgin.
6. Seasann  $\frac{dN}{dt} = 4e^t + 10$  don ráta ar a méadaíonn coilínneacht baictéar, áit arb é  $N$  líon na mbaictéar agus áit a dtomhaistear  $t$  ina uaireanta an chloig.
- Faigh slonn le haghaidh  $N$  i dtéarmaí  $t$ .
  - Má bhí 10 mbaictéar sa choilínneacht i dtosach, faigh an líon sa choilínneacht tar éis 5 uair an chloig, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.
7. Tá traein ina stad sula dtosaíonn sí ar a haistear ag stáisiún A.  $2\frac{1}{2}$  nóiméad níos déanaí, gabhann sí trí stáisiún B.  
Mar seo a fhaightear an treoluas atá fúithi  $t$  soicind tar éis thuis an aistir:  
 $v = 0.6t - 0.004t^2$ , áit a sloinntear  $v$  ina mhéadair sa soicind.
- Faigh slonn in  $t$  le haghaidh an fhaid slí a thaistealaítar ó A.
  - Faigh an fad idir an dá stáisiún.
8. Mar seo a thugtar an ráta ar a n-ardaíonn leibhéal an uisce i gcoimeádán:  $\frac{dh}{dt} = 2t - 3$ , áit a dtomhaistear  $h$  ina cm agus  $t$  ina shocindí.
- Faigh foirmle le haghaidh airde an uisce sa choimeádán tar éis  $t$  soicind, má bhí 4 cm d'uisce sa choimeádán ar dtús.
  - Faigh an méid ama a thógann sé chun an coimeádán a líonadh má tá sé 36 cm ar airde.



## Mír 4.4 Suimeálaithe cinnte

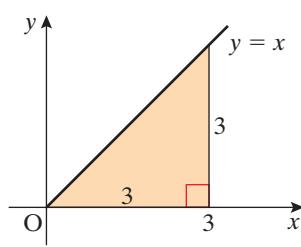
Taispeántar an líne  $y = x$  sa léaráid ar dheis.

Is é an triantán scáthaithe achar an réigiúin idir an líne  $y = x$  agus an  $x$ -ais idir na luachanna  $x = 0$  agus  $x = 3$ .

Mar sin is ionann an t-achar sin agus  $\frac{1}{2}(3)(3) = 4\frac{1}{2}$  d'aonaid chearnacha.

Is é seo cothromóid na líne:  $y = x$  nó  $f(x) = x$ .

$$\int f(x) dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$



Ach luach an tsuimeálaí sin a fháil ag  $x = 3$  agus ag  $x = 0$ , agus an dá fhreagra a dhealú ó chéile, is éard a gheobhaimid:

$$\left[ \frac{9}{2} + c \right] - \left[ \frac{0}{2} + c \right] = \frac{9}{2} + c - c = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

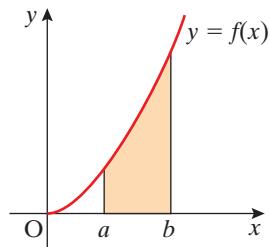
Is ionann an freagra sin agus achar an réigiún scáthaithe a fuarthas cheana ar bhealach eile ar an leathanach roimhe seo. Sampla is ea é ar an leas atá le baint as an gcalcalas suimeálach chun an t-achar idir líne nó cuar agus an  $x$ -ais a fháil.

Is ionann  $\int_0^3 f(x) dx$  agus an t-achar idir an cuar  $y = f(x)$  agus an  $x$ -axis ó  $x = 0$  go dtí  $x = 3$ .

Gheofar an t-achar ach luach an tsuimeálaí a fháil ag  $x = 3$  agus ag  $x = 0$ , agus na freagraí a dhealú ó chéile.

Mar seo a fhaightear an t-achar iniata idir an cuar  $y = f(x)$ , an  $x$ -ais agus na línte  $x = a$  agus  $x = b$ :

$$\text{Achar} = \int_a^b y dx$$



Is féidir an t-achar thusa a scríobh mar seo:

$$\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

**Nótaí:** 1. **Suimeálaí cinnte** a thugtar ar  $\int_a^b f(x) dx$  ós freagra cinnte atá air.

**Suimeálaí éiginnte** a thugtar ar  $\int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + c$  mar go bhfuil tairiseach anaithnid,  $c$ , ann.

2. **Teorainneacha na suimeála** a thugtar ar na huimhreacha  $a$  agus  $b$ ; is é  $a$  an teorainn íochtarách agus é  $b$  an teorainn uachtarách.
3. Is féidir déanamh gan tairiseach na suimeála sna suimeálaithe cinnte, ó tharla go ndéanann an dá  $c$  cealú ar a chéile le linn díúinn a bheith ag fáil luach  $f(b) - f(a)$ .

Déanfaimid staidéar níos ionláine ar achair faoi bhun cuair sa chéad mhír eile.

### Sampla 1

Faigh luach (i)  $\int_0^2 3x^2 dx$  (ii)  $\int_2^4 (x^2 - x + 3) dx$  (iii)  $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int_0^2 3x^2 dx &= \left[ \frac{3x^3}{3} \right]_0^2 = [x^3]_0^2 \\ &= [2^3] - [0] = 8 - 0 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \int_2^4 (x^2 - x + 3) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_2^4 \\
 &= \left[ \frac{64}{3} - \frac{16}{2} + 12 \right] - \left[ \frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 6 \right] \\
 &= \frac{152}{6} - \frac{40}{6} = 18\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad & \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_4^9 = [2\sqrt{x}]_4^9 \\
 &[2\sqrt{x}]_4^9 = [2\sqrt{9}] - [2\sqrt{4}] \\
 &= 6 - 4 = 2
 \end{aligned}$$

## Sampla 2

Faigh luach (i)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$       (ii)  $\int_2^5 4e^x dx$       (iii)  $\int_0^2 9^x dx$

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \left[ \frac{\sin 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left[ \frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \right] - \left[ \frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} \right] = \frac{\sin \pi}{2} - \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} \\
 &= 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \int_2^5 4e^x dx = 4 \int_2^5 e^x dx = 4[e^x]_2^5 \\
 &= 4[e^5 - e^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad & \int_0^2 9^x dx = \left[ \frac{9^x}{\ln 9} \right]_0^2 = \left[ \frac{9^2}{\ln 9} \right] - \left[ \frac{9^0}{\ln 9} \right] \\
 &= \left[ \frac{81}{\ln 9} \right] - \left[ \frac{1}{\ln 9} \right] = \frac{81}{\ln 9} - \frac{1}{\ln 9} = \frac{80}{\ln 9}
 \end{aligned}$$

## Cleachtadh 4.4

Faigh luach na suimeálaithe cinnte i gceisteanna (1–15):

- |                             |                                |                              |
|-----------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 1. $\int_1^2 6x dx$         | 2. $\int_1^3 (3x^2 - 2x) dx$   | 3. $\int_1^4 (3x^2 - 4) dx$  |
| 4. $\int_1^2 (x^3 + 2x) dx$ | 5. $\int_1^3 (x^2 - x + 1) dx$ | 6. $\int_{-1}^2 (2x - 5) dx$ |

7.  $\int_0^1 x^2(3-x) dx$

8.  $\int_1^9 \sqrt{x} dx$

9.  $\int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$

10.  $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} dx$

11.  $\int_0^2 \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x} dx$

12.  $\int_1^4 (\sqrt{x} - 2)^2 dx$

13.  $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^3} dx$

14.  $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}} dx$

15.  $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

16. Taispeáin go bhfuil  $\int_1^2 (x-1)(x-2) dx = -\frac{1}{6}$ .

17. Bain leas as fachtóirí go simpleoidh tú an slonn  $\frac{x^2 - 16}{2x + 8}$ .

Uaidh sin, faigh luach  $\int_0^1 \frac{x^2 - 16}{2x + 8} dx$ .

18. Má tá  $\int_0^k (2x - 4) dx = -3$ , faigh luach  $k$  má tá  $k > 0$ .

19. Má tá  $\int_0^k (x^2 - 3x) dx = 0$ , faigh luach  $k$  má tá  $k > 0$ .

20. Fachtóirigh  $x^3 - 8$  agus uaidh sin, faigh luach  $\int_0^2 \frac{x^3 - 8}{x - 2} dx$ .

21. Faigh luach  $n$  sa chaoi is go bhfuil  $\int_0^1 nx^2 dx = 1$ .

22. Faigh luach gach ceann de na suimeálaithe cinnte seo:

(i)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$       (ii)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$       (iii)  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin x dx$       (iv)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + 1) dx$

23. Faigh luach gach ceann díobh seo a leanas:

(i)  $\int_0^2 e^{4x} dx$       (ii)  $\int_{-1}^1 e^{x+3} dx$       (iii)  $\int_0^1 e^{\frac{x}{2}} dx$       (iv)  $\int_0^1 (e^{-2x} + 1) dx$

24. Faigh luach gach ceann de na suimeálaithe seo:

(i)  $\int_0^1 (2e^{\frac{x}{3}} + 2) dx$       (ii)  $\int_{-2}^2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$       (iii)  $\int_1^3 5^x dx$       (iv)  $\int_0^e 7^x dx$

25. Má tá  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ , taispeáin go bhfuil  $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$ .

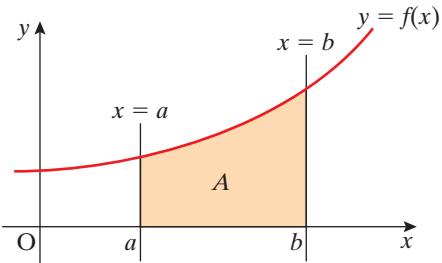
Uaidh sin, faigh  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$ .

26. Faigh  $\frac{d}{dx}(x \sin 3x)$ .

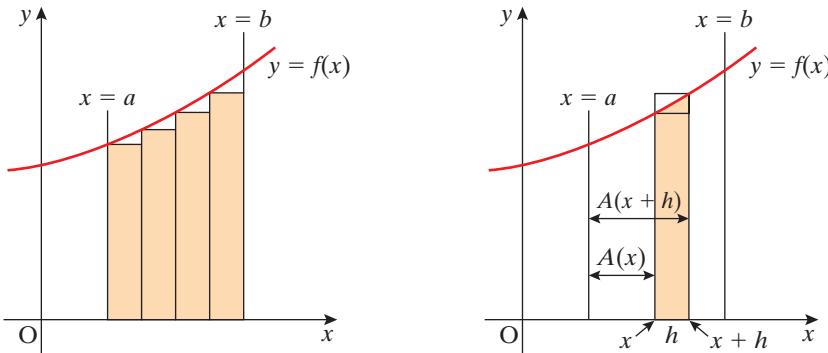
Uaidh sin, faigh luach  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 3x \cos 3x dx$ .

## Mír 4.5 Leas a bhaint as an tsuimeáil chun achair a fháil —

Is éard a thaispeánfaimid sa mhír seo an leas atá le baint as an tsuimeáil chun an t-achar  $A$  ar dheis a fháil, i.e. idir cuar,  $y = f(x)$ , agus an  $x$ -axis ó  $x = a$  go dtí  $x = b$ , rud atá le feiceáil san achar scáthaithe sa léaráid ar dheis.



Bealach amháin le meastachán a dhéanamh ar an achar is ea é a roinnt ina stíallacha, mar atá le feiceáil thíos. Ós dronuilleog a bheag nó a mhór atá i ngach stíall díobh, gheofar garluach ar  $A$  ach achair na ndronuilleog sin a shuimiú le cheile.



Féachfaimidanois ar dronuilleog amháin den sórt sin, mar atá sa léaráid thusar dheis.  
 Tugaimis  $A(x)$  ar an achar faoi bhun an chuair ó  $x = a$  go dtí  $x = x$ , agus  $A(x + h)$  ar an achar ó  $x = a$  go dtí  $x = x + h$ .

Cothrom le  $h \cdot f(x)$ , a bheag nó a mhór, atá achar na stéille caoile (scáthaithe).

$$\Rightarrow A(x + h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx f(x)$$

$$\text{De réir mar } h \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dx} = f(x)$$

$$\Rightarrow dA = f(x) dx$$

$$\Rightarrow A = \int f(x) dx$$

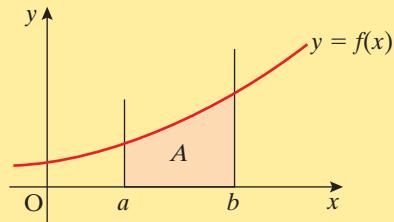
Mar sin is le suimeálaí na feidhme  $y = f(x)$  a fhaightear feidhm an achair,  $A(x)$ .

Má chuirimid  $b$  agus  $a$  in áit  $x$ , gheobhaimid an t-achar idir an cuar, an  $x$ -ais agus na línte  $x = b$  agus  $x = a$ .

An t-achar faoi bhun cuair

Mar seo a thugtar  $A$ , achar an réigiún idir an cuar  $y = f(x)$  agus an  $x$ -ais idir na línte  $x = a$  agus  $x = b$ :

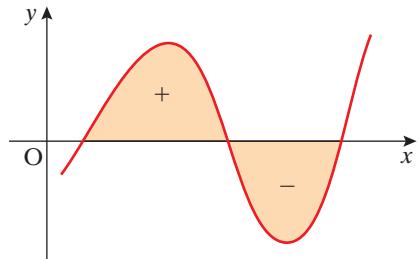
$$A = \int_a^b f(x) dx$$



Agus leas á bhaint as  $\int_a^b y dx$  chun an t-achar idir cuar agus an  $x$ -ais a fháil, leo féin a chaithfear achair na réigiún os cionn na hx-aise agus faoi bhun na hx-aise a fháil.

Má tá  $b > a$ , is luach deimhneach a bheidh ar  $\int_a^b y dx$  más os cionn na hx-aise atá an t-achar atá iniata, agus luach diúltach a bheidh air más faoi bhun na hx-aise atá an t-achar.

Más ionann an t-achar agus  $-16$ , glacaimid leis gurb é an luach deimhneach,  $16$ , an t-achar.



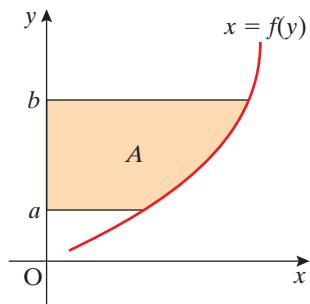
## An t-achar idir cuar agus an y-ais

Más é an t-achar idir cuar agus an y-ais a bhíonn uainn, ní foláir an fheidhm a scríobh san fhoirm  $x = f(y)$ .

Is mar seo a thugtar achar an réigiún scáthaithe idir an cuar  $y = b$  agus an y-ais idir na línte  $y = b$  agus  $y = a$ :

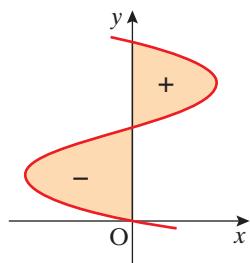
An t-achar idir cuar agus an y-ais

$$\text{Achar } A = \int_a^b x dy$$



Más ar thaobh na láimhe deise den y-ais a bhíonn an réigiún, is deimhneach a bhíonn an t-achar; más ar thaobh na láimhe clé den y-ais a bhíonn an réigiún, is diúltach a bhíonn an t-achar.

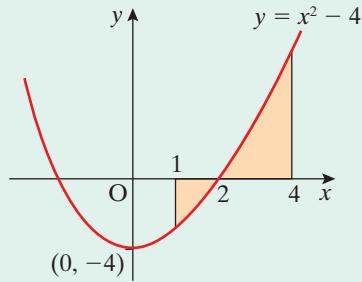
Leo féin a chaithfear achair ar thaobh na láimhe deise agus ar thaobh na láimhe clé den y-ais a fháil, agus ina dhiaidh sin iad a shuimiú le chéile.



## Sampla 1

Faigh achar an réigiún scáthaithe atá le feiceáil sa léaráid ar dheis.

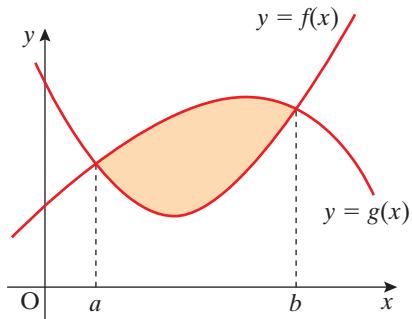
$$\begin{aligned}
 \text{Achar} &= \int_2^4 (x^2 - 4) dx + \int_1^2 (x^2 - 4) dx \\
 &= \left[ \frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^4 + \left[ \frac{x^3}{3} - 4x \right]_1^2 \\
 &= \frac{64}{3} - 16 - \left( \frac{8}{3} - 8 \right) + \left[ \left( \frac{8}{3} - 8 \right) - \left( \frac{1}{3} - 4 \right) \right] \\
 &= \frac{64}{3} - 16 - \left( -\frac{16}{3} \right) + \left[ -\frac{16}{3} - \left( -\frac{11}{3} \right) \right] \\
 &= \frac{64}{3} - 16 + \frac{16}{3} + \left[ -\frac{16}{3} + \frac{11}{3} \right] \\
 &= \frac{80}{3} - 16 + \left[ -\frac{5}{3} \right] \quad \dots \text{ós diúltach atá an t-achar faoi bhun na hx-aise, tógaimid luach} \\
 &\qquad \text{deimhneach } \left[ -\frac{5}{3} \right] \\
 &= \frac{32}{3} + \left| -\frac{5}{3} \right| = \frac{32}{3} + \frac{5}{3} = \frac{37}{3} = 12\frac{1}{3} \text{ aonad cearnach.}
 \end{aligned}$$



## An t-achar idir dhá chuar

Sa léaráid ar dheis taispeántar dhá chuar  $y = f(x)$  agus  $y = g(x)$  agus iad ag trasnú a chéile ag na pointí ag a bhfuil  $x = a$  agus  $x = b$ .

$$\text{Tá an t-achar scáthaithe} = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$



## Sampla 2

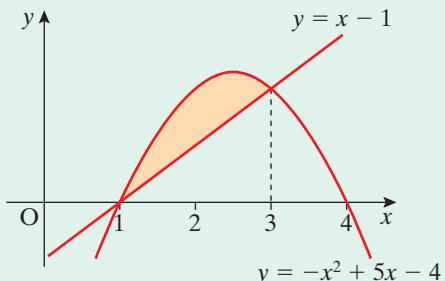
Faigh achar an réigiún atá á theorannú ag an cuar  $y = -x^2 + 5x - 4$  agus ag an líne  $y = x - 1$ .

Cuar cearnach is ea an cuar  $y = -x^2 + 5x - 4$  agus uasphointe casaidh air, ó tharla comhéifeacht  $x^2$  a bheith diúltach.

$$\begin{aligned}y = 0 &\Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \\&\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \\&\Rightarrow (x - 4)(x - 1) = 0 \\&\Rightarrow x = 4 \text{ nó } x = 1 \\∴ \text{ Ag } x = 4 \text{ agus ag } x = 1. \\&\text{ a thrasnaíonn an cuar an } x\text{-ais.}\end{aligned}$$

Tá sceitse garbh ar dheis den chuar.

