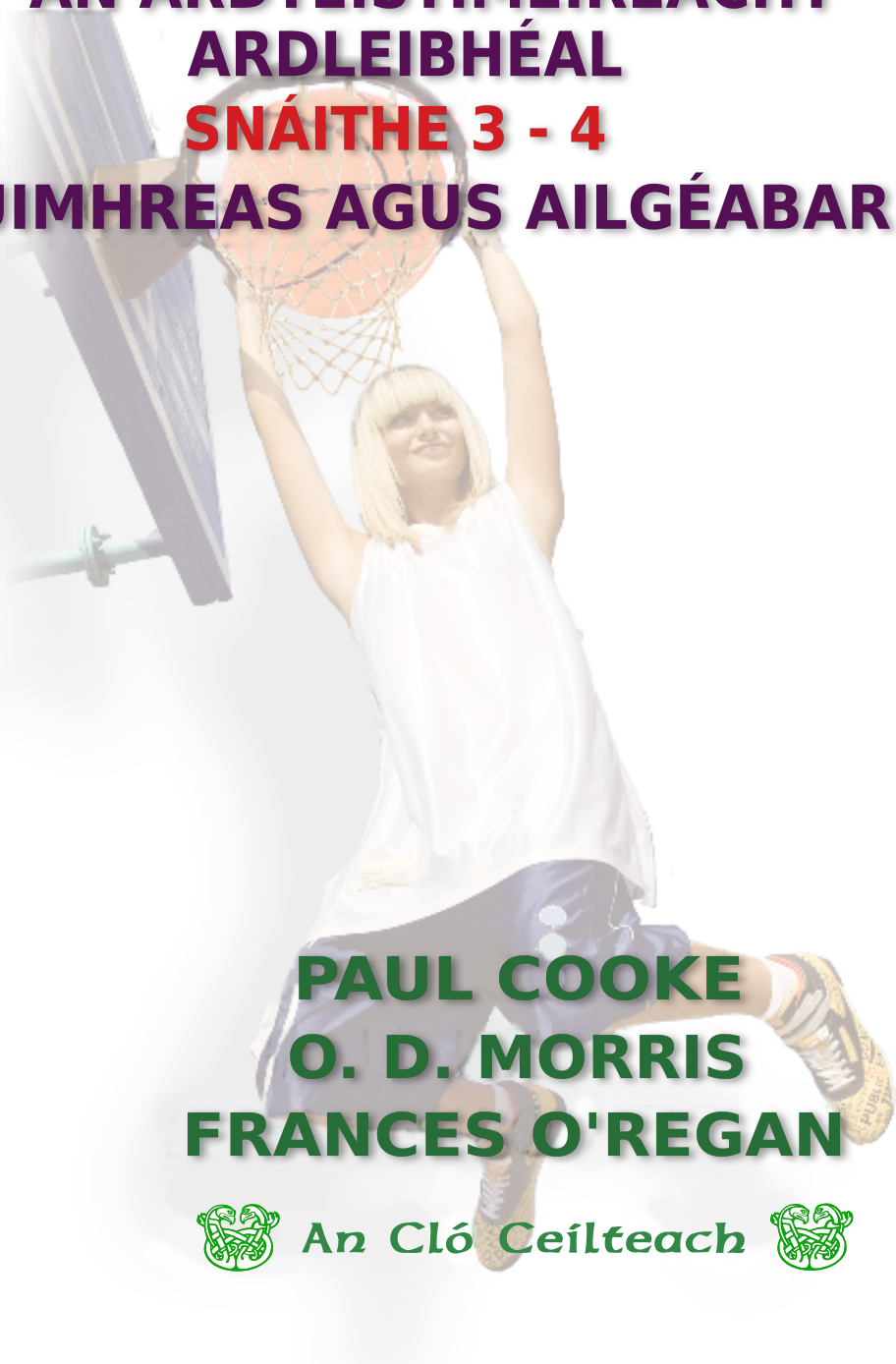
TIONSCADAL MATA

Téacs 7 Trialacha 6

AN ARDTEISTIMÉIREACHT ARDLEIBHÉAL

SNÁITHE 3 - 4

UIMHREAS AGUS AILGÉABAR



PAUL COOKE
O. D. MORRIS
FRANCES O'REGAN

An Cló Ceilteach

Is aistriúchán é seo ar:
Project Maths: Text & Tests 6

An Leagan Béarla

Foilsitheoirí: An Cló Ceilteach (The Celtic Press)
Dearadh: Identikit Design
Leagan amach agus obair ealaíne: Tech-Set Limited, Gateshead