Le cothromóidí comhuaineacha a gheobhaimid amach pointe trasnaithe an chuair agus na líne.



$$\begin{aligned}y = -x^2 + 5x - 4 \text{ agus } y = x - 1 \\&\Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = x - 1 \\&\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\&\Rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = 1\end{aligned}$$

Mar sin is ag na pointí  $x = 1$  agus  $x = 3$  a thrasnaíonn an cuar an líne.

Ní gá na luachanna comhfhreagracha ar  $y$  a fháil.

Is é an t-achar scáthaithe an t-achar idir an cuar agus an  $x$ -ais idir  $x = 3$  agus  $x = 1$ , lúide an t-achar idir an líne agus an  $x$ -ais idir  $x = 3$  agus  $x = 1$ .

$$\begin{aligned}\text{Achar} &= \int_1^3 (-x^2 + 5x - 4) dx - \int_1^3 (x - 1) dx \\&= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^3 - \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 \\&= \left[ \left( -9 + 22\frac{1}{2} - 12 \right) - \left( -\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right) \right] - \left[ \left( 4\frac{1}{2} - 3 \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \right] \\&= \left[ 1\frac{1}{2} + 1\frac{5}{6} \right] - \left[ 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \\&= 1\frac{1}{3} \text{ aonad cearnach}\end{aligned}$$

### Sampla 3

Léaráid atá ar dheis de sceitse

$$\text{den fheidhm } y = \frac{2}{x^2}.$$

Is éard atá i gceist leis an réigiún scáthaithe ná an t-achar atá á theorannú ag an gcuar agus ag an  $x$ -ais idir na línte  $x = 3$  agus  $x = 1$ .

Má dhéanann an líne  $x = k$  dhá chuid chothroma den achar sin, faigh luach  $k$ .

$$A_1 = A_2$$

$$\Rightarrow \int_k^3 \frac{2}{x^2} dx = \int_1^k \frac{2}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int_k^3 2x^{-2} dx = \int_1^k 2x^{-2} dx$$

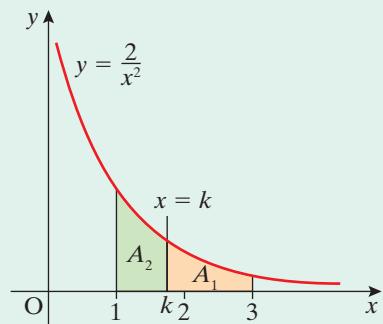
$$\Rightarrow \left[ \frac{2x^{-1}}{-1} \right]_k^3 = \left[ \frac{2x^{-1}}{-1} \right]_1^k$$

$$\Rightarrow \left[ -\frac{2}{x} \right]_k^3 = \left[ -\frac{2}{x} \right]_1^k$$

$$\Rightarrow \left( -\frac{2}{3} \right) - \left( -\frac{2}{k} \right) = \left( -\frac{2}{k} \right) - \left( -\frac{2}{1} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} + \frac{2}{k} = -\frac{2}{k} + 2$$

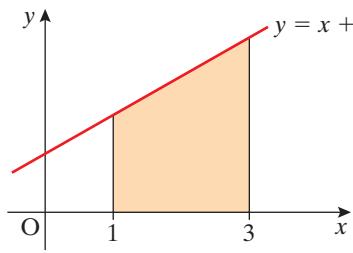
$$\Rightarrow \frac{4}{k} = 2\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{k} = \frac{8}{3} \Rightarrow 8k = 12 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$



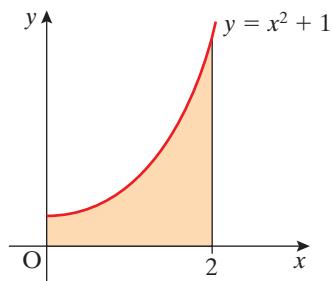
### Cleachtadh 4.5

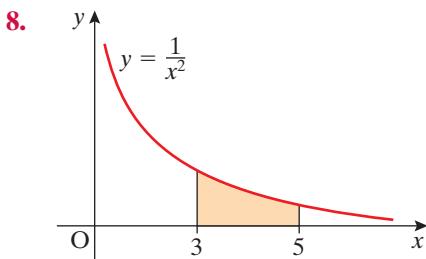
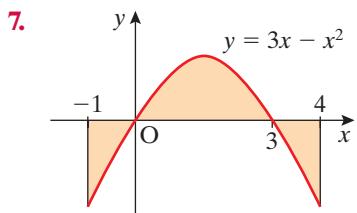
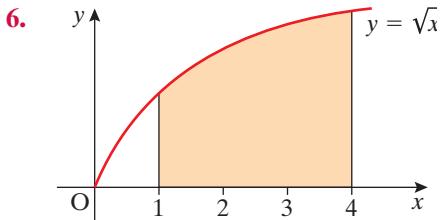
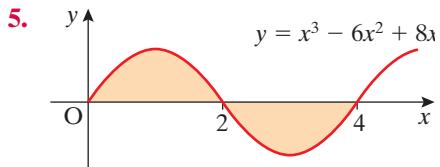
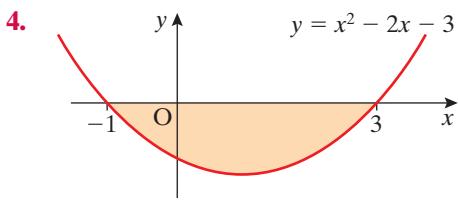
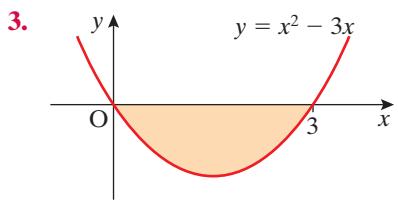
Faigh achar an réigiún scáthaithe i gceisteanna (1–8):

1.

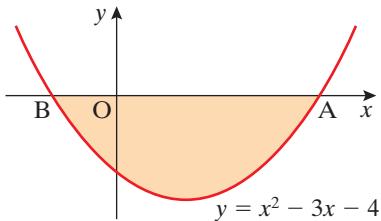


2.

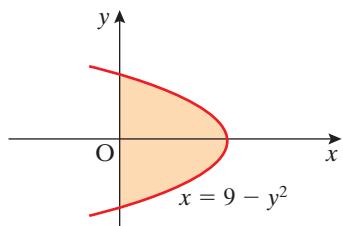




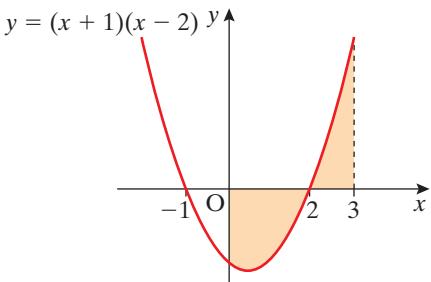
9. Trasnaíonn an cuar  $y = x^2 - 3x - 4$  an  $x$ -ais ag na pointí A agus B.  
Faigh comhordanáidí A agus B agus, uaidh sin, faigh achar an réigiúin scáthaithe.



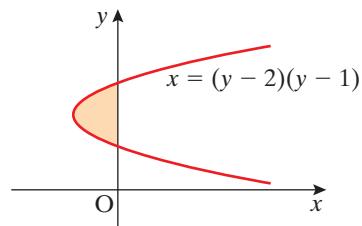
10. Faigh comhordanáidí na bpointí ag a dtrasnaíonn an cuar  $x = 9 - y^2$  an  $y$ -ais.  
Uaidh sin, faigh achar an réigiúin scáthaithe.



11. Faigh an t-achar iomlán atá iniata idir an cuar  $y = (x + 1)(x - 2)$ , an  $x$ -ais agus na línte  $x = 0$  agus  $x = 3$ .

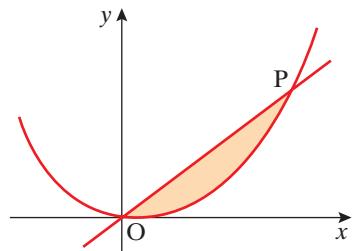


- 12.** Bain úsáid as an tsuimeáil chun an t-achar atá iniata idir an cuar  $x = (y - 2)(y - 1)$  agus an y-ais a fháil.

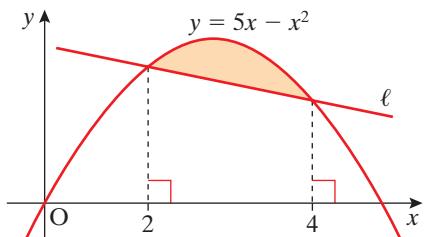


- 13.** Taispeántar sa léaráid ar dheis an cuar  $y = x^2$  agus an líne  $y = 2x$  agus iad ag trasnú a chéile ag an bpointe P.

- Faigh comhordanáidí P.
- Uaidh sin, faigh an t-achar atá á theorannú ag an gcuar agus ag an líne.

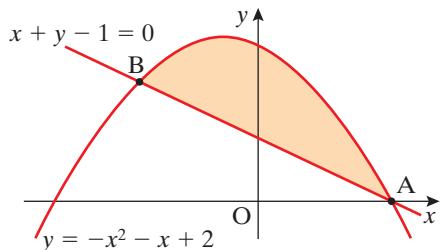


- 14.** Faigh achar an réigiúin atá iniata ag an gcuar  $y = 5x - x^2$  agus ag an líne  $\ell: x + y - 8 = 0$ .



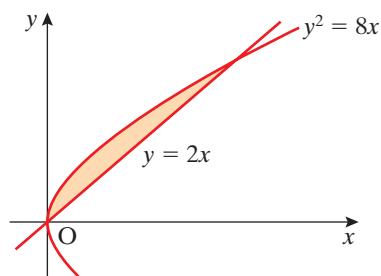
- 15.** Léaráid atá ar dheis den chuar  $y = -x^2 - x + 2$  agus den líne  $x + y - 1 = 0$ . Ag na pointí A agus B a thrasnaíonn an líne an cuar.

- Faigh comhordanáidí A agus B.
- Faigh achar an réigiúin scáthaithe.



- 16.** Léaráid atá ar dheis den chuar  $y^2 = 8x$  agus den líne  $y = 2x$ .

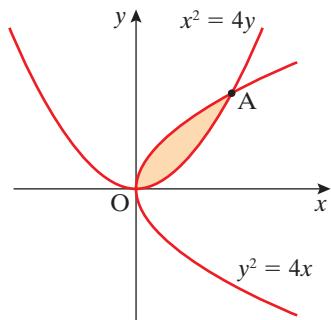
Faigh pointí trasnaithe na líne agus an chuairt agus, uaidh sin, faigh an t-achar atá iniata ag an líne agus ag an gcuar.



- 17.** Sceitse atá ar dheis de na cuair

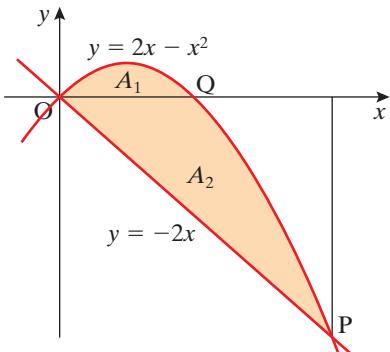
$$y^2 = 4x \text{ agus } x^2 = 4y.$$

- (i) Faigh comhordanáidí an phointe A.
- (ii) Faigh achar an réigiúin scáthaithe atá iniata ag an dá chuar.

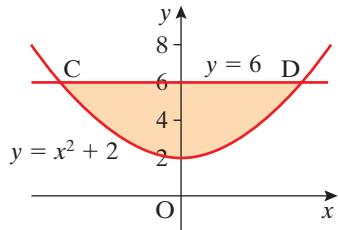


- 18.** Léaráid atá ar dheis den chuar  $y = 2x - x^2$  agus den líne  $y = -2x$  atá ag trasnú a chéile ag an mbunphointe agus ag an bpointe P.

- (i) Faigh comhordanáidí P agus Q.
- (ii) Ríomh achar  $A_1$  agus achar  $A_2$  go ríomhfaidh tú achar an réigiúin scáthaithe.

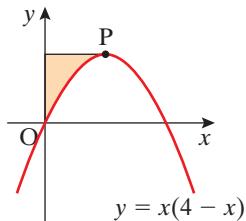


- 19.** Taispeántar sa léaráid ar dheis cuid den chuar  $y = x^2 + 2$  agus den líne  $y = 6$ . Ag na pointí C agus D a thrasnaíonn an líne an cuar.
- (i) Faigh comhordanáidí C agus D.
  - (ii) Faigh achar an réigiúin atá á theorannú ag an gcuar agus ag an líne [CD].



- 20.** Is é an pointe P uasphointe ghraf an chuairt  $y = x(4 - x)$ .

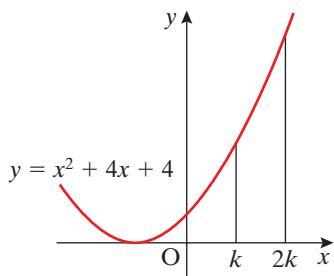
- (i) Faigh comhordanáidí P.
- (ii) Faigh achar cuí idir an cuar agus an  $x$ -ais agus, uaidh sin, faigh achar an réigiúin scáthaithe.



- 21.** Léaráid de chuid den chuar  $y = x^2 + 4x + 4$  atá ar dheis.

An t-achar atá á theorannú ag an gcuar, ag an  $x$ -ais agus ag na línte  $x = 0$  agus  $x = 2k$ , tá a cheithre oiread ann leis an achar atá á theorannú ag an gcuar, ag an  $x$ -ais agus ag na línte  $x = 0$  agus  $x = k$ .

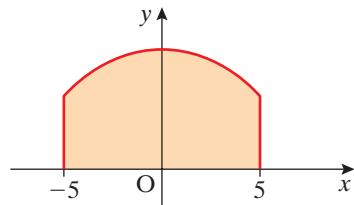
Faigh luach  $k$  i bhfoirm surda.



- 22.** Taispeántar sa léaráid an trasghearradh ceartingearach trí thollán atá 14 m ar fad. Is stua é an díon.

Leis an gcothromóid seo a shamhaltaítear an stua:  
 $y = 6 - 0.08x^2 - 0.0006x^4$ .

- (i) Faigh achar an trasghearrtha.  
(ii) Faigh toirt an tolláin.

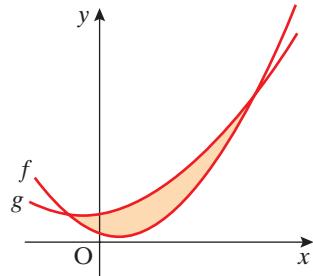


- 23.** Is mar seo a shainítear na feidhmeanna  $f$  agus  $g$  i gcás  $x \in R$ :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2 \text{ agus}$$

$$g(x) = x^2 + x + 7.$$

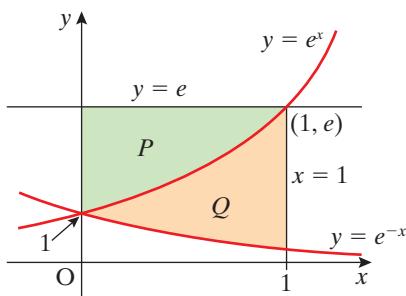
- (i) Faigh comhordanáidí an dá phointe ag a dtrasnaíonn na cuairt  $y = f(x)$  agus  $y = g(x)$  a chéile.  
(ii) Faigh achar an réigiún atá iniata idir an dá chuar.



- 24.** San fhíor ar dheis taispeántar cuid de ghraf  $y = e^x$  agus de ghraf  $y = e^{-x}$ .

Taispeántar freisin dhá réigiún iniata,  $P$  agus  $Q$ .

- (i) Faigh achar an réigiún  $P$ .  
(ii) Faigh achar an réigiún  $Q$  i dtéarmaí  $e$ .



## Mír 4.6 Meánluach feidhme

Is ionann **luach** na feidhme  $y = f(x)$  agus **y-luach** na feidhme i gcás aon  $x$ -luach ar leith.

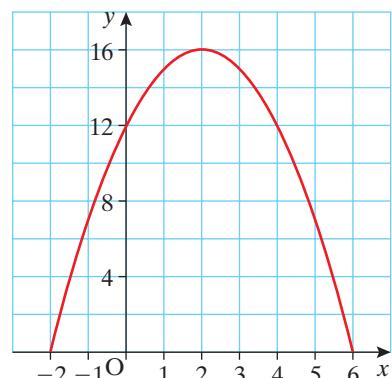
Tá an fheidhm  $y = -x^2 + 4x + 12$  grafta ar dheis.

Ón ngraf, feicimid go bhfuil

$$f(1) = 15, f(2) = 16, f(3) = 15, \dots$$

Is mar seo a thugtar **meánluach** na feidhme sin ó  $x = 0$  go dtí  $x = 6$ :

$$\frac{f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)}{7}$$



... eatraimh de 1 aonad a thógáil.

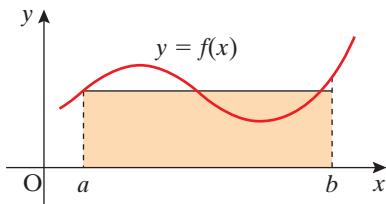
Gheobhaimis freagra níos cruinne ach eatraimh níos lú feadh na hx-aise a thógáil.

Is féidir **meánluach beacht** feidhme a fháil ach leas a bhaint as an tsuimeáil.

Is mar seo a shainítear meánluach na feidhme  $y = f(x)$  i gcás an eatraimh  $[a, b]$ .

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

I dtéarmaí ghraf  $y = f(x)$ , is é an meánluach ná airde na dronuilleoige arb ionann a hachar agus an t-achar faoi bhun an chuair i gcás an eatraimh  $[a, b]$ .



Is ionann meánluach na feidhme  $f(x)$  thar an eatramh  $[a, b]$  agus

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

### Sampla 1

Tá graf na feidhme  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  le feiceáil.

Faigh meánluach na feidhme i gcás  $1 \leq x \leq 4$ .

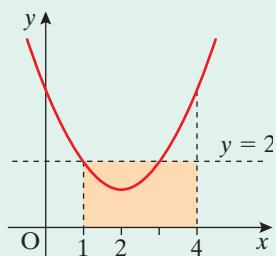
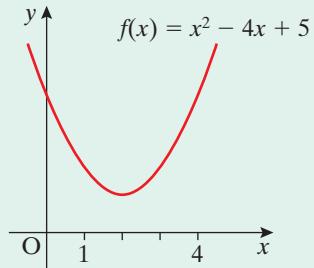
Tarraing líne chothrománach chun an meánluach sin a léiriú agus mínígh an chiall atá léi.

$$\begin{aligned} \text{Meánluach} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{1}{4-1} \int_1^4 (x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x \right]_1^4 = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{64}{3} - 32 + 20 \right) - \left( \frac{1}{3} - 2 + 5 \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ \left( 9\frac{1}{3} \right) - \left( 3\frac{1}{3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3}[6] = 2 \end{aligned}$$

$\therefore$  An meánluach = 2

Léiríonn an líne  $y = 2$  an meánluach.

Is ionann achar na dronuilleoige scáthaithe agus an t-achar idir an cuar agus an  $x$ -ais ó  $x = 1$  go dtí  $x = 4$ .



## Sampla 2

Tosaíonn réad ó bheith ina stad agus gluaiseann sé ina líne dhíreach.

Tar éis  $t$  soicind is mar seo a thugtar an treolus ( $v$ ) atá faoi:  $v = 2t - 4, t \geq 0$ .

- (i) Comhlánaigh an tábla ar dheis go bhfaighidh tú an meán-treolus i gcaitheamh an chéad 3 shoicind.

$t =$	0	1	2	3
$v =$				

- (ii) Bain leas as an tsuimeáil chun cruinneas an fhreagra a fuair tú a thástáil.

(i)	$t =$	0	1	2	3
	$v =$	-4	-2	0	2

$$\text{Meán-treolus} = \frac{-4 - 2 + 0 + 2}{4} = -1 \text{ cm/s} \quad \dots \text{cé go bhfuil } t = 3 \text{ shoicind, ceithre léamh a tógadh.}$$

- (ii) Is ionann meánlúach feidhme,  $f(x)$ , agus  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

$$\begin{aligned} \text{Meán-treolus} &= \frac{1}{3-0} \int_0^3 (2t - 4) dt \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{2t^2}{2} - 4t \right]_0^3 = \frac{1}{3} [t^2 - 4t]_0^3 \\ &= \frac{1}{3} [(3^2 - 4(3)) - (0 - 0)] \\ &= \frac{1}{3}[9 - 12] = \frac{1}{3}[-3] = -1 \text{ m/sec} \end{aligned}$$

Sa chás seo freisin is ionann an meán-treolus agus  $-1$  m/s.

Is é seo an fíor-mheán-treolus; ní thugann an chéad mhodh ach meastachán. Bhí an meastachán ceart sa sampla seo.

### Sampla 3

Is ionann meánlúach na feidhme  $f(x) = 2x + 3$  i gcás  $1 \leq x \leq k$  agus 11. Faigh luach  $k$ .

$$\begin{aligned}\text{Meánlúach} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{k-1} \int_a^b (2x+3) \, dx \\ &= \frac{1}{k-1} \left[ \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_1^k \\ &= \frac{1}{k-1} [(k^2 + 3k) - (1 + 3)] \\ &= \frac{1}{k-1} [k^2 + 3k - 4]\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{k-1} (k^2 + 3k - 4) = 11 \quad \dots \text{tá an meánlúach, 11, againn.}$$

$$\therefore k^2 + 3k - 4 = 11(k-1)$$

$$k^2 - 8k + 7 = 0$$

$$(k-7)(k-1) = 0$$

$$k = 7 \text{ nó } k = 1$$

$$\therefore k = 7 \quad \dots \text{is é } k = 1 \text{ an dara teorainn agus tá sé againn cheana.}$$

### Cleachtadh 4.6

1. Ar dheis tá graf na feidhme

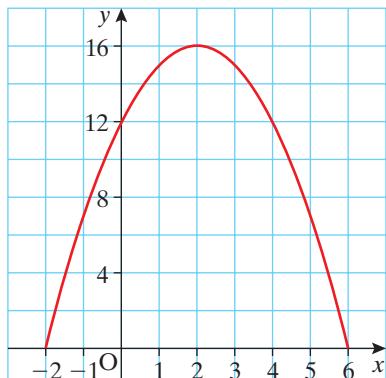
$$f(x) = -x^2 + 4x + 12.$$

(i) Léigh luach  $f(0), f(1), \dots, f(6)$  go bhfaighidh tú meánlúach na feidhme san eatramh

$$0 \leq x \leq 6.$$

(ii) Bain leas as an tsuimeáilanois chun meánlúach  $f(x)$  san eatramh  $[0, 6]$  a fháil.

(iii) Cé acu den dá mhodh a thugann an meastachán is fearr?



2. Faigh meánlúach gach ceann de na feidhmeanna seo san eatramh a thugtar:

(i)  $f(x) = 2x - 4$  san eatramh  $2 \leq x \leq 5$ .

(ii)  $f(x) = x^2 - x$  san eatramh  $0 \leq x \leq 2$ .

(iii)  $f(x) = 2x - x^2$  san eatramh  $0 \leq x \leq 2$ .

3. Faigh meánluach na feidhme  $f(x) = x^3$  i gcás  $0 \leq x \leq 4$ .
4. Faigh meánluach na feidhme  $f(x) = x^2 + 4$  i gcás  $-2 \leq x \leq 3$ .
5. Faigh meánluach gach ceann de na feidhmeanna seo a leanas i gcás na n-eatramh a luaitear:
- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| (i) $f(x) = \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ | (ii) $f(x) = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ |
| (iii) $f(x) = e^x, x \in [0, 3]$              | (iv) $f(x) = e^{4x}, x \in [0, 2]$    |
6. Is ionann meánluach na feidhme  $f(x) = x + 1$  i gcás  $2 \leq x \leq k$  agus 8.  
Faigh the value of  $k$ .
7. Is ionann meánluach na feidhme  $f(x) = x^3$  i gcás  $0 \leq x \leq k$  agus 16.  
Faigh luach  $k$ .
8. Faigh meánluach gach ceann de na feidhmeanna seo san eatramh a thugtar:
- |   |  |
|---|--|
| (i) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , i gcás $1 \leq x \leq 5$ | (ii) $f(x) = 5 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ , i gcás $0 \leq x \leq 2\pi$ |
|---|--|
9. Is ionann toirt,  $V$  cm<sup>3</sup>, an uisce i soitheach cóinéil agus  $V = \frac{\pi h^3}{12}$ , áit arb é  $h$  cm doimhneacht an uisce.  
Faigh meántoirt an uisce sa soitheach de réir mar a mhéadaítear ar an doimhneacht ó 2 cm go dtí 8 cm.
10. Ina stad atá réad nuair a thosaíonn sé ag titim. Is ionann an treolusas atá faoi, ina mhéadair sa soicind, ag  $t$  soicind agus  $v = 9.8t$ . Faigh meán-treolusas an réada i gcaitheamh an chéad 3 shoicind dá ghluaisne.
11. Is mar seo a thugtar an treolusas  $v$ , ina m/s, atá faoi réad  $t$  soicind tar éis don chlog a bheith curtha ar siúl:  $v = 3t^2 - 4$ .
- (i) Faigh an meán-treolusas i gcaitheamh an eatraimh  $t = 1$  go dtí  $t = 3$ .
  - (ii) Faigh an meán-luasghéarú i gcaitheamh an eatraimh  $t = 1$  go dtí  $t = 3$ .
12. Treolusas  $v = 5 - (t - 3)^2$ , atá faoi cháithnín, áit a dtomhaistear  $v$  ina mhéadair sa soicind.
- (i) Faigh meán-treolusas an cháithnín sa chéad 6 shoicind.
  - (ii) Cén t-am/Cé na hamanna a mbeidh an meán-treolusas sin faoi?
- 
13. Braitheann an teannas,  $T$  niútan, i lingeán áirithe ar shíneadh,  $x$  méadar, an lingeáin óna fhad nádúrtha de réir na rialach  $T = 30x$ .  
Faigh an meánteannas sa lingeán de réir mar a mhéadaítear ar  $x$  ó 0.1 m go dtí 0.2 m.

- 14.**  $y = x^{-\frac{1}{2}}$ , an chothromóid atá ag cuar. Faigh
- meánluach  $\frac{1}{y}$ , i leith  $x$ , san eatramh  $1 \leq x \leq 4$
  - achar an réigiún  $R$  atá á theorannú ag an gcuar, ag an  $x$ -ais agus ag na línte  $x = 1$  agus  $x = 4$ .
- 15.** Mais gáis ina bhfuil toirt  $v$ , ag brú  $p$ , leathnaíonn sí de réir an dlí  $pv^{\frac{3}{4}} = 30$ . Faigh an meánbhrú agus an gás ag leathnú ó  $v = 1$  go dtí  $v = 16$ .
- 16.** Caitear réad in airde go ceartingearach. Is ionann an treolusas atá faoi tar éis méid ama  $t$  agus  $v = 40 - 10t$ , áit a bhfuil  $v$  ina mhéadair sa soicind. Faigh an meán-treolusas idir  $t = 1$  agus  $t = 3$ .

## Súil Siar 4 (Croícheisteanna)

---

- Faigh gach ceann de na suimeálaithe seo a leanas:
 

(i) $\int(2x + 5) dx$	(ii) $\int(3x^2 - 2x + 4) dx$	(iii) $\int(x^2 + \frac{1}{x^2}) dx$
-----------------------	-------------------------------	--------------------------------------
- Suimeáil gach ceann díobh seo:
 

(i) $\int \sin 3x dx$	(ii) $\int \cos 5x dx$	(iii) $\int(2 \sin x + 3 \cos 2x) dx$
-----------------------	------------------------	---------------------------------------
- Faigh gach ceann de na suimeálaithe seo:
 

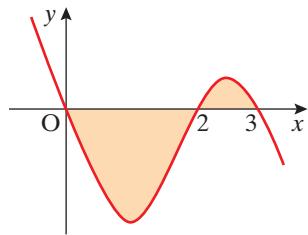
(i) $\int e^{5x} dx$	(ii) $\int(e^{2x} + e^{-x}) dx$	(iii) $\int(4 + e^{3x}) dx$
----------------------	---------------------------------	-----------------------------
- Má tá  $\frac{dy}{dx} = x^2 - 3x + 2$ , faigh  $y$ .
- Faigh gach ceann díobh seo:
 

(i) $\int \left(\frac{x^3 - 2}{x^2}\right) dx$	(ii) $\int(\sqrt{x} - 3) dx$	(iii) $\int(\sqrt{x} + 3)^2 dx$
--	------------------------------	---------------------------------
- Faigh luach gach ceann de na suimeálaithe seo:
 

(i) $\int_0^3 (2x^2 - 4x + 1) dx$	(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$	(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 3\theta + \sin 3\theta) d\theta$
-----------------------------------	--	--
- Taispeáin go bhfuil  $\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{16}{15}$ .
- Faigh luach gach ceann de na suimeálaithe cinnte seo:
 

(i) $\int_0^3 (e^{2x} + 1) dx$	(ii) $\int_0^2 2e^{-2x} dx$	(iii) $\int_1^2 \left(e^{2x} + \frac{4}{x^2}\right) dx$
--------------------------------	-----------------------------	---

9. Faigh achar beacht na réigiún atá iniata ag graf  $y = x(2 - x)(x - 3)$  agus ag an  $x$ -ais.



10. Gabhann an cuar  $y = f(x)$  tríd an bpointe  $(1, 3)$ .

Má tá  $\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 12x$ , faigh  $f(x)$ .

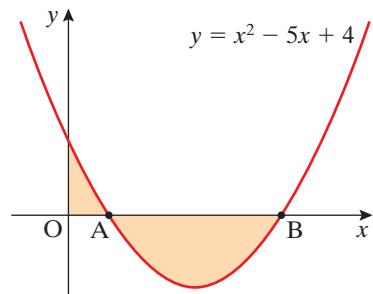
11. Faigh meánluach na feidhme  $f(x) = 2x^2 - x$  thar an eatramh  $[0, 4]$ .

12. Tá  $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - x$  agus tá  $y = 5$  nuair atá  $x = 0$ .

Faigh slonn le haghaidh  $y$  i dtéarmaí  $x$ .

13. Trasnaíonn an cuar  $y = x^2 - 5x + 4$  an  $x$ -ais ag A agus ag B, mar atá le feiceáil sa léaráid ar dheis.

- (i) Faigh comhordanáidí A agus B.  
(ii) Faigh achar iomlán na réigiún scáthaithe.



14. Tá cáithnín ag gluaiseacht ina líne dhíreach.  $v$  m/s an treolus atá faoi tar éis  $t$  soicind, áit a bhfuil  $v = 6t + 12t^2$ .

Faigh (i) an meán-treolus i gcaitheamh an chéad dá shoicind de ghluaisne  
(ii) an meán-luasghéarú idir  $t = 1$  agus  $t = 5$ .

15. Má tá  $f(x) = x \sin 2x$ , faigh  $f'(x)$ .

Bain úsáid as do fhreagra chun  $\int 2x \cos 2x \, dx$  a fháil.

## Súil Siar 4 (Ardcheisteanna)

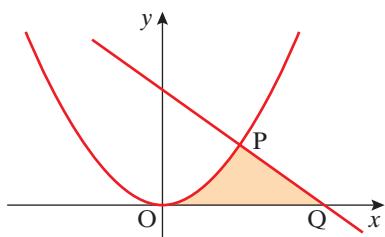
1. (i) Faigh luach  $\int_1^3 (9x^2 - 4x) \, dx$ .

(ii) Má tá  $\int_0^a (9x^2 - 4x) \, dx = 0$ , faigh luach féideartha  $a$  nuair atá  $a > 0$ .

2. Faigh meánluach na feidhme  $f(x) = (x + 3)(2x - 5)$  san eatramh  $[1, 5]$ .

3. Léaráid atá ar dheis den chuar  $y = x^2$  agus den líne dhíreach  $2x + y = 15$ .

- (i) Faigh comhordanáidí P agus Q.  
(ii) Faigh achar an réigiúin scáthaithe.

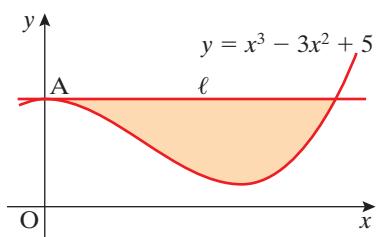


4. Is ionann toirt,  $V \text{ cm}^3$ , an uisce i mbabhla leathsféarúil agus  $V = \frac{1}{3}\pi(30h^2 - h^3)$ , áit arb é  $h \text{ cm}$  doimhneacht an uisce. Faigh meántoirt an uisce sa bhabhla de réir mar a mhéadaítear ar an doimhneacht ó 0 go dtí 4 cm.

5. Tá cuid den chuar  $y = x^3 - 3x^2 + 5$  le feiceáil ar dheis.

Is uasphointe logánta ar an gcuar é an pointe A agus is tadhlaí leis an gcuar ag A é  $\ell$ .

Faigh comhordanáidí A agus, uaidh sin, faigh an t-achar idir an líne agus an cuar.

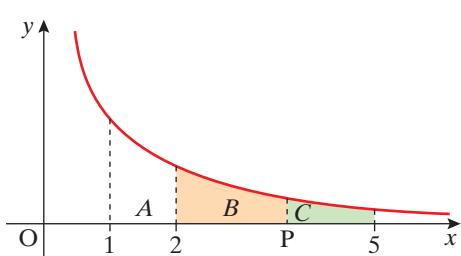


6. Tá  $\frac{dy}{dx} = ae^{-x} + 1$  agus freisin tá  $\frac{dy}{dx} = 3$  nuair atá  $x = 0$ .

Má tá  $y = 5$  nuair atá  $x = 0$ , faigh luach  $y$  nuair atá  $x = 2$ .

7. Léaráid atá ar dheis de chuid den chuar  $y = \frac{10}{x^2}$ .

- (i) Faigh achar an réigiúin A.  
(ii) Faigh an luach ar P a fhágann go bhfuil réigiún B agus réigiún C ar comhachar.



8. Tá cruth na feidhme seo a leanas ar dhíon halla taispeántais:

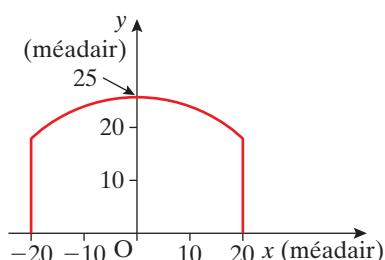
$$f(x) = 25 - 0.02x^2, \text{ for } -20 \leq x \leq 20.$$

Tá an halla 80 méadar ar fad.

Tá trasghearradh den halla le feiceáil ar dheis.

Is mian le comhlacht aerchóirithe toirt an halla a fháil ionas go mbeifear in ann córas oiriúnach a shuiteáil.

Faigh an toirt sin.

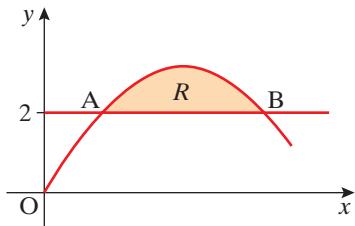


- 9.** Bíodh  $f(x) = x^2 \ln 3x$ , i gcás  $x \in R, x > 0$ .

- Faigh  $f'(x)$ .
- Uайдh sin, faigh  $\int 2x \ln 3x \, dx$ .

- 10.** Léaráid atá ar dheis den réigiún scáthaithe  $R$  atá á theorannú ag an gcuar  $y = -2x^2 + 5x$  agus ag an líne  $y = 2$ . Is iad na pointí A agus B pointí trasnaithe na líne agus an chuair.

- Faigh comhordanáidí na bpointí A agus B.
- Faigh achar beacht  $R$ .



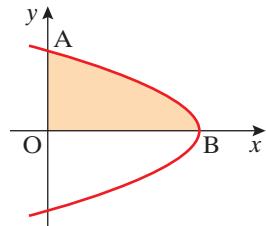
- 11.** 10 kg an meáchan atá i réad áirithe agus  $k$  giúl a fhuinneamh cinéiteach. Braitheann an fhuinneamh cinéiteach sin ar an treolus,  $v$  m/s, de réir na rialach  $k = 5v^2$ . Faigh an meánfhuinneamh cinéiteach sa réad agus  $v$  ag méadú ó 1 m/s go dtí 7 m/s.

- 12.** Tosaíonn cáithnín ó bheith ina stad agus é 3 mhéadar ó phointe fosaithe O. Gluaiseann sé ina líne dhíreach faoi luasghéarú  $a$ . Is leis an bhfoirmle  $a = 6t + 10$  a thugtar an luasghéarú, áit arb é  $t$  an t-am ina shoicindí.

- Faigh an treolus  $v$  tar éis 5 shoicind.
- Sloinn a shuíomh,  $s$ , ón bpointe fosaithe O i dtéarmaí  $t$ .
- Cé mhéad méadar ó O atá an cáithnín tar éis 3 shoicind?
- Faigh an meánluas ó  $t = 1$  go dtí  $t = 4$ .

- 13.** Tá graf  $y^2 = 9(1 - x)$  le feiceáil ar dheis.

- Faigh comhordanáidí A agus B.
- Faigh luach  $\int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{9}\right) dy$  agus luach oriúnach ar  $b$  in úsáid agat, go bhfaighidh tú achar beacht an réigiún scáthaithe.