An Leagan Gaeilge

Aistrithe ag an gComhairle um Oideachas Gaeltachta agus Gaelscolaíochta (COGG)
Foireann aistriúcháin: Diarmuid Clifford, Bairbre Ní Ógáin, Muireann Ní Chuív, Clare Rowland, Edel Ní Chorráin
Dearadh agus leagan amach: Barry Hurley, Donny Hurley

An Chomhairle um Oideachas Gaeltachta agus Gaelscolaíochta
22 Plás Mhic Liam, Baile Átha Cliath 2
www.cogg.ie

Clár

Réamhrá

Scríobhadh agus cuireadh an leabhar seo i dtoll a chéile le haghaidh *Tionscadal Mata – Snáithe 3 agus 4* de Chúrsa Ardleibhéil na hArdteistiméireachta a bheidh á scrudú in 2013 agus ar aghaidh. Tá an cur chuige ginearálta i leith theagasc na matamaitice, mar atá sonraithe sna torthaí foghlama le haghaidh *Tionscadal Mata*, le sonrú sa leabhar. Spreagann sé ní hamháin forbairt ar eolas agus scileanna matamaiticiúla na ndaltaí ach, ina theannta sin, forbairt ar an tuiscint a theastaíonn chun na scileanna sin a chur i bhfeidhm.

Tá réimse sármhaith ceisteanna ar gach topaic ar fáil, ceisteanna atá scríofa le samhlaíocht agus a thabharfaidh dúshlán na ndaltaí. Cabhróidh na ceisteanna leis na daltaí chun an méid atá siad a dhéanamh a thuiscint agus chun a gcuid scileanna i réiteach fadhbanna a fhorbairt. Tá dóthain ceisteanna, a chuimsíonn gach pointe ar an scála deacrachta, curtha ar fáil chun riachtanais fhormhór mór na ndaltaí ag an leibhéal

An dearadh spreagúil lándaite, mar aon leis an méid mór léaráidí dea-thógtha, ba cheart go gcabhróidís le tuiscin an dalta ar an topaic a bhfuil sé/sí ag déanamh staidéir uirthi. Ag tús gach caibidle tá liosta dar teideal *Focail Thábhachtacha*. Beifear ag súil leis go mbeidh na focail sin ar eolas ag na daltaí, agus tuiscint acu orthu, faoin am a mbíonn an chaibidil críochnaithe. Ag deireadh gach caibidle tá cleachtaí súil siar ina bhfuil trí chuid: (a) Croícheisteanna (b) Ardcheisteanna agus (c) Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide. Bíonn na ceisteanna sin grádaithe in ord deacrachta agus, dá bhrí sin, cuireann siad ar chumas an dalta dul siar ar na rudaí bunúsacha a bhaineann le topaic ar bith sula dtugann sé/sí aghaidh ar na cleachtaí níos dúshlánaí.

Paul Cooke
O.D. Mnóris
Frances O'Regan
Iúil 2012

Ailgéabar 1

caibidil 1

Focail thábhachtacha

iltéarmach **slonn** **cothromóid** **athróg** **líneach** **cearnach** **ciúbach**
ag forbairt **céim** **fachtóirí** **ionannas** **i dtéarmaí** **comhuaineach**

Mír 1.1 Sloinn iltéarmacha

Déantar sloinn iltéarmacha nuair a shuimítear **mórán** téarmaí ailgéabracha a bhfuil **cumhachtaí deimhneacha slánuimhriúla** acu.

Is slonn iltéarmach é $5x^3 - 3x^2 + 4x - 6$

Ceithre **théarma** atá ann: $5x^3$, $-3x^2$, $4x$ agus -6.

Céim iltéarmaigh, sin séan na cumhachta is airde in x.

Bíonn téarma amháin i slonn **aontéarmach**.

Bíonn dhá théarma i slonn **déthéarmach**.

Bíonn trí théarma i slonn **tríthéarmach**.