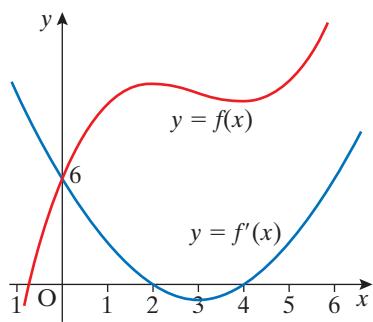


- 14.** Taispeántar dhá graf sa léaráid: feidhm chiúbach,  $y = f(x)$  agus feidhm na fána,  $y = f'(x)$ .

Tá an pointe  $(0, 6)$  ar an dá graf.

Gabhann graf  $y = f'(x)$  trí na pointí  $(2, 0)$  agus  $(4, 0)$  freisin.

- Má tá  $f'(x)$  san fhoirm  
 $f'(x) = k(x - a)(x - b)$ ,
- scríobh síos luach  $a$  agus luach  $b$
- faigh luach  $k$ .
- Faigh cothromóid na feidhme  $y = f(x)$ .



15. Seo mar a thugtar grádán cuair:  $\frac{dy}{dx} = ax + \frac{b}{x^2}$ .

Má ghabhann an cuar tríd an bpointe  $(-1, -4)$  agus má tá pointe casaidh air ag  $(1, 0)$ , faigh cothromóid an chuair.

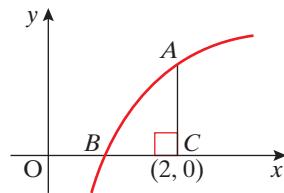
## Súil Siar 4 (Freagraí níos faide)

1. Léaráid atá ar dheis de chuid den chuar ag a bhfuil

$$\text{an cothromóid } y = x - \frac{1}{x^2}.$$

Is é C an pointe  $(2, 0)$ .

Faigh:



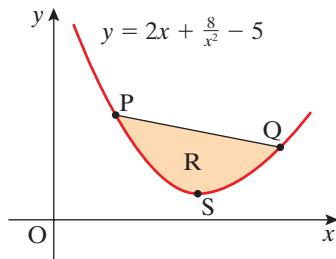
- (a) cothromóid an tadhlaí leis an gcuar ag an bpointe A
- (b) comhordanáidí an phointe T ag a mbuaileann an tadhlaí sin leis an x-ais
- (c) comhordanáidí an phointe B ag a mbuaileann an cuar leis an x-ais
- (d) achar an réigiún atá iniata ag an gcuar agus ag na línte AT agus BT
- (e) cóimheas an achair a fuair tú i gcuid (d) le hachar an triantáin ATC.

2. Léaráid atá ar dheis de chuid den chuar, C, ag a bhfuil

$$\text{an cothromóid } y = 2x + \frac{8}{x^2} - 5, x > 0.$$

Tá na pointí P agus Q ar C agus tá na hx-chomhordanáidí 1 agus 4 acu faoi seach.

Tá an réigiún R, atá scáthaithe sa léaráid, á theorannú ag C agus ag an líne dhíreach a cheanglaíonn P agus Q.

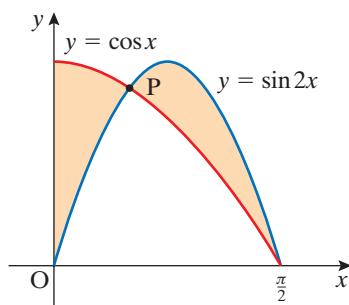


- (a) Faigh achar beacht R.
- (b) Bain leas as an gcalcalas le taispeáint go bhfuil y ag méadú i gcás  $x > 2$ .
- (c) Faigh comhordanáidí phointe casaidh, S, an chuair.
- (d) Tarraingítear línté cothrománacha trí na pointí P agus S.

Faigh an t-achar atá iniata ag an gcuar, ag an y-ais agus ag an dá líne sin trí achair chuí idir an cuar, an dá líne cothrománacha sin agus an x-ais a chur le chéile.

3. Léaráid atá ar dheis de ghraif na bhfeidhmeanna  $y = \cos x$  agus  $y = \sin 2x$ .

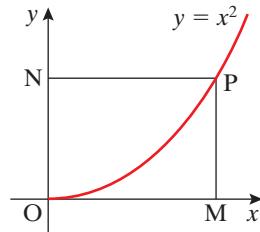
- (a) Faigh x-chomhordanáid an phointe P ag a dtrasnaíonn an dá chuar a chéile.
- (b) Uайдh sin, faigh achar an réigiún scáthaithe.



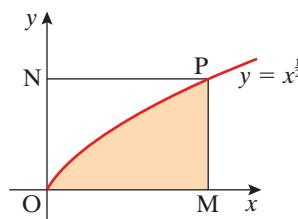
4. I gcaitheamh stoirme, sníonn uisce isteach i ndabhach 7000 lítear ar ráta  $\frac{dV}{dt}$  lítear sa nóiméad, áit a bhfuil  $\frac{dV}{dt} = 120 + 26t - t^2$  agus áit arb é  $t$  an méid ama ina nóiméid ón uair a thosaigh an stoirm.

- (a) Cé na hamanna a bhfuil an dabhach á líonadh ar dhá oiread an ráta tosaigh?  
 (b) Faigh toirt an uisce atá tar éis sní isteach sa dabhach ó thuis na stoirme mar fheidhm de chuid  $t$  má tá  $V = 0$  nuair atá  $t = 0$ .  
 (c) 1500 lítear d'uisce atá sa dabhach i dtosach. Nuair a chríochnaíonn an stoirm, 30 nóiméad tar éis di tosú, tá an dabhach ag cur thar maoil.  
 Cé mhéad lítear d'uisce atá caillte?

5. (a) San fhíor, is pointe ar an gcuar  $y = x^2$  é P.  
 Cruthaigh go roinneann an cuar an dronuilleoig OMPN ina dhá réigiún a bhfuil a gcuid achar sa chóimheas 2 : 1.



- (b) San fhíor, is pointe ar an gcuar  $y = x^{\frac{1}{2}}$  é P.  
 Cruthaigh gurb ionann achar an réigiún scáthaithe agus dhá thrian d'achar na dronuilleoige OMPN.

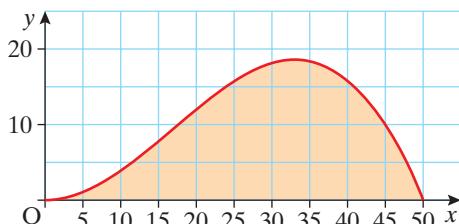


- (c) Is pointe ar an gcuar  $y = x^n$  é P. Is é PM an t-ingear ó P go dtí an x-ais agus is é PN an t-ingear ó P go dtí an y-ais. Maidir le hachar an réigiún atá iniata idir PM, an x-ais agus an cuar, cruthaigh gurb ionann é agus  $\frac{1}{n+1}$  d'achar na dronuilleoige OMPN.

6. Tairiseach atá san achar i dtrsagharradh mullóg mhór cré. Leis an gcothromóid  $y = \frac{x^2}{1000}(50 - x)$ ,

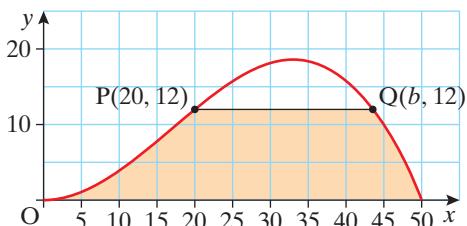
a thugtar an trasghearradh, áit arb é y airde na mullóige ina méadar ag fad  $x$  méadar ón imeall.

- (a) Faigh airde na mullóige nuair atá:  
 (i)  $x = 10$  m      (ii)  $x = 40$  m.  
 (b) Faigh fána an chuair theorann  $y = \frac{x^2}{1000}(50 - x)$  nuair atá:  
 (i)  $x = 10$  m      (ii)  $x = 40$  m.



- (c) (i) Faigh an luach ar  $x$  a fhágann gur uasluach í airde na mullóige  
(ii) Faigh uasairde na mullóige.
- (d) Faigh an t-achar i dtrasghearradh na mullóige.
- (e) Tá barr na mullóige le baint, mar atá le feiceáil sa léaráid.  
(i) Tá na comhordanáidí  $(20, 12)$  ag an bpointe P.  
Faigh comhordanáidí Q.  
(ii) Faigh na luachanna ar  $a, b$  agus R a fhágann gurb ionann an t-achar atá le baint

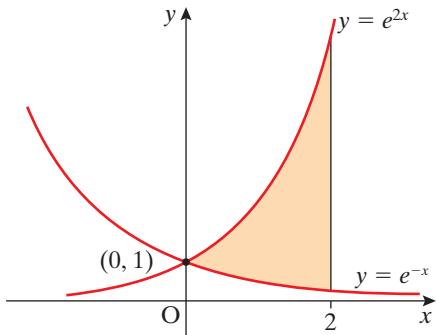
$$\text{ag barr na mullóige agus } \int_a^b \frac{x^2}{1000} (50 - x) dx = R.$$



7. (a) Bíodh  $f(x) = 1 + e^x$ .

Taispeán go bhfuil  $f(x) \times f(-x) = f(x) + f(-x)$ .

- (b) Faigh  $y$  i dtéarmaí  $x$  má tá  $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - e^{2x}}{e^x}$  agus má tá  $y = 4$  nuair atá  $x = 0$ .  
(c) Trasnáonn na cuair  $y = e^{2x}$  agus  $y = e^{-x}$  a chéile ag an bpointe  $(0, 1)$ , mar atá le feiceáil sa léaráid.



Faigh an t-achar beacht atá iniata ag na cuair agus ag an líne  $x = 2$ .

# Freagraí

## Caibidil 1: Feidhmeanna

### Cleachtadh 1.1

1. Tá dhá aschur éagsúla ag an ionchur 2, i.e., 5 agus 10
2. (i) Is feidhm é  
(ii) Ní feidhm é, mar go bhfuil dhá aschur éagsúla ag -2  
(iii) Is feidhm é
3. (i) Is ea  
(ii) Ní hea, mar go bhfuil dhá aschur éagsúla ag an ionchur  $a$   
(iii) Ní hea, mar go bhfuil dhá aschur éagsúla ag an ionchur 9  
(iv) Is ea
4.  $(-1, 6), (0, -4), (1, -2), (2, 0), (3, 2)$ ; Raon =  $\{-6, -4, -2, 0, 2\}$
5. (i) 4      (ii) 11      (iii)  $3k - 2$       (iv)  $6k - 5$
6. (i) 4      (ii) 36      (iii) 36  
(iv)  $a^2 - 4a + 4$
7.  $k = \frac{8}{9}$
8.  $k = \frac{1}{3}$
9. (i)  $x = \pm\sqrt{2}$       (ii)  $x = 15$       (iii)  $x = -1, 1\frac{1}{2}$
10. (i)  $\frac{1}{2}; 11$       (ii) 2      (iii)  $\frac{5}{2}$
11. (i)  $-4k - 3$       (ii)  $k = -4$
12. (i)  $x = -\frac{8}{3}$       (ii)  $x = 1$       (iii)  $x = \frac{13}{18}$
13. (i)  $x = -1, 3$       (ii)  $x = -2, 3$       (iii)  $x = 1$
14. (i) Is ea      (ii) Is ea      (iii) Is ea  
(iv) Ní hea      (v) Is ea      (vi) Ní hea  
(vii) Is ea      (viii) Is ea      (ix) Ní hea
15. (A) agus (5); (B) agus (6); (C) agus (1); (D) agus (2);  
(E) agus (2); (F) agus (4)
16. (i) Fearann =  $\mathbb{R}$ ; Raon =  $[-2, \infty)$   
(ii) Fearann =  $(-\infty, 2]$ ; Raon =  $\mathbb{R}$   
(iii) Fearann =  $(-2, 3)$ ; Raon =  $[0, 9)$   
(iv) Fearann =  $(-3, 1)$ ; Raon =  $(-6, 2)$   
(v) Fearann =  $[-4, 0]$ ; Raon =  $[0, 4]$   
(vi) Fearann =  $\mathbb{R}$ ; Raon =  $(-\infty, 4)$
17. Is feidhmeanna iad (i), (iii), (iv) agus (vi)
18.  $k = 2$
19.  $p = -2, q = 1; x = 1$
20. (i)  $-3b + c = -9$  agus  $c = -3$   
(ii)  $b = 2, c = -3$   
(iii)  $D = (1, 0)$

### Cleachtadh 1.2

1. (i) 10      (ii) 19      (iii) 5      (iv) 26

- (v) 101      (vi) 9      (vii) 33      (viii) 1
2. (i) 7      (ii) 25      (iii) -21  
(iv)  $8x + 1 ; 3$
3. (i) 11      (ii) 2      (iii)  $2x^2 + 3$   
(iv)  $4x^2 - 4x + 3 ; x = 0, 2$
4. (i)  $2^{4x+2}$       (ii)  $3 + 2^{x+1}$
5.  $12x^2 + 12x + 3 ; a = -1, 0$
6. (i)  $4x - 3; 4x + 3$       (ii) -9
7. (i)  $c = 2$       (ii)  $m = -1$
8.  $s = 1, t = 2$
9.  $\frac{1}{2}$
10. (i)  $hf(x) = \log_2(x^2 - x + 10)$ ;  
 $hg(x) = \log_2(5 - x)$   
(ii)  $x = 3$ , mar go bhfuil  $x > 0$  (tá log uimhir dhiúltach neamhshainithe)
11. (i)  $4x + 9$       (ii)  $8x + 21$   
(iii)  $16x + 45 ; f^n(x) = 2^n x + 3(2^n - 1)$
12.  $-2x^2 - 1 \neq 4x^2 - 4x + 2$ ; níl comhshuíomh feidhmeanna cómhalartach
13. Tá; tá an dá cheann cothrom le  $x$
15. (i)  $f(x) = x^2$  agus  $g(x) = 3x - 1$   
(ii)  $f(x) = \frac{1}{x}$  agus  $g(x) = 5x + 3$   
(iii)  $f(x) = x^2, g(x) = \sin x, k(x) = 3x$   
(iv)  $f(x) = 2x, g(x) = \sqrt{x}, h(x) = \cos x$
16.  $2^{4x+2} ; x = 1$
17.  $f(r) = \frac{5t}{4} ;$   
(i)  $f(A) = \pi r^2$       (ii)  $f(A) = \pi \left(\frac{5t}{4}\right)^2$
18. (i) Seasann an fheidhm seo do 4% de dhíolachán.  
(ii) Seasann an fheidhm seo do luach na ndíolachán sa bhareis ar €4000;  
seasann  $fg(x) = 0.04(x - 4000)$  don mheánchoimisiún seachtainiúil; €160

### Cleachtadh 1.3

1. (a) (i) Is feidhm é  $f$   
(ii) Níl  $f$  inteilgeach  
(iii) Níl  $f$  barrtheilgeach  
(b) (i) Is feidhm é  $g$   
(ii) Tá  $g$  barrtheilgeach  
(iii) Tá  $g$  barrtheilgeach;  
Tá comhfhreagairt bheacht aon-le-haon idir na baill in A agus in B; mar sin, tá sé détheilgeach
2. (i) Is feidhm é      (ii) Níl      (iii) Níl  
(iv) Níl sé inteilgeach agus barrtheilgeach araoon
3. (a) Barrtheilgeach

## Téacs & Trialacha 7

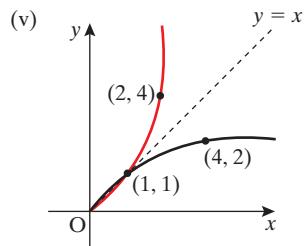
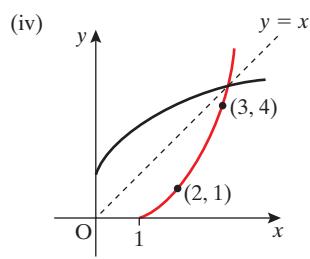
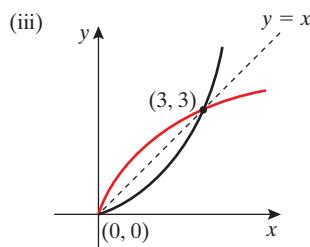
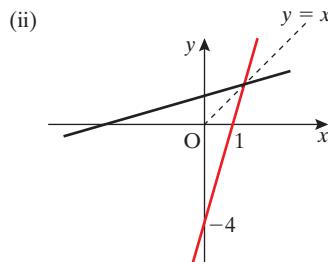
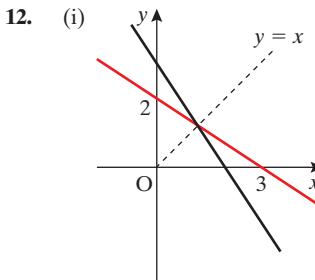
- (b) Inteilgeach  
(c) Détheilgeach
- 4.** (i) Taispeánann      (ii) Ní thaispeánann  
(iii) Taispeánann;  
Nil comhfhreagairt aon-le-haon ann
- 5.** (i) Is feidhmeanna iad (a), (b), (d), (e) agus (f)  
(ii) Is feidhmeanna inteilgeacha iad (b) agus (e)
- 6.** Inteilgeach mar nach dtrasnóidh aon líne  
chothrománach an cuar ach aon uair amháin, ar a  
mhéid.  
Barrtheilgeach mar go dtrasnóidh aon líne  
chothrománach an cuar uair amháin, ar a laghad.
- 7.** (i) Léiríonn      (ii) Léiríonn
- 8.** (i)  $y \geq -1$   
(ii)  $\mathbb{R}$   
(iii) Nil an raon cothrom leis an gcomhfhearrann  
(iv) Comhfhearrann:  $y \geq -1$   
(v) Trasnaonn an líne an cuar níos mó ná uair  
amháin  
(vi)  $x \geq 3$  nó  $x \leq 3$
- 9.** (i) Ní hea; trasnóidh líne chothrománach an cuar  
níos mó ná uair amháin  
(ii) Is ea; mar go bhfuil an raon agus an  
comhfhearrann cothrom lena chéile  
(iii)  $x \geq 2$  nó  $x \leq 2$
- 10.** (i) Nil sé inteilgeach  
(ii) Tá sé barrtheilgeach; Nil; nil sé inteilgeach  
agus barrtheilgeach araoon
- 11.** Trasnóidh líne ingearach an cuar níos mó ná uair  
amháin;  $y \geq 0$  nó  $y \leq 0$
- 12.** (i) N  
(ii) N  
(iii) Na ré-uimhreacha uile  
(iv) Nil an comhfhearrann agus an raon cothrom  
lena chéile  
(v) Is ea  
(vi) Tacar na ré-uimhreacha deimhneacha a  
bheadh sa chomhfhearrann
- 13.** (i) Ní léiríonn; trasnóidh líne chothrománach an  
graf níos mó ná uair amháin  
(ii) Léiríonn; trasnóidh líne chothrománach an  
graf uair amháin ar a laghad  
(iii)  $\pi \leq x \leq 3\pi$
- 14.** (i) Tá, mar go dtrasnóidh líne chothrománach an  
graf uair amháin ar a laghad  
(ii) Nil, mar go dtrasnóidh líne chothrománach an  
graf níos mó ná uair amháin  
(iii)  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$
- 15.** (i)  $y > 0$       (ii) Tá      (iii) Tá  
(iv) Mar go bhfuil sé inteilgeach agus  
barrtheilgeach araoon

**5.**  $f^{-1}(x) = \frac{5x}{2}$       **6.**  $f^{-1}(x) = \frac{2x + 3}{4}$

**7.**  $f^{-1}(x) = \frac{-6}{x - 1}$       **8.**  $f^{-1}(x) = \frac{x}{x - 3}$

**9.**  $f^{-1}(x) = \frac{10 - 3x}{2}$       **10.**  $f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{4}$ ; Tá

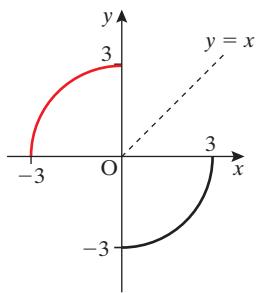
**11.**  $f^{-1}(x) = 3(x + 2)$



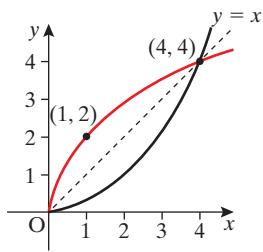
### Cleachtadh 1.4

- $f^{-1}(x) = x + 4$
- $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$
- $f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{5}$
- $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

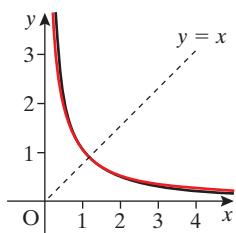
(vi)



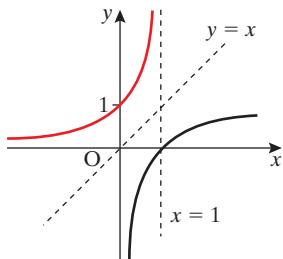
(vii)



(viii)



(ix)



13. (i)  $k: x - 3y + 4 = 0$ ;  $m: 3x - y - 4 = 0$

14.  $k = 2$

15. (i)  $gf(x) = 2x - 7$ ;  $[gf(x)]^{-1} = \frac{x+7}{2}$   
(ii) Tá

16.  $f^{-1}(x) = 2x - 3$ ; Fearann  $f^{-1}(x) = [1\frac{1}{2}, 4]$   
(= Raon f); Raon  $f^{-1}(x) = [0, 5]$

17. (i)  $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x+10}$ ,  $x \geq -10$

(ii)  $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+6}$ ,  $x \geq -6$

(iii)  $f^{-1}(x) = 4 + \sqrt{x+19}$ ,  $x \geq -19$

(iv)  $f^{-1}(x) = -4 + \sqrt{x-4}$ ,  $x \geq 4$

18.  $f^{-1}(x) = 3 - 2x$ ; Fearann  $f^{-1}(x) = [-\frac{1}{2}, 2]$ ;  
Raon  $f^{-1}(x) = [-1, 4]$

19.  $A \leq 3$  [nó  $(-\infty, 3]$ ]

20.  $b = 0$ ;  $g^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$ ,  $x \leq 1$ ;  
Fearann  $g(x) = (1, -3)$  nó  $(-3, 1)$

### Cleachtadh 1.5

1. (i)  $x = 0$       (ii)  $x = 3$       (iii)  $x = -2$

(iv)  $x = 2$       (v)  $x = -3$

(vi)  $x = -\frac{\pi}{2}$  agus  $x = \frac{\pi}{2}$

2. (i)  $x = 0$       (ii)  $\frac{2}{0}$  sainithe

3.  $\tan \frac{\pi}{2} = \frac{k}{0}$ , rud nach bhfuil sainithe

4. (i)  $x = 4$       (ii)  $x = -5$  nó  $x = 5$   
(iii)  $x = -1$  nó  $x = 4$

5. (i)  $\frac{5}{4}$       (ii)  $-4$       (iii)  $\frac{3}{4}$

6. (i)  $-1$       (ii)  $-\frac{3}{2}$       (iii)  $\frac{2}{3}$

7. (i)  $2$       (ii)  $4$       (iii)  $10$

(iv)  $-1$       (v)  $3$       (vi)  $-\frac{1}{7}$

8.  $6$

9. (i)  $0$       (ii)  $0$       (iii)  $0$       (iv)  $0$

10. (i)  $\frac{3}{2}$       (ii)  $\frac{4}{7}$       (iii)  $-\frac{3}{4}$

11. (i)  $\frac{1}{3}$       (ii)  $\frac{5}{2}$       (iii)  $\frac{1}{3}$

12. (i)  $2$       (ii)  $2x$       (iii)  $2x$

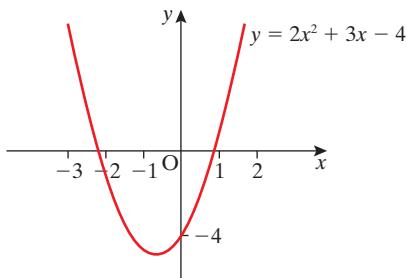
13.  $\frac{1}{27}$

14.

$n$	1	2	5	10	100	1000	10000
$f(n)$	2	2.25	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718

### Cleachtadh 1.6

1.

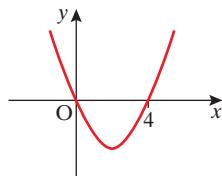


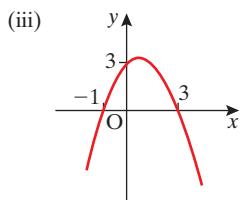
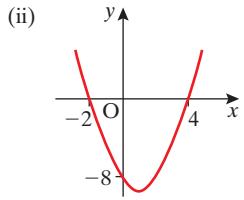
2. (i)  $(0, 0)$  agus  $(4, 0)$

(ii)  $(-2, 0)$  agus  $(4, 0)$

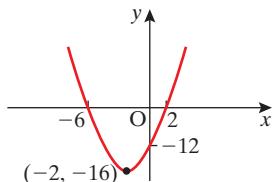
(iii)  $(-1, 0)$  agus  $(3, 0)$

(i)

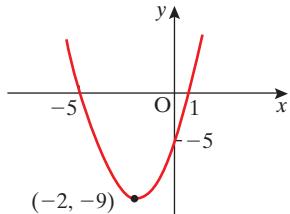




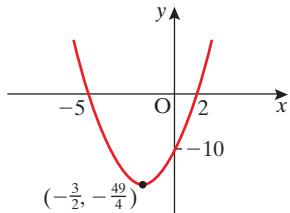
3. (i)  $(x - 2)^2 - 2$   
 (ii)  $(x - 6)^2$   
 (iii)  $-(x - 4)^2 + 4$
4.  $(x + 2)^2 - 16$ ; Trasnaíonn sé an x-ais ag  $(-6, 0)$  agus  $(2, 0)$ ; Pointe casaidh =  $(-2, -16)$



5. x-ais ag  $(1, 0)$  agus  $(-5, 0)$ ; y-ais ag  $(0, -5)$ ;  $(x + 2)^2 - 9$ ;  $(-2, -9)$

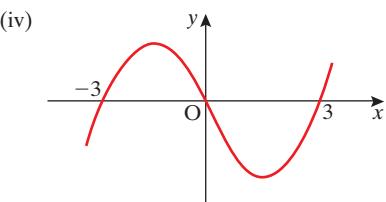
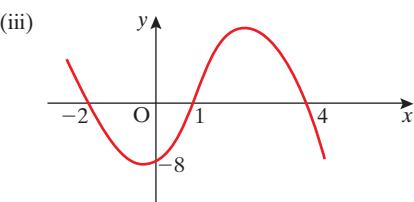
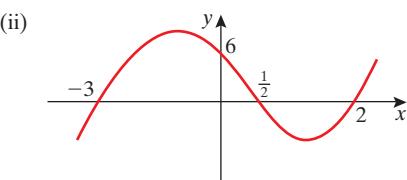
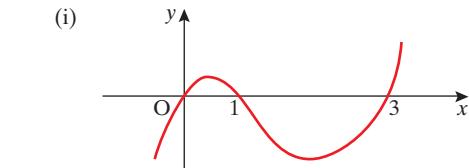


6.  $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$ ;  $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{49}{4}\right)$ ; x-ais ag  $(-5, 0)$  agus  $(2, 0)$ ; y-ais ag  $(0, -10)$



7.  $a = -4, c = 8$   
 8. (i)  $y = x^2$   
 (ii)  $y = x^2 - 4x + 3$   
 (iii)  $y = -\frac{5}{4}(x + 3)(x - 1)$
9. Graf (B)

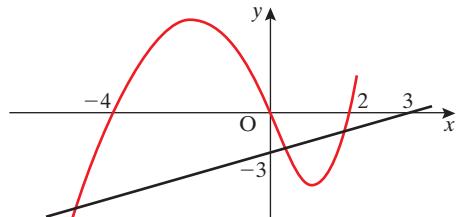
10. Graf (D)  
 11.  $y = (x + 1)^2 + 3$ , i.e.  $y = x^2 + 2x + 4$   
 12. (a) Trasnaíonn sé an x-ais ag  $(-1, 0), (-2, 0)$  agus  $(3, 0)$ ; an y-ais ag  $(0, -6)$   
 (b) Trasnaíonn sé an x-ais ag  $(-3, 0), (0, 0)$  agus  $(6, 0)$ ; an y-ais ag  $(0, 0)$   
 (c) Trasnaíonn sé an x-ais ag  $(-2, 0)$  agus  $(1, 0)$ ; an y-ais ag  $(0, -4)$   
 (d) Trasnaíonn sé an x-ais ag  $(0, 0), (-3, 0)$  agus  $(3, 0)$ ; an y-ais ag  $(0, 0)$
13. (i) Trasnaíonn sé an x-ais ag  $(0, 0), (1, 0)$  agus  $(3, 0)$ ; an y-ais ag  $(0, 0)$   
 (ii) Trasnaíonn sé an x-ais ag  $(-3, 0), (\frac{1}{2}, 0)$  agus  $(2, 0)$ ; an y-ais ag  $(0, 6)$   
 (iii) Trasnaíonn sé an x-ais ag  $(-2, 0), (1, 0)$  agus  $(4, 0)$ ; an y-ais ag  $(0, -8)$   
 (iv) Trasnaíonn sé an x-ais ag  $(-3, 0), (0, 0)$  agus  $(3, 0)$ ; an y-ais ag  $(0, 0)$



14. (i) Graf (B) (ii) Graf (C)  
 (iii) Graf (B) (iv) Graf (B)  
 15.  $y = x^3 - x^2$  agus (C);  $y = 1 - x^2$  agus (A);  
 $y = x - x^2$  agus (B);  $y = -\frac{3}{4}x + 3$  agus (F);  
 $y = x^2 + 3x$  agus (E);  $y = 9x - x^3$  agus (D)  
 16. (i) -27 (ii)  $(-1, 5)$

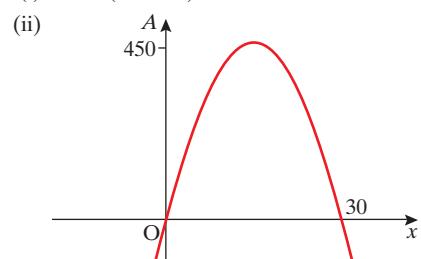
- (iii)  $x = -2.8, x = 1.8, x = 3.9$
- (iv)  $-1 < x < 3$
- (v) Ní thrasnaíonn an líne  $y = 10$  an graf ach ag pointe amháin
- (vi) Trasnaíonn an líne  $y = 10$  an graf ag trí phointe
- (vii)  $-27 < k < 5$

17.



3 phointe trasnaithe

18.  $y = -\frac{2}{5}(x+2)(x-1)(x-5)$
19. (i)  $A = x(60 - 2x) \text{ m}^2$



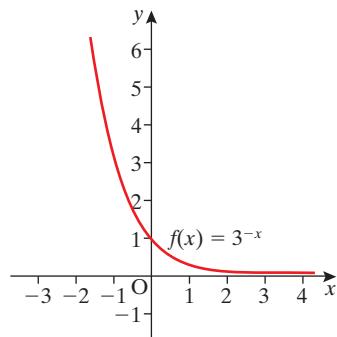
(iii)  $450 \text{ m}^2$

20. (i)  $y = \frac{1}{2}(x+1)(x-2)^2$
- (ii) Trasnóidh líne chothrománach an graf níos mó ná uair amháin
- (iii) Tá, mar go dtrasnóidh gach líne chothrománach an graf uair amháin ar a laghad
- (iv) Níl sé inteilgeach  $\Rightarrow$  níl sé détheilgeach
21. (i)  $f(x) = (x-3)^2 + 9$
- (ii)  $P = (0, 18), Q = (3, 9)$
- (iii)  $x = 3 + 4\sqrt{2}$  (mar go bhfuil  $x \geq 0$ )

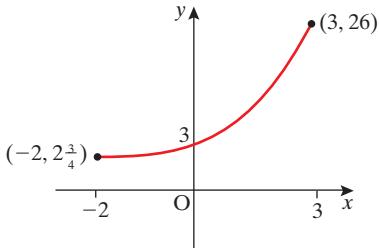
### Cleachtadh 1.7

1. (i)  $\textcircled{A}$  agus an chéad cheann;  $\textcircled{B}$  agus an dara ceann
- (ii)  $P = (0, 1)$
- (iii)  $\textcircled{A}$ :  $y = 0$ ;  $\textcircled{B}$ :  $y = 0$
2.  $f(0.5) = 5.65$
3. Is ionann  $A$  agus  $f(x) = 3.3^x$ ; is ionann  $B$  agus  $f(x) = 3^x$ ; is ionann  $C$  agus  $f(x) = 2^x$
4. (i)  $k = 5$                   (ii)  $y = 5.2^x$
5.  $a = \frac{3}{2}$

6. (i) 5.2  
(ii) -1.25



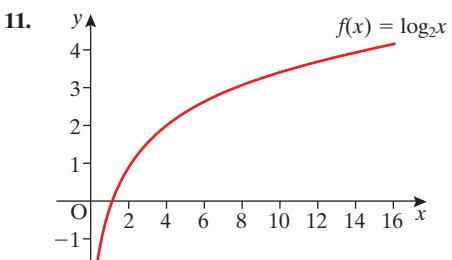
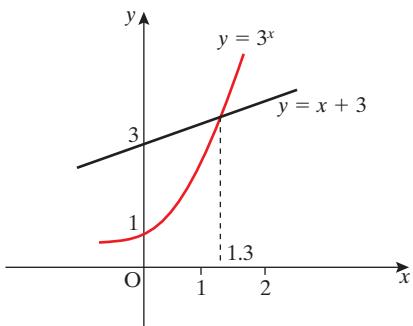
7. Raon =  $\left[2\frac{3}{4}, 26\right]$



8.  $a = \frac{14}{e-1}, b = \frac{-14}{e-1}$

9. (i)  $a = \frac{1}{2}$                   (ii)  $b = \frac{3}{2}$

10.  $x = 1.3$



12.  $a = 2, b = 4$   
13.  $a = 3$   
14. (c):  $f(x) = \log_3(x-3)$

## Téacs & Trialacha 7

15. Graf (B)

16.  $q = 13$

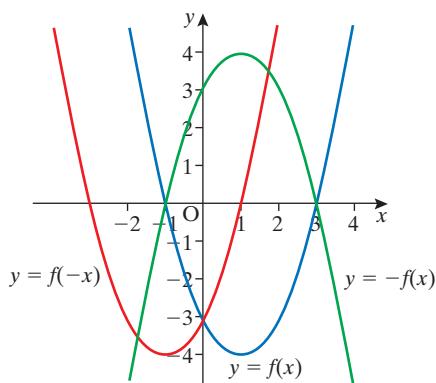
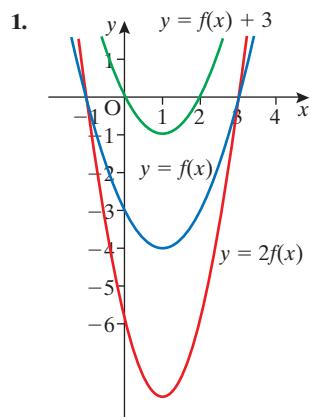
17. (i)  $T_0 = 100$  (ii)  $332^\circ\text{C}$

18. (i) 4433 (ii) 347 bliain

19. (i) 180 (ii) 20 (iii) 200

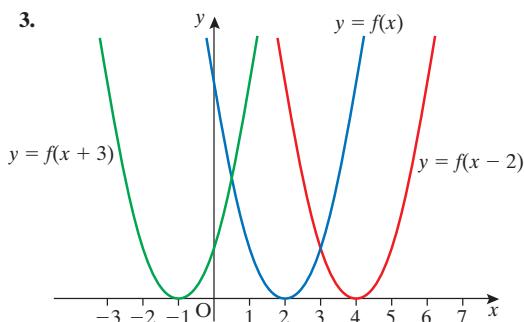
20.  $k = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{10}{9}\right)$  ( $= 0.0105$ ); leathré = 65.8 bliain

### Cleachtadh 1.8

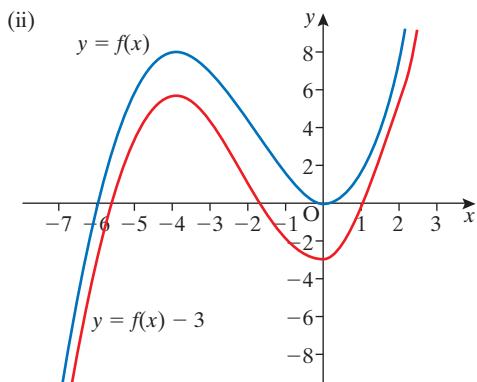
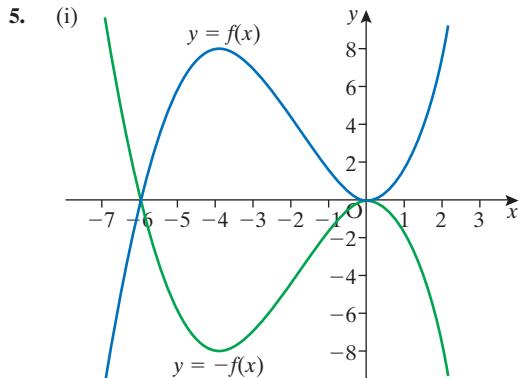


2.  $g(x) = -f(x)$ ;  $h(x) = f(x) + 3$

3.