(a) Iltéarmach **líneach** is ea $4x - 6$, áit arb é 1 an chumhacht (céim) is airde a bhfuil x inti.
(b) Iltéarmach **cearnach** de chéim 2 is ea $-3x^2 + 4x - 6$.
(c) Iltéarmach **ciúbach** de chéim 3 is ea $5x^3 - 3x^2 + 4x - 6$.

Scríobhtar gach iltéarmach in ord (i) cumhachtaí laghdaitheacha de chuid x, m.sh. $5x^3 - 3x^2 + 4x - 6$,
nó (ii) cumhachtaí méadaitheacha de chuid x, m.sh. $9 + 3x - 4x^2$.

Is é **comhéifeacht** x^3 ná líon na x^3 i slonn.

In $4x^3 - 2x^2 + 5x - 6$, is é 4 comhéifeacht x^3, is é -2 comhéifeacht x^2, is é 5 comhéifeacht x agus is é -6 an **téarma tairiseach**.

1. Sloinn iltéarmacha a shuimiú le chéile agus a dhealú ó chéile

Seasann gach téarma in iltéarmach do chainníocht ar leith, m.sh. 8, $6x$, $4x^2$.

Nuair a shimplímid slonn, ba cheart na téarmaí cosúla uile a chur in aon téarma amháin.

Sampla 1

Forbair agus simpligh gach ceann de na sloinn seo a leanas.

(i) $7(x^3 + 2x^2 - 5x) - 2(2 + 3x + 4x^2 - 2x^3)$

(ii) $3x^2(4x^2 - 5x + 6) + 4x(8x^3 - 2x - 3)$

(i) $7(x^3 + 2x^2 - 5x) - 2(2 + 3x + 4x^2 - 2x^3) = 7x^3 + 14x^2 - 35x - 4 - 6x - 8x^2 + 4x^3$
$= 11x^3 + 6x^2 - 41x - 4$

(ii) $3x^2(4x^2 - 5x + 6) + 4x(8x^3 - 2x - 3) = 12x^4 - 15x^3 + 18x^2 + 32x^4 - 8x^2 - 12x$
$= 44x^4 - 15x^3 + 10x^2 - 12x$

2. Sloinn iltéarmacha a iolrú faoina chéile

Chun sloinn ailgéabracha a iolrú, úsáidimid dlí an dáilte, i.e. $a(b + c) = ab + ac$.

Sampla 2

Simpligh é seo a leanas: $(x - 5)(2x^2 - 3x + 6)$

$$\begin{aligned}(x - 5)(2x^2 - 3x + 6) &= x(2x^2 - 3x + 6) - 5(2x^2 - 3x + 6)\\ &= 2x^3 - 3x^2 + 6x - 10x^2 + 15x - 30\\ &= 2x^3 - 13x^2 + 21x - 30\end{aligned}$$

Nóta: Go minic, tugtar **forbairt** ar shloinn iltéarmacha a iolrú.

3. Slánchearnóga

Slánchearnóg a thugtar ar aon iltéarmach a scríobhfaí san fhoirm $(x + a)^2$.

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a)\\ &= (x)(x + a) + (a)(x + a)\\ &= x^2 + ax + ax + a^2\\ &= x^2 + 2ax + a^2\end{aligned}$$

Ar an gcaoi chéanna, $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

M.sh. $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3) + (3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

Sampla 3

Glac leis gur slanchearnóg é $25x^2 + px + 16$ agus $p > 0$. Faigh luach p.

Ó tá $25x^2 = (5x)^2$ agus $16 = (4)^2$, $\therefore$ $25x^2 + px + 16 = (5x + 4)^2$

$\therefore$ $2(5x)(4) = px$

$\therefore$ $40x = px$ $\Rightarrow$ $p = 40$.

(**Nóta:** $16 = (-4)^2$ $\therefore$ $2(5x)(-4) = px$ $\Rightarrow$ $p = -40$, nach bhfuil bailí mar $p > 0$)

4. $(x-a)(x+a)$ a fhorbairt

Tá forbairt $(x - a)(x + a) = x^2 + ax - ax - a^2$
$= x^2 - a^2$

$$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$$

E.g. $(a - 5b)(a + 5b) = a^2 - 5ab + 5ab - (5b)^2 = a^2 - (5b)^2$
$= a^2 - 25b^2$

Tugann an fhorbairt seo slonn déthéarmach dúinn ar a dtugtar an **difríocht idir dhá chearnóg**.
Beidh tábhacht leis an toradh seo nuair a theastaíonn uainn slonn san fhoirm $a^2 - b^2$ a fhachtóiriú, mar a fheicfimid níos faide anonn sa chaibidil.