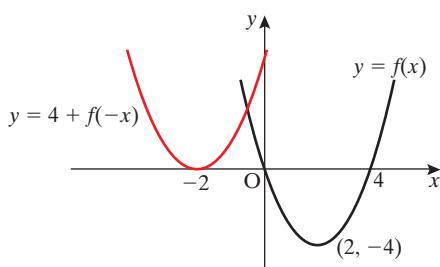
4. Graf (D)



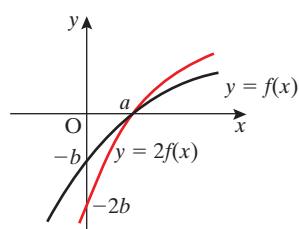
6. Graf (C)

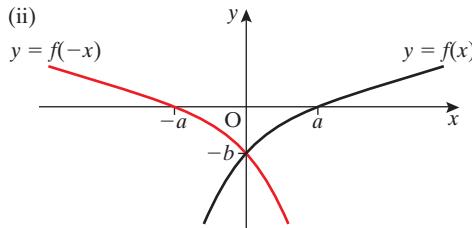
7. Graf (A)

8.



9. (i)

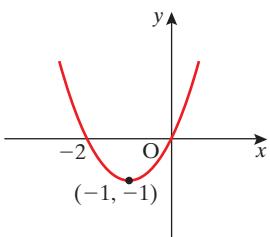




10. (i) (a)  $(2, 0)$       (b)  $(0, -2)$   
(ii) Graf  $\textcircled{D}$

### Súil Siar 1 (Croícheisteanna)

1.  $gf(x) = (2x - 3)^2$ ;  $x = 0$  nó  $x = 3$
2.  $\textcircled{A}$  agus  $y = x^2 - 2$ ;  $\textcircled{B}$  agus  $y = 2 - x^2$ ;  $\textcircled{C}$  agus  $y = 2x$
3. Raon  $= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \right\}$
4.  $y = \frac{x}{11}(x + 7)$
5.  $g^{-1}(x) = 2x - 10$ ; (i)  $-14$       (ii)  $x = 10$
6. (i)  $C = (0, 1)$       (ii)  $a = 4$
7. (i)  $x = -2, 1, 3$   
(ii)  $x = 1.4$  nó  $x = 2.8$   
(iii)  $x = -1.5$  nó  $x = 0$ ;  
Ní hea; trasnóidh líne chothrománach an graf  
níos mó ná uair amháin;  
Trasnóidh aon líne chothrománach an graf  
uair amháin ar a laghad.
8. (i)  $m = 3$       (ii)  $P = (0, 2)$
9. (i)  $-\frac{4}{3}$       (ii)  $-1$       (iii)  $6$
10.  $(x + 1)^2 - 1$ ;  $(-1, -1)$

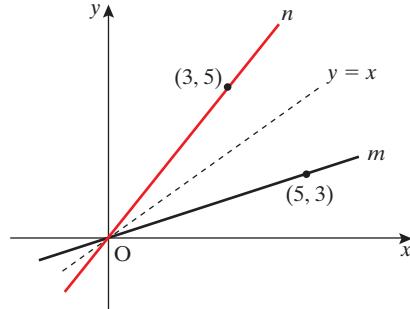


11. (i) (a) Fearann  $= \mathbb{R}$ ; Is é  $y \geq -2$  an raon  
(b) Is é  $x \leq 2$  an fearann; Is é  $\mathbb{R}$  an raon  
(c) Is é  $-4 \leq x \leq 0$  an fearann;  
Is é  $0 \leq y \leq 4$  an raon  
(ii) Is é (a) an t-aon fheidhm amháin; trasnóidh  
líne ingearach graif (b) agus (c) níos mó ná  
uair amháin
12. A agus  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ; B agus  $y = 3^{-x}$ ;  
C agus  $y = 5^x$ ; D agus  $y = 2^x$
13. (i)  $x = 2$       (ii)  $x = 3$       (iii)  $x < 4$
14. (i)  $fg(x) = 10x + 30$ ;  $(fg)^{-1}(x) = \frac{x - 30}{10}$
15. (a)  $fg(x) = x^2 + 8x + 19$ ;  $gf(x) = x^2 + 7$

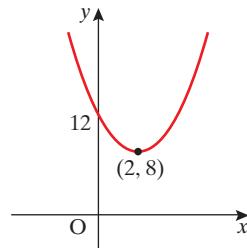
- (b)  $b^2 - 4ac = -36$  agus, mar sin, níl aon  
fhréamh réadach aige
16. (i)  $y \geq 0$   
(ii)  $g^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{2x}$   
(iii)  $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{3}{2}$   
(iv)  $x = \frac{5}{3}$  nó  $x = \frac{4}{3}$

### Súil Siar 1 (Ardcheisteanna)

1. (i)  $hf(x) = \log_3(x - 1)$ ;  
 $hg(x) = \log_3(2x^2 - x - 1)$   
(ii)  $x = 1$  nó  $x = 4$
2. (a) agus  $\textcircled{C}$ ; (b) agus  $\textcircled{B}$ ; (c) agus  $\textcircled{D}$ ; (d) agus  $\textcircled{A}$
3. (i)



- (ii)  $-4 \leq x \leq 4$ ;  $0 \leq y \leq 4$
4.  $(x - 2)^2 + 8$ ;  $(2, 8)$

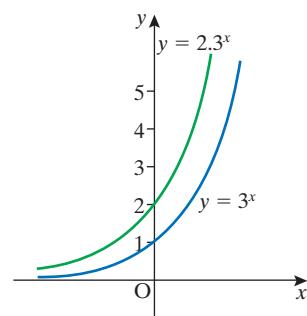
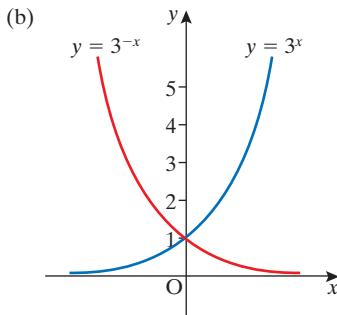


5.  $V = x(24 - 2x)(18 - 2x)$ ;  $18 - 2x > 0$ ,  
i.e.  $x < 9$ , i.e.  $0 < x < 9$
6. (i)  $a = 2, b = 3$   
(ii) (a)  $x = 1$   
(b)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$   
(c) Raon  $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
(d) Tá; trasnóidh líne chothrománach an graf  
uair amháin ar a mhéid

7. (ii)
-

## Téacs & Trialacha 7

- (iii) (a)  $x = 1.2$  (b)  $7.4 \text{ m}^3$   
**8.** (a) Raon g:  $y \geq 1$   
 (b)  $x = 0, x = 1$   
 (c)  $x = 3, x = -\frac{7}{3}$   
 (d)  $q = -\frac{3}{2}$   
**9.** (i)  $t = -5; k = -2$  (ii)  $\frac{4}{3}$   
**10.** (i)  $-5 \leq x \leq 5; [0, 5]$   
 (ii) (a)  $(0, 1)$



- 11.**  $A = 5;$   

<b><i>t</i></b>	0	5	10	15	20
<b><i>P</i></b>	5	6.4	8.2	10.6	13.6

; tógfaidh sé  $t = 13.9$  lá ar an daonra a dhúbailt

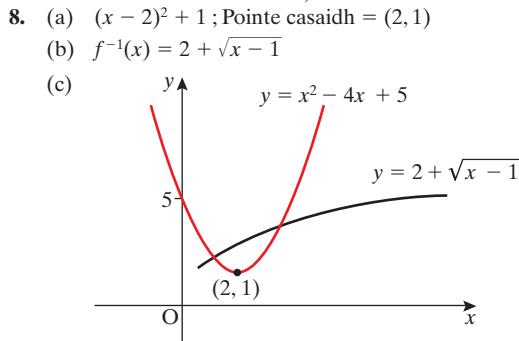
- 12.** (i)  $x \geq 4$  agus  $x \leq 3$   
 (ii) (a) Trasnóidh líne ingearach an graf uair amháin ar a mhéid  
 (b) Ní hea (c) Is ea (d)  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

**13.** Graf ©

### Súil Siar 1 (Freagraí níos faide)

- 1.** (a)  $a = 2, b = -6$ ; Pointe casaidh =  $(-2, -6)$   
 (b) Trasnafonn sé an x-ais ag  $-4.45$  agus  $0.45$ ; Trasnafonn sé an y-ais ag  $(0, -2)$   
 (c) Idirdhealáí =  $\sqrt{24}$ ; ó tá an t-idirdhealáí  $> 0$ , trasnóidh an cuar an x-ais ag dhá phointe ar leith  
 (d)  $k > 4$   
**2.** (a)  $a = -0.09, b = 9$   
 (b)  $|DE| = 2.79 \text{ m}$

- (c) Fad an bhabha =  $2 \times \sqrt{30} = 10.95 \text{ m}$   
**3.** (a)  $a = 2, b = 3$   
 (b) (iii)  
**4.** (a) Graf ©  
 (b) (i) (a)  $N_0 = 20000$  (b)  $k = -0.223$   
 (ii) 6.2 bliain  
**5.** (a)  $\mathbb{R}$   
 (b) (i)  $fg(x) = \frac{1}{(x-3)^3}$  (ii)  $x = \frac{13}{4}$   
 (c) (i)  $g^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x}$   
 (ii) Raon  $g^{-1}$  = fearann  $g = \mathbb{R}, x \neq 3$   
 (iii)  $gg^{-1}(x) = x$   
 (iv) Níl sé leanúnach ag  $x = 0$   
**6.** (i) €130,000 (ii) 0.064 (iii) €94,400  
**7.** (a) Graf ©  
 (b) (i)  $x = \frac{\log_a 9}{\log_a 12}$   
 (ii)  $y = 3.4$  (roghnaigh luach deimhneach ar bith ar  $a$ )



- 9.** (i)  $C_0 = 5$  agus  $k = 0.5798$   
 (ii) 5.6 bliain

### Caibidil 2: An Calcalas Difréálach

#### Cleachtadh 2.1

- 1.** (i) 4 (ii) 1 (iii) -3  
**2.**  $\frac{16}{7}$   
**3.** (i)  $-\frac{25}{7}$  (ii) 4  
**4.**  $\frac{25}{8}$   
**5.** (i) 8 mbliana (go garbh)  
 (ii) 12 cm in aghaidh na bliana  
**6.** (ii)  $42 \text{ cm}^2$  in aghaidh an cm  
**7.** (i) 5 (ii) 4.5 (iii) 4.1 (iv) 4

#### Cleachtadh 2.2

- 1.** (i) 5 (ii) 3 (iii) -4  
**2.** (i)  $2x$  (ii)  $4x + 9$  (iii)  $6x - 4$   
**3.** (i)  $2x - 2$  (ii) 2

- (iii)  $2x - y + 1 = 0$   
**5.** (i)  $-2x$       (ii)  $4 - 2x$       (iii)  $-1 - 6x$   
**6.**  $4x - 3$ ; (i)  $9$       (ii)  $9x - y + 20 = 0$   
**7.**  $2\pi r$   
**8.**  $f'(x) = 2x - 3; \left(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{4}\right)$

### Cleachtadh 2.3

- 1.** (i)  $25x^4$       (ii)  $10x - 4$   
 (iii)  $12x + 5$       (iv)  $3x^2 - 8$   
 (v)  $2x + 2 - \frac{1}{x^2}$       (vi)  $6x^2 + 2x - \frac{2}{x^3}$   
**2.** (i)  $14x + \frac{3}{x^2}$       (ii)  $\frac{3}{2\sqrt{x}}$   
 (iii)  $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^3}$       (iv)  $2x - \frac{5}{2\sqrt{x}}$   
 (v)  $\frac{-3}{2\sqrt{x^3}}$       (vi)  $\frac{-6}{x^3} - \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$   
**3.**  $x^2 + x - 6$   
**4.** (i)  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$       (ii)  $\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$   
 (iii)  $-\frac{4}{x^2} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$       (iv)  $\frac{3}{x^2}$   
 (v)  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$       (vi)  $-6x$   
**5.**  $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1; 1\frac{1}{4}$   
**6.**  $3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}; 48\frac{1}{2}$   
**7.**  $-\frac{1}{16}$   
**8.**  $\frac{5}{2}\sqrt{x^3}; p = 5$   
**9.**  $k = 5$   
**11.**  $2$   
**12.**  $1; x - y + 2 = 0$   
**13.**  $-3; 3x + y - 10 = 0$   
**14.**  $x = -2$   
**15.**  $(1, 0)$   
**16.**  $(1, -3)$   
**17.**  $a = 5$   
**18.** Fána = 0  $\Rightarrow$  comhthreomhar leis an  $x$ -ais  
**19.**  $(3, -3)$   
**20.**  $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\right)$   
**21.**  $a = 12, b = -18$   
**22.** 6 aonad<sup>2</sup>

### Cleachtadh 2.4

- 1.** (i)  $6x - 2$       (ii)  $24x - 1$   
 (iii)  $3x^2 - 2x + 2$       (iv)  $6x^2 - 2x - 4$   
 (v)  $3x^2 - 2x - 2$       (vi)  $8x^3 + 3x^2 - 2$   
**2.** (i)  $\frac{18}{(2x + 6)^2}$       (ii)  $\frac{-5}{(x - 1)^2}$   
 (iii)  $\frac{2x^2 + 6x}{(2x + 3)^2}$       (iv)  $\frac{4x^2 - 12x + 2}{(2x - 3)^2}$

- (v)  $\frac{-8x^3 + 6x^2}{(1 - 2x)^2}$       (vi)  $\frac{-3x^2 - 4x - 9}{(x^2 - 3)^2}$   
**3.**  $-3$   
**4.**  $\frac{6x - 1}{2\sqrt{x}}$   
**7.** (i)  $2(x + 4)$       (ii)  $6(2x - 1)^2$   
 (iii)  $9(3x + 5)^2$       (iv)  $4x(x^2 - 1)$   
 (v)  $16x(2x^2 + 3)^3$       (vi)  $-15(1 - 3x)^4$   
**8.** (i)  $\frac{2}{\sqrt{4x + 1}}$       (ii)  $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$   
 (iii)  $\frac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x}}$   
**9.** (i)  $2(2x + 5)^3 + 12x(2x + 5)^2$   
 (ii)  $2x(3x + 2)^2 + 6(3x + 2)(x^2 - 1)$   
 (iii)  $2(x + 4)(x - 2) + (x + 4)^2$   
**10.**  $24$   
**11.**  $-\frac{19}{16}$   
**12.**  $-28$   
**13.**  $\frac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}$   
**14.**  $\frac{-4x^2 - 5}{2x^2}$   
**15.**  $\frac{\sqrt{x} + 2}{2(\sqrt{x} + 1)^2}; \frac{3}{8}$   
**16.**  $\frac{5}{(1 - 2x)^2}$   
**17.**  $3$   
**19.**  $a = 2, b = 1\frac{1}{2}, c = -2$   
**20.**  $\frac{3}{8}$   
**21.**  $A$   
**22.** (a) (i)  $3x^2 - 5$       (ii)  $9x^2 + 6x - 1$   
 (b)  $x = -\frac{1}{2}$

### Cleachtadh 2.5

- 1.**  $6x + 4$   
**2.**  $12x^2 - 6$   
**3.**  $\frac{2}{x^3}$   
**4.**  $\frac{6}{x^4} + 6$   
**5.**  $\frac{2}{x^3}$   
**6.**  $-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$   
**7.**  $\frac{-1}{2\sqrt{(2x + 3)^3}}$   
**8.**  $54(3x - 2)$   
**9.**  $\frac{2}{(x + 4)^3}$   
**10.**  $12x^2 - 6x; x = 0, \frac{1}{2}$

14.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} ; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4\sqrt{x^5}}$

**Cleachtadh 2.6**

1. (i)  $2 \cos 2x$  (ii)  $-6 \sin 6x$   
 (iii)  $4 \sec^2 4x$  (iv)  $2 \cos(2x + 3)$   
 (v)  $-3 \sin(3x - 1)$  (vi)  $2x \sec^2(x^2)$   
 (vii)  $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x$  (viii)  $-2x \sin(x^2 - 1)$   
 (ix)  $2 \cos 2x - 4 \sin 4x$
2. (i)  $2 \sin x \cos x$  (ii)  $-3 \sin x \cos^2 x$   
 (iii)  $4 \tan^3 x \sec^2 x$  (iv)  $12 \sin^2 4x \cos 4x$   
 (v)  $-4 \sin(2x + 1) \cos(2x + 1)$   
 (vi)  $12 \tan^2(4x + 3) \sec^2(4x + 3)$
3. (i)  $6 \cos 3\theta - 2 \sin 2\theta$   
 (ii)  $2 \tan \theta \sec^2 \theta + 2 \sec^2 2\theta$   
 (iii)  $-4 \sin 4\theta + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{4}$   
 (iv)  $3 \tan^2 \theta \sec^2 \theta$
4. (i)  $\sin 2x + 2x \cos 2x$   
 (ii)  $2x \cos x - x^2 \sin x$   
 (iii)  $\sin x + (x + 3) \cos x$
7. (i) 2 (ii) -1 (iii) 0
9.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
10.  $\cos x - 3 \sin x$
11.  $-4 \sin^2 x$
12. 0
13.  $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$
14. (i)  $-2 \sin 2x$  (ii)  $4 \sin x \cos x$
17.  $k = \frac{1}{2}$
18.  $a = 1, b = 2$

**Cleachtadh 2.7**

1. (i)  $\frac{6}{\sqrt{1 - 36x^2}}$  (ii)  $\frac{3}{1 + 9x^2}$   
 (iii)  $\frac{2}{\sqrt{-4x^2 - 4x}}$  (iv)  $\frac{2x}{1 + x^4}$
3. (i) 2 (ii) 2
4. (i)  $\frac{-3}{x\sqrt{x^2 - 9}}$  (ii)  $\frac{4}{x^2 + 16}$
5. (i)  $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + \sin^{-1} x$   
 (ii)  $2 \tan^{-1} x + \frac{2x}{1 + x^2}$
7.  $k = -1$
8.  $-\frac{2}{7}$
9.  $-\frac{1}{2}$
10.  $\frac{9}{5}$

**Cleachtadh 2.8**

1. (i)  $4e^{4x}$  (ii)  $-3e^{-3x}$   
 (iii)  $2xe^{x^2}$  (iv)  $2e^{2x+4}$   
 (v)  $(2x + 3)e^{x^2 + 3x}$  (vi)  $\cos x(e^{\sin x})$
2. (i)  $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$   
 (ii)  $2 \sin x \cos x (e^{\sin^2 x})$   
 (iii)  $e^{2x}(1 + 2x)$
3. (i)  $e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$   
 (ii)  $2e^x(e^x - 1)$   
 (iii)  $e^{x+1}$
4. (i)  $2e^{2x} + 3e^{3x}$   
 (ii)  $\frac{e^{2x}(2x - 1)}{x^2}$   
 (iii)  $xe^{\cos x}(2 - x \sin x)$
5.  $-\pi e^3$
6.  $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{2x}$
10.  $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}; m = -1, 4$
12.  $y = 2x + 8$

**Cleachtadh 2.9**

1.  $\frac{1}{x}$
2.  $\frac{2}{2x + 3}$
3.  $\frac{2}{x}$
4.  $\cotan x$
5.  $\frac{2(x - 3)}{x^2 - 6x}$
6.  $-3 \tan 3x$
7.  $\log_e x + 1$
8.  $2x \log_e 3x + x$
9.  $\frac{1 - \log_e x}{x^2}$
10. (i)  $\frac{9}{3x + 1}$  (ii)  $\frac{5}{(2x + 1)(1 - 3x)}$   
 (iii)  $\frac{x}{1 + x^2}$  (iv)  $\frac{1}{2} \cotan x$   
 (v)  $\frac{4x}{x^2 + 4}$  (vi)  $\frac{1}{2x(x + 1)}$
11.  $-\frac{4}{x^2}$
13.  $\frac{1}{x}$
14.  $\frac{5}{2}$
15.  $\frac{2}{e}$
16.  $\frac{\cos t}{1 + \sin t}; k = 1$

**Súil Siar 2 (Croícheisteanna)**

1. (i)  $2x - \frac{1}{x^2}$  (ii)  $6(2x + 3)^2$   
(iii)  $\frac{3}{2\sqrt{1 + 3x}}$
2.  $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$
3. (i)  $(x + 2)^2$  (ii)  $\frac{2}{(x + 1)^2}$
4. (i)  $4x + \frac{6}{x^3}$  (ii)  $24 \cos 6x$   
(iii)  $6xe^{x^2}$
5.  $-11$
6. (i)  $2$  (ii)  $12x - y - 8 = 0$
7. (i)  $6x - 1 - \frac{3}{x^2}$  (ii)  $\frac{3x^2 - 6x}{(x - 1)^2}$   
(iii)  $-8 \cos 4x \sin 4x$
8.  $4 - \frac{6}{x^2}$
9.  $-\frac{2}{3}$
10.  $-\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
11.  $2x + y - 4 = 0$
12.  $\frac{7}{32}$
13. (i)  $10$  (ii)  $16$
14.  $\frac{5}{1 + 25x^2}$
15.  $2x - y + 1 = 0$
16.  $k = 11$

**Súil Siar 2 (Ardcheisteanna)**

- 1.
2.  $\pi$
3.  $(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} - \ln 2\right)$
4.  $x = 0, 2$
5. (i)  $\frac{4}{x}$  (ii)  $-\frac{1}{2}x$
6.  $\frac{dy}{dx} = ne^{nx}; \frac{d^2y}{dx^2} = n^2e^{nx}; n = 2, 3$
7.  $(-1, 11), (3, -5)$
8.  $a = 8, b = 11$
9. (i)  $(0, 2160000), (30, 0)$ ;  
Umar lán =  $2160000 \text{ m}^3$ ;  
Umar folamh tar éis 30 nóim.  
(ii)  $640000 \text{ m}^3$   
(iii)  $152000 \text{ m}^3/\text{nóim.}$   
(iv)  $96000 \text{ m}^3/\text{nóim.}$
10.  $k = \frac{3}{2}$
11.  $-\frac{1}{2}$
12.  $y = 0$
13.  $k = -\frac{3}{2}$

14.  $\frac{4}{5}$
16. (ii)  $2 - 3h + h^2$   
(iii) De réir mar a dhruideann  $h$  le nialas, éiríonn fána an chorda agus fána an tadhlaí ag  $A$  níos gaire agus níos gaire dá chéile; grádán = 2

**Súil Siar 2 (Freagraí níos faide)**

1. (i)  $(0, 0), (2, 0)$   
(ii) Is iad  $-2$  agus  $2$  na fánaí  
(iii)  $2x + y = 0$  agus  $2x - y - 4 = 0$   
(iv)  $53^\circ$   
(v)  $p = 10, q = -6, r = 15$
2. (i)  $k = 2$   
(ii)  $y = 3x + \ln 2 - 3$
3. (i)  $2x - 4y - 9 = 0$   
(ii)  $A = (-2, 3)$   
(iii)  $C = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$
4. (a)  $\frac{h^3 + 6h^2 + 11h}{h}$   
(b) (i) 14.25 (ii) 11.61  
(iii) 11.0601 (iv) 11.006001  
(c) 11  
(d) 11  
(e)  $3a^2 + 3ah + h^2 - 1$   
(f)  $3a^2 - 1$
6. (a)  $\frac{dD}{dt} = k \cdot 50e^{kt} = kD$  = tairiseach iolraithe faoi  $D$   
(b) 20 cm/bláin
7. (i)  $-1$   
(ii)  $2nx(x^2 - 1)^{n-1}$   
(iii) Bíonn  $3(x - 2)^2$  deimhneach i gcónaí
8. (i)  $(x - k)(3x - k)$   
(ii)  $(k, 0), \left(\frac{k}{3}, \frac{4k^3}{27}\right)$   
(iv) Lárphointe =  $\left(\frac{2k}{3}, \frac{2k^3}{27}\right)$ ; taispeán go bhfuil an lárphointe sin ar an gcuar

**Caibidil 3: An Calcas Difreálach in Úsáid****Cleachtadh 3.1**

1. (i)  $-1$  (ii)  $-3$
2.  $8x - y - 23 = 0$
3.  $2x + y + 4 = 0$
4.  $4x - 2y - 1 = 0$
5.  $k = 5$
6.  $(1, 3)$
7.  $(-3, 3)$
8.  $4x - 5y + 12 = 0$
9.  $(2, -12)$  agus  $(-2, 20)$
10.  $a = 1, b = -6$
11.  $a = \frac{3}{4}, b = -5$
12.  $2x - y - 3 = 0$

## Téacs & Trialacha 7

13.  $3x - y + 1 = 0$
14.  $(3, -5)$  agus  $(-1, 11)$
15. (i) 250 m (ii)  $76^\circ$
16. (i) Deimhneach (ii) Diúltach  
 (a)  $x < \frac{1}{2}$  (b)  $-4 < x < 0$
17. (i)  $8x + 4$   
 (ii) (a)  $x > -\frac{1}{2}$  (b)  $x < -\frac{1}{2}$
18. (i)  $x < \frac{2}{3}$  (ii)  $x > -\frac{4}{3}$  (iii)  $2 > x > 3$
19. (i)  $x > 0.3$  (ii)  $x > -1$  (iii)  $-1 < x < 2$
20. (i)  $2x - y - 11 = 0$  (ii)  $Q = (4, -3)$
21. (i) 0.12 agus -0.15  
 (ii)  $x = 2, y = 2.16$ ; airde = 2.16 km
22. (a)  $A = (-2, 0), B = (0, \sqrt{2})$   
 (b)  $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$   
 (c) (i)  $\frac{1}{2}$  (ii)  $2y - x = 3$  (iii)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$   
 (d)  $x > -\frac{7}{4}$

### Cleachtadh 3.2

1.  $(2, 5)$
2.  $(-2, 12)$
3.  $(1, 1)$ ; fóspointe
4.  $(5, -23)$ , fóspointe;  $(1, 9)$ , uaspoinnte
5. (i)  $(2, -15)$ , fóspointe;  $(-1, 12)$ , uaspoinnte  
 (ii)  $(0, 0)$ , fóspointe;  $(-4, -8)$ , uaspoinnte
6.  $(1, 8)$ , fóspointe;  $(-1, -8)$ , uaspoinnte
7.  $(5, 75)$ , íospointe
8.  $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ , íospointe
9. (i)  $(-1, 3)$  (ii)  $(2, 4)$
11.  $a = 2, b = 3, c = 4$
12.  $\frac{-4}{(x-3)^2} \neq 0$
13. (i)  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \ln 2)$ , íospointe
14. (i)  $(0, 1)$  (ii) íospointe
15. (a)  $(2, 0)$ , uaspoinnte;  $(4, -4)$ , fóspointe
16. (ii) íospointe
17.  $a = 2, b = -6, c = 0, d = 4$
19. (i)  $a = 16$   
 (ii)  $g''(x) = 8 > 0 \Rightarrow$  níl aon uaspoinnte casaidh air
20. (i)  $70 \text{ km/u}$  (ii)  $\frac{2800}{v^3}$  (iii)  $\text{€}40$

### Cleachtadh 3.3

1. (ii)
2. (i) agus (iii)
3. (i) Fána dheimhneach  
 (ii)  $x < -2$  nó  $x > 3$   
 (iii)  $-2 < x < 3$   
 (iv)  $-2, 3$
4. (i) Fána dheimhneach i gcás  $x < -1$   
 (ii) Pointe casaidh ag  $x = -1$  (fána = 0)  
 (iii) Fána dhiúltach i gcás  $x > 1$   
 (Líneach a bhíonn feidhm na fána i gcónai i gcás cuar cearnach.)

5. (i)  $\odot$
6. (i)  $\odot$
7. (i)  $-2 < x < 1$   
 (ii)  $x < -2$  nó  $x > 1$   
 (iii)  $x = -2, 1$
9. (i) (a)  $x = -3$  (b)  $x = 4$   
 (ii) (a)  $x < -3$  (b)  $x > 4$
10. (i) (a)  $x = -1, 3$  (b)  $x = -4.5, 1$   
 (ii) (a)  $x < -1$  nó  $x > 3$   
 (b)  $-4.5 < x < 1$
11. C
13. (i)  $a = 2, b = 4$  (ii)  $k = \frac{3}{4}$

### Cleachtadh 3.4

1. 32
2. (i)  $x = 12$  (ii)  $P = 212$
3.  $y = 50 - x$ ;  $625 \text{ m}^2$
4. (i)  $(8 - x) \text{ cm}$  (ii)  $8 \text{ cm}^2$
5. (i)  $h = \frac{108}{x^2}$  (iii) 6 m faoi 6 m faoi 3 m
6. (i)  $V = 4x^3 - 48x^2 + 144x$
7. (i)  $h = \frac{27 - x^2}{2x}$   
 (ii)  $\text{Toirt} = \frac{27x - x^3}{2}$   
 (iii)  $x = 3$ ;  $\text{Toirt} = 27 \text{ cm}^3$
8. (i)  $P = \left(x, \frac{12 - 3x}{4}\right)$   
 (ii)  $\frac{x}{4}(12 - 3x)$   
 (iii)  $x = 2$ ; 3 aonad chearnacha
9.  $V = \pi r(12 - r^2)$   
 $r = 2$
10. (i)  $h = (20 - r) \text{ cm}$   
 (ii)  $r = \frac{40}{3} \text{ cm}$
11. (i)  $\theta = \frac{8}{r} - 2$  (ii)  $\text{Achar} = 4r - r^2$   
 (iii) I gcás  $r = 2 \text{ m}$ , uasachar =  $4 \text{ m}^2$
12. (a) (i)  $|\text{ST}| = \sqrt{200} \text{ m}$   
 (b) Fad =  $5\sqrt{2} \text{ m}$ ; leithead =  $\frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ m}$
13.  $r = \sqrt{9 - h^2}$ ;  $\text{Toirt} = 12\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$
14. (a) (i)  $|\text{PS}| = 6 - x$ ;  $|\text{RS}| = 12 - \frac{8}{x}$   
 (b) An luach is mó:  $A = 32$  ag  $x = 2$  agus an luach is lú:  $A = 20$  ag  $x = 1$  nó  $x = 4$
15. (i)  $P = (x, -x^2 + 6x)$   
 (ii)  $\frac{1}{2}(x^3 - 12x^2 + 36x)$   
 (iii) 16 aonad chearnacha
16. (i)  $y = 60 - x$  (ii)  $S = 5x^2(60 - x)$   
 (iii)  $0 < x < 60$  (iv)  $x = 40, y = 20$   
 (v) 74005

**Cleachtadh 3.5**

1. 97
2. (i) 17 (ii)  $x = 2$
3. (i)  $10\pi \text{ cm}^2$  in aghaidh an cm  
(ii)  $20\pi \text{ cm}^2$  in aghaidh an cm
4.  $V = x^3$ ;  
(i)  $300 \text{ cm}^3$  in aghaidh an cm (ii)  $75 \text{ cm}^3$
5. -50 duine in aghaidh na bliana
6. (i)  $1200t - 200t^2$   
(ii) €1800 in aghaidh na míosa  
(iii) Ag  $t = 0$  agus  $t = 6$
7. (i)  $35 \text{ m/s}$  (ii)  $20 \text{ m/s}^2$
8. (i)  $7 \text{ m/s}$   
(ii)  $-2 \text{ m/s}^2$   
(iii)  $\frac{2}{3}$  de shoicind agus 2 shoicind
9. (i) 60 soic. (ii) 18 km
10. (i) 8 m  
(ii) Nuair atá  $t = 0$  nó  $t = 1\frac{1}{3}$  soic.
11. (i)  $t = \frac{2}{3}$ , luasghéarú  $= -2$ ;  
 $t = 1$ , luasghéarú  $= 2$   
(ii)  $t = \frac{5}{6}$ , treolus  $= -\frac{1}{6}$
12. (i) 3 cm ar thaobh na láimhe clé de O agus ag gluaiseacht ar dheis ar 24 cm/s  
(ii)  $v = 3t^2 - 22t + 24$   
(iii) Tar éis  $\frac{4}{3}$  de shoic. agus 6 shoic.  
(iv)  $11\frac{22}{27}$  ar thaobh na láimhe deise de O agus 39 cm ar thaobh na láimhe clé de O  
(v)  $4\frac{2}{3}$  soic.  
(vi)  $a = 6t - 22$   
(vii) Nuair atá  $t = \frac{11}{3}$  de shoic. agus an caithnín  $13\frac{16}{27}$  cm ar thaobh na láimhe clé de O, ag gluaiseacht ar chlé ar  $16\frac{1}{3}$  cm/s
13. (i)  $t = 0, n = 5$ ;  $t = 10, n = 37$   
(ii) 3.2 in aghaidh an aonaid ama  
(iii)  $e(2.72)$

**Cleachtadh 3.6**

1. (i)  $\frac{dr}{dt}$  (ii)  $\frac{dt}{dr}$  (iii)  $\frac{ds}{dt}$
2. (i) 2 (ii) 4
3. 20
4.  $10\pi$
5.  $54\pi \text{ cm}^2/\text{s}$
6.  $100 \text{ cm}^2/\text{s}$
7. 2000
8.  $\frac{1}{6\pi} \text{ cm/s}$
9.  $\frac{1}{6} \text{ cm/s}$
10. (i)  $(20x - x^2) \text{ cm}^2$  (ii)  $7 \text{ cm}^2/\text{s}$
11.  $5\sqrt{2}$
12. (i)  $16\pi \text{ cm}^3/\text{s}$   
(ii)  $0.16 \text{ cm/s}$   
(iii)  $6.4\pi \text{ cm}^2/\text{s}$

13.  $\frac{4}{3} \text{ m/s}$

14.  $V = 4\pi r^3; \frac{dV}{dr} = 12\pi r^2; 216\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

15.  $\frac{2}{3} \text{ cm/s}$

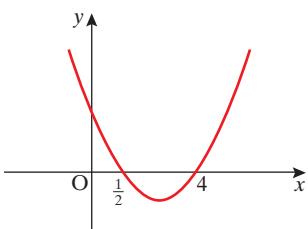
**Súil Siar 3 (Croícheisteanna)**

1.  $7x - y - 15 = 0$
2.  $(-2, 21)$ , uaspointe;  $(2, -11)$ , íospointe
3.  $b = 3$
4.  $-3 < x < 1$
5. (i)  $x = 2$  (ii)  $12x - y - 8 = 0$
6. (i)  $72 \text{ m/s}$  (ii) 2 shoic.
7.  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$
8. Uas.  $P = 2500$
9.  $12^\circ\text{C}$
10.  $\frac{4}{25} \text{ cm/s}$
11.  $(-2, -4); x > 2$
12. (i)  $a = 3, b = 10, c = -8$   
(ii)  $(\frac{2}{3}, 0)$  agus  $(-4, 0)$   
(iii)  $(-1\frac{2}{3}, -16\frac{1}{3})$
13.  $\frac{1}{10} \text{ cm/s}$
14. 20 s; 1960 m
15.  $\odot$ , mar go bhfuil graf  $\odot$  os cionn na hx-aise le léiriú go mbíonn fána na feidhme a thugtar deimhneach i gceónaí

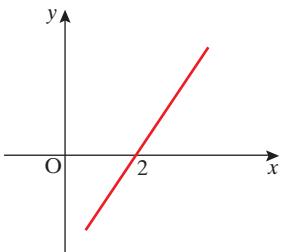
**Súil Siar 3 (Ardcheisteanna)**

1.  $2x - y - 3 = 0$
2.  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} - \ln 2), (1, 1)$
3. (i)  $\frac{2}{25\pi} \text{ m/nóim.}$   
(ii)  $1.6 \text{ m}^2/\text{nóim.}$
4. (a)  $(1, 3), (3, -3)$  (b)  $A(1, 3)$
5. (i)  $x = 10 \text{ cm}, h = 5 \text{ cm};$   
íosachar  $= 300 \text{ cm}^2$
6. (i)  $\text{€}5\frac{13}{16}$  in aghaidh na huaire (ii)  $\text{€}5$
7.  $\frac{dy}{dx} = e^x(1+x); (-1, -\frac{1}{e})$ ; íospointe
8.  $(A, 2), (B, 4), (C, 1), (D, 3)$
9.  $a = -3, b = -9, c = 12$
10.  $\frac{800}{4 + \pi}$
11.  $A = \left(\frac{-m - 2}{m}, 0\right), B = (0, m + 2)$   
(ii) 4 aonad $^2$
12. D (tá an dá ráiteas ceart)
13.  $(0, 32)$  agus  $(-2k, 4k^3 + 32)$ ;  $k = -2$
14. 2.7 m

15. (i)



(ii)



Ar ghraf  $y = f(x)$ , tá pointe athchasaidh ag  $x = 2$ , agus, ag an bpointe sin, tá  $f''(x) = 0$

### Súil Siar 3 (Freagraí níos faide)

1. (a)  $0.003 \text{ cm/s}$

(b)  $0.566 \text{ cm}^3/\text{s}$  (bunaithe ar  $\frac{dx}{dt} = 0.003$ )

nó  $0.48 \text{ cm}^3/\text{s}$  (bunaithe ar  $\frac{dx}{dt} = \frac{0.008}{\pi}$ )

2. (a)  $h = 5 - 4x$

(c)  $0 < x < \frac{5}{4}$

(d)  $\frac{dV}{dx} = 30x - 36x^2$

(e)  $(0, \frac{5}{6})$ ; uastoirt  $= 3\frac{17}{36} \text{ cm}^3$

3. (i) (a)  $20 \text{ m/s}$  (b)  $15 \text{ m/s}$

(ii)  $t = 4$  shoicind

(iii)  $82 \text{ m}$

(iv)  $-20 \text{ m/s}$  (tá sé ag teacht anuas)

(v)  $40 \text{ m/s}$

(vi)  $-40.5 \text{ m/s}$  nuair atá  $t = 8.05$  soicind

4. (a) (i)  $r = \sqrt{1 - x^2}$  (ii)  $h = 1 + x$

(c)  $0 < x < 1$

(d) (i)  $\frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}(1 - 2x - 3x^2)$

(ii)  $\frac{1}{3}$

(iii)  $\frac{32\pi}{81} \text{ m}^3$

5. (i)  $|AP| = \sqrt{x^2 + 36} \text{ km}$ ;  $|PB| = (10 - x) \text{ km}$

(ii)  $2.5 \text{ km}$

(iii) 1 uair 53 nóim.

6. (a)  $P = 10000$

(b)  $0 \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

(d)  $\frac{dP}{dr} = 40 - 40r$

(e)  $20, 0, -40$

(f)  $r = 1$ ; Daonra  $= 30000$  duine

7. (a)  $h = 100 \text{ cm}$

(b)  $t = 400$  soic.

(c)  $\frac{dV}{dt} = 680 \text{ cm}^3/\text{s}$

(d) Luas  $= 216.32 \text{ cm/s}$

(e) Luas  $= 27.04\sqrt{h} \text{ cm/s}$

(f)  $c = 0.6$

8. (a)  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(b)  $r = \frac{h}{10}$

(c)  $V = \frac{\pi h^3}{300}$

(d)  $\frac{dV}{dt} = 0.1 \text{ cm}^3/\text{s}$

(e)  $\frac{dh}{dt} = \frac{2}{5\pi} \text{ cm/s}$

(f)  $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{25} \text{ cm}^2/\text{s}$

9. (b) 2 agus 7.83

(c)  $294 \text{ cm}^3$

(d)	Na cupán i gcuid (b)		An cupán i gcuid (c)
ga ( $r$ )	8.77 cm	4.44 cm	7.35 cm
airede ( $h$ )	2 cm	7.83 cm	5.20 cm
toilleadh ( $V$ )	$161 \text{ cm}^3$	$161 \text{ cm}^3$	$294 \text{ cm}^3$

(e) An ceann láir:  $r = 4.44 \text{ cm}$ ,  $h = 7.83 \text{ cm}$

Tá na cinn eile róleathan nó ró-éadomhain

(f)  $178^\circ$

10. (a) 450 éan

(b)  $-9.098$  éan in aghaidh na bliana

(c) 150 éan

(d)  $t = 35.8$  bliain, i.e. sa 36ú bliain

### Caibidil 4: An tSuimeáil

#### Cleachtadh 4.1

1. (i)  $\frac{x^2}{2} + c$  (ii)  $\frac{x^3}{3} + c$

(iii)  $x^3 + 2x^2 + c$  (iv)  $-\frac{2x^3}{3} + c$

(v)  $3x + c$  (vi)  $-\frac{x^3}{3} + 3x + c$

(vii)  $x^4 + 3x^2 + c$  (viii)  $\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - x + c$

2. (i)  $-\frac{1}{x} + c$  (ii)  $-\frac{1}{x^2} + c$

(iii)  $-\frac{3}{x} + c$  (iv)  $\frac{1}{x^2} + c$

(v)  $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^3} + c$  (vi)  $2\sqrt[3]{x^3} + c$

- (vii)  $2\sqrt{x} + c$  (viii)  $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$
- (ix)  $\frac{4\pi r^3}{3} + c$
3. (i)  $\frac{x^4}{2} - \frac{3}{x} + c$  (ii)  $-\frac{4}{x} - 2x + \frac{x^4}{4} + c$   
 (iii)  $\frac{8}{3}\sqrt{x^3} - 3x + c$  (iv)  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c$   
 (v)  $\frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{x} + c$  (vi)  $-\frac{1}{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$
4. (i)  $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$   
 (ii)  $\frac{3x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + c$
5. (i)  $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + c$   
 (ii)  $\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c$   
 (iii)  $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - 2\sqrt{x^3} + c$
6. (i)  $\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x + c$   
 (ii)  $\frac{3x^2}{2} - x - \frac{6}{x} + c$   
 (iii)  $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 12x^{\frac{1}{2}} + c$
7.  $f(x) = x^2 + 3$
8.  $f(x) = x^2 - 5x + 11$
9.  $c = -3$
10.  $c = -3$
11. (i)  $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2$  (ii)  $y = 3x - \frac{x^3}{3} + 2$
12. (i)  $V = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 4\frac{1}{2}$  (ii)  $287\frac{5}{6}$
13. (i)  $k = 8$  (ii)  $(0, 7)$
14. (i)  $k = -4$  (ii)  $y = x^2 - 4x + 9$
6.  $3e^x + 4 \cos 3x + 6x + c$
7. (i)  $2e^{2x} - \frac{4 \cos 3x}{3} + c$   
 (ii)  $3 \sin x - \frac{\sin 4x}{2} + c$
8.  $\frac{dy}{dx} = -8x \sin 4x^2; \cos 4x^2 + c$
9. (i)  $e^x - \frac{4}{e^x} + c$   
 (ii)  $x e^2 - \frac{3}{e^x} + c$   
 (iii)  $-\frac{1}{2}e^{-2x} - 3e^{-x} + c$
10. (i)  $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - 2x + c$   
 (ii)  $7x - \frac{3}{e^x} + 2e^x + c$
11.  $x = \frac{\ln y}{\ln 7}; \quad$  (i)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 7} \cdot \frac{1}{y}$  (ii)  $7^x \ln 7$
12.  $y = \frac{-3}{e^x} + 2x$
13. Grádán =  $e^2$ ;  
 (i)  $k = 2$  (ii)  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^2$
14. (i)  $f'(x) = 2e^x + 2xe^x$   
 (ii)  $2xe^x - 2e^x + c$
15.  $f'(x) = \sin x + x \cos x; x \sin x + \cos x + c$
16. (i)  $f'(x) = 4e^{2x} + 8xe^{2x}$   
 (ii)  $4xe^{2x} - 2e^{2x} + c$
17.  $\frac{dy}{dx} = 2e^{3x} + 6xe^{3x} - \sin x; 2xe^{3x} - \frac{2}{3}e^{3x} + c$

**Cleachtadh 4.2**

1. (i)  $\frac{e^{2x}}{2} + c$  (ii)  $3e^x + c$   
 (iii)  $\frac{e^{4x}}{2} + c$  (iv)  $-\frac{e^{-3x}}{3} + c$
2. (i)  $\frac{e^{3x}}{3} + 4x + c$  (ii)  $8e^{\frac{1}{2}} + c$   
 (iii)  $\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{4} + c$
3.  $\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}; e^{x^2} + c$
4. (i)  $\frac{\sin 3x}{3} + c$  (ii)  $-\frac{\cos 4x}{4} + c$   
 (iii)  $\frac{\cos 5x}{5} + c$  (iv)  $\frac{\sin kx}{k} + c$
5. (i)  $\frac{\sin 6x}{2} + c$  (ii)  $\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 5x}{5} + c$   
 (iii)  $-\frac{\sin(-9x)}{3} + c$

**Cleachtadh 4.3**

1. (i)  $s = \frac{5t^2}{2} + 4t$  (ii) 56 aonad
2. (i)  $6 \text{ m/s}^2$   
 (ii)  $s = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 4$   
 (iii)  $5\frac{1}{3} \text{ m}$
3. (i)  $v = 3t^2 - 12t + 9$   
 (ii)  $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 6$   
 (iii)  $t = 1$  nó  $t = 3$
4. (i)  $v = t^2 - 3t + 3; s = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 3t + 2$   
 (ii)  $v = 1 \text{ m/s}; s = 4\frac{2}{3} \text{ m}$
5. (i)  $(-10t + 25) \text{ m/s}$  (ii)  $(-5t^2 + 25t) \text{ m}$   
 (iii)  $\frac{5}{2} \text{ de shoic.}$  (iv)  $\frac{125}{4} \text{ m}$   
 (v) 5 shoic.
6. (i)  $N = 4e^t + 10t + c$   
 (ii)  $N = 4e^5 + 56 = 204$
7. (i)  $s = 0.3t^2 - \frac{0.004t^3}{3}$   
 (ii) 2250 m
8. (i)  $h = t^2 - 3t + 4$  (ii)  $t = 7$  soic.

**Cleachtadh 4.4**

1. 9
2. 18
3. 51
4.  $\frac{6\frac{3}{4}}{4}$
5.  $6\frac{2}{3}$
6. -12
7.  $\frac{\frac{3}{4}}{4}$
8.  $17\frac{1}{3}$
9.  $\frac{1}{4}$
10. 2
11.  $6\frac{2}{3}$
12.  $\frac{5}{6}$
13.  $-\frac{3}{4}$
14. -9
15.  $6\frac{2}{3}$
17.  $\frac{x-4}{2}; -1\frac{3}{4}$
18.  $k = 1$  nó 3
19.  $k = \frac{9}{2}$
20.  $14\frac{2}{3}$
21.  $n = 3$
22. (i)  $\frac{1}{2}$       (ii)  $\frac{1}{3}$       (iii)  $\frac{5}{2}$       (iv)  $2 + \frac{\pi}{2}$
23. (i)  $\frac{1}{4}[e^8 - 1]$       (ii)  $e^4 - e^2$   
       (iii)  $2e^{\frac{1}{2}} - 2$       (iv)  $\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{e^2}\right)$
24. (i)  $6e^{\frac{1}{3}} - 4$       (ii)  $e^2 - \frac{1}{e^2}$   
       (iii)  $\frac{120}{\ln 5}$       (iv)  $\frac{7e}{\ln 7} - \frac{1}{\ln 7}$
25. 1
26.  $\sin 3x + 3x \cos 3x; \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}$

**Cleachtadh 4.5**

1. 8 n-aonad<sup>2</sup>
2.  $4\frac{2}{3}$  aonad<sup>2</sup>
3.  $4\frac{1}{2}$  aonad<sup>2</sup>
4.  $10\frac{2}{3}$  aonad<sup>2</sup>
5. 8 n-aonad<sup>2</sup>
6.  $4\frac{2}{3}$  aonad<sup>2</sup>
7.  $8\frac{1}{6}$  aonad<sup>2</sup>
8.  $\frac{2}{15}$  aonad<sup>2</sup>
9. A = (4, 0), B = (-1, 0);  $20\frac{5}{6}$  aonad<sup>2</sup>
10. (0, 3) agus (0, -3); 36 aonad<sup>2</sup>
11.  $\frac{31}{6}$  aonad<sup>2</sup>
12.  $\frac{1}{6}$  aonad<sup>2</sup>
13. (i) P = (2, 4)      (ii)  $1\frac{1}{3}$  aonad<sup>2</sup>
14.  $1\frac{1}{3}$  aonad<sup>2</sup>
15. (i) A = (1, 0), B = (-1, 2)  
       (ii)  $1\frac{1}{3}$  aonad<sup>2</sup>
16. (0, 0) agus (2, 4);  $1\frac{1}{3}$  aonad<sup>2</sup>
17. (i) (4, 4)      (ii)  $5\frac{1}{3}$  aonad<sup>2</sup>
18. (i) P = (4, -8), Q = (2, 0)  
       (ii)  $10\frac{2}{3}$  aonad<sup>2</sup>
19. (i) C = (-2, 6), D = (2, 6)  
       (ii)  $10\frac{2}{3}$  aonad<sup>2</sup>
20. (i) P = (2, 4)      (ii)  $2\frac{2}{3}$  aonad<sup>2</sup>
21.  $k = \sqrt{6}$
22. (i)  $52.6 \text{ m}^2$
23. (i) (-1, 7) agus (5, 37)      (ii) 36 aonad<sup>2</sup>
24. (i)  $P = 1$  aonad<sup>2</sup>  
       (ii)  $Q = \left(e + \frac{1}{e} - 2\right)$  aonad<sup>2</sup>

**Cleachtadh 4.6**

1. (i) 11      (ii) 12  
       (iii) (ii) a thugann an meastachán beacht
2. (i) 3      (ii)  $\frac{1}{3}$       (iii)  $\frac{2}{3}$
3. 16
4.  $6\frac{1}{3}$
5. (i)  $\frac{2}{\pi}$       (ii) 0  
       (iii)  $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$       (iv)  $\frac{e^8}{8} - \frac{1}{8}$
6.  $k = 12$
7.  $k = 4$
8. (i)  $\frac{1}{5}$       (ii) 0
9.  $\frac{85\pi}{6} \text{ cm}^3$
10.  $\frac{147}{10} \text{ m/s}$
11. (i) 9 m/s      (ii) 12 m/s<sup>2</sup>
12. (i) 2 m/s      (ii)  $t = (3 \pm \sqrt{3})$  soic.
13. 4.5 niútan
14. (i)  $\frac{14}{9}$       (ii) 2 aonad<sup>2</sup>
15. 8
16. 20 m/s

**Súil Siar 4 (Croícheisteanna)**

1. (i)  $x^2 + 5x + c$       (ii)  $x^3 - x^2 + 4x + c$   
       (iii)  $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + c$
2. (i)  $-\frac{\cos 3x}{3} + c$       (ii)  $\frac{\sin 5x}{5} + c$   
       (iii)  $-2 \cos x + \frac{3}{2} \sin 2x + c$
3. (i)  $\frac{e^{5x}}{5} + c$       (ii)  $\frac{e^{2x}}{2} - e^{-x} + c$   
       (iii)  $4x + \frac{e^{3x}}{3} + c$
4.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + c$
5. (i)  $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} + c$       (ii)  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + c$   
       (iii)  $\frac{x^2}{2} + 4x^{\frac{3}{2}} + 9x + c$
6. (i) 3      (ii)  $\frac{1}{2}$       (iii)  $\frac{2}{3}$
8. (i)  $\frac{1}{2}e^6 + 2\frac{1}{2}$       (ii)  $-\frac{1}{e^4} + 1$   
       (iii)  $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 + 2$
9.  $3\frac{1}{12}$  aonad<sup>2</sup>
10.  $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 4$
11.  $8\frac{2}{3}$
12.  $y = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 4\frac{1}{2}$
13. (i) A = (1, 0), B = (4, 0)  
       (ii)  $6\frac{1}{3}$  aonad<sup>2</sup>
14. (i) 22 m/s      (ii) 78 m/s<sup>2</sup>
15.  $f'(x) = \sin 2x + 2x \cos 2x; x \sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} + c$

**Súil Siar 4 (Ardcheisteanna)**

1. (i) 62                         (ii)  $a = \frac{2}{3}$   
 2.  $8\frac{2}{3}$   
 3. (i)  $P = (3, 9)$ ,  $Q = \left(7\frac{1}{2}, 0\right)$   
     (ii) 29.25 aonad<sup>2</sup>  
 4.  $48\pi \text{cm}^3$   
 5.  $A = (0, 5); \frac{27}{4}$  aonad<sup>2</sup>  
 6.  $y = 9 - 2e^{-2}$   
 7. (i) 5 aonad<sup>2</sup>                         (ii)  $P = \frac{20}{7}$   
 8.  $71466\frac{2}{3} \text{m}^3$   
 9. (i)  $2x \ln 3x + x$                          (ii)  $x^2 \ln 3x - \frac{x^2}{2} + c$   
 10. (i)  $A = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ;  $B = (2, 2)$   
      (ii)  $\frac{9}{8}$  aonad<sup>2</sup>  
 11. 95 giúl  
 12. (i) 125 m/s                                 (ii)  $s = t^3 + 5t^2 + 3$   
      (iii) 75 m   (iv) 46 m/s  
 13. (i)  $A = (0, 3)$ ,  $B = (1, 0)$   
      (ii) 2 aonad<sup>2</sup>  
 14. (i) (a)  $a = 2, b = 4$                          (b)  $k = \frac{3}{4}$   
      (ii)  $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 6x + 6$   
 15.  $y = x^2 + \frac{2}{x} - 3$

**Súil Siar 4 (Freagraí níos faide)**

1. (a)  $5x - 4y - 3 = 0$                          (b)  $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$   
     (c) (1, 0)   (d)  $\frac{9}{40}$  aonad<sup>2</sup>  
     (e) 9:49  
 2. (a)  $6\frac{3}{4}$  aonad<sup>2</sup>  
     (c) (2, 1)  
     (d) 5 aonad<sup>2</sup>  
 3. (a)  $\frac{\pi}{6}$    (b)  $\frac{1}{2}$  aonad<sup>2</sup>  
 4. (a) Ag  $t = 6$  nóim. nó  $t = 20$  nóim.  
     (b)  $V = 120t + 13t^2 - \frac{t^3}{3}$   
     (c) 800 lítear  
 6. (a) (i) 4 m   (ii) 16 m  
     (b) (i) 0.7   (ii) -0.8  
     (c) (i)  $\frac{100}{3}$    (ii)  $\frac{500}{27}$  m  
     (d)  $\frac{3125}{6} \text{m}^2$   
     (e) (i)  $(15 + 5\sqrt{33}, 12)$   
         (ii)  $a = 20, b = 15 + 5\sqrt{33}; R = 60\sqrt{33} - 60$   
 7. (a)  $2 + e^x + e^{-x}$   
     (b)  $y = -\frac{3}{e^x} - e^x + 8$   
     (c)  $\frac{e^4}{2} + \frac{1}{e^2} - \frac{3}{2}$



# Téacs & Trialacha 7

**AN ARDTEISTIMÉIREACHT**

**AN tARDLEIBHÉAL**

**SNÁITHE 5**

**FEIDHMEANNA AGUS**

**AN CALCALAS**



Scriobhadh *Téacs & Trialacha 7 – Tionscadal Mata, Snáithe 5* go speisialta chun freastal ar dhaltaí a bheidh ag gabháil do scrúdú Matamaitice na hArdteistiméireachta ar an Ardleibhéal ón mbliain 2014 ar aghaidh. Tá saintaithí na mblianta ag na húdair ar an ábhar. Agus an leabhar nua seo á leagan amach chuathas i gcomhairle leis na múinteoirí sna scoileanna piolótacha agus tugadh aird faoi leith ar riachtanais na ndaltaí.

- Tá réimse mór ceisteanna sa leabhar agus iad cumtha go cliste samhláioch. Treoráonn siad daltaí go dtí caighdeán an scrúdaithe
- Tá na ceisteanna scriofa sa tslí go gcuirfidh siad ar dhaltaí scileanna réitithe fadhbanna a fhorbairt
- Tá na ceisteanna curtha i gcomhthéacs an ghnáthshaoil ar mhaithe le húsáid na matamaitice sa chomhthéacs sin a léiriú
- Is iad riachtanais na ndaltaí atá chun cinn sa leabhar, d'fhoinn iad a spreagadh agus chun misneach a thabhairt dóibh
- Tá cur amach le fada ag idir mhúinteoirí agus daltaí ar an tsraith **Téacs & Trialacha** agus muinin acu as na leabhair dá réir
- Ag deireadh gach caibidle tá cleachtaí súil siar ina bhfuil trí chineál ceisteanna:
  - (a) Croícheisteanna (b) Ardcheisteanna agus (c) Freagraí níos faide
- Tugtar na freagraí ar fad i gcúl an leabhair

An Cló Ceilteach

Aonad 16, Eastát Tionsclaiochta an Droichid Órga,

Inse Chór, BÁC 8.

[www.celticpress.ie](http://www.celticpress.ie)