5. Sloinn ailgéabracha a roinnt ar a chéile

Bíonn foirmeacha éagsúla ar chothromóidí ailgéabracha. Is féidir roinnt díobh a shimpliú mar a dhéantar sna cásanna seo a leanas.

Cás 1. Is fachtóir de gach téarma den uimhreoir é an t-ainmneoir.

(i) $$\frac{6x^3 - 8x^2y + 4xy^2 + 2x^2}{2x} = \frac{6x^3}{2x} - \frac{8x^2y}{2x} + \frac{4xy^2}{2x} + \frac{2x^2}{2x} = 3x^2 - 4xy + 2y^2 + x$$

Cás 2. Is ceann d'fhachtóirí an uimhreora é an t-ainmneoir.

(ii) $$\frac{6x^2 + 5xy + y^2}{(2x + y)} = \frac{(3x + y)(2x + y)}{(2x + y)} = 3x + y$$

Cás 3. Is féidir an t-uimhreoir a roinnt ar an ainmneoir ach roinnt fhada a úsáid.

(iii) $$\frac{2x^3 - 9x^2 + 10x - 3}{(x - 3)} = 2x^2 - 3x + 1$$ ag úsáid roinnt fhada.

Roinnt fhada

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline
x - 3 \,\big) & 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \\
 & 2x^3 - 6x^2 \text{ (dealaigh)} \\ \hline
 & \quad -3x^2 + 10x - 3 \\
 & \quad -3x^2 + 9x \text{ (dealaigh)} \\ \hline
 & \qquad x - 3 \\
 & \qquad x - 3 \quad \text{(dealaigh)} \\ \hline
\end{array}$$

… roinn $2x^3$ ar x chun $2x^2$ a fháil
… iolraigh $2x^2$ faoin ainmneoir
… roinn $-3x^2$ ar x chun $-3x$ a fháil
… iolraigh $-3x$ faoin ainmneoir
… roinn x ar x chun 1 a fháil

Uaidh sin, $$\frac{2x^3 - 9x^2 + 10x - 3}{(x - 3)} = 2x^2 - 3x + 1.$$

Sampla 4

Roinn $(2x^3 - 11x + 6)$ ar $(2x^3 + 4x - 3)$.

Ós rud é nach bhfuil aon chumhacht de chuid x^2 san iltéarmach ciúbach seo, is maith an nós é an t-iltéarmach a athscríobh agus spás a fhágáil do chomhéifeachtaí x^2 mar seo:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
2x^2 + 4x - 3 & 2x^3 \qquad\quad - 11x + 6 \\
 & \underline{2x^3 + 4x^2 - 3x} \\
 & \qquad -4x^2 - 8x + 6 \\
 & \qquad \underline{-4x^2 - 8x + 6}
\end{array}
$$

… roinn $2x^3$ ar $2x^2$ chun x a fháil

… iolraigh x faoi $2x^2 + 4x - 3$ agus ansin dealaigh

… roinn $-4x^2$ ar $2x^2$ chun -2 a fháil

… iolraigh -2 faoi $2x^2 + 4x - 3$ agus ansin dealaigh

$\therefore \quad (2x^3 - 11x + 6) \div (2x^2 + 4x - 3) = x - 2$

Tabhair faoi deara freisin, nuair a roinnimid $2x^3 - 11x + 6$ ar $x - 2$, go bhfaighimid $2x^2 + 4x - 3$.

Is iad $(x - 2)$ agus $(2x^2 + 4x - 3)$ fachtóirí an iltéarmaigh $2x^3 - 11x + 6$

i.e. $2x^3 - 11x + 6 = (x - 2)(2x^2 + 4x - 3)$.

Úsáidfimid an t-airí seo ar bhealach níos iomláine sa chaibidil a bhaineann le fachtóiriú.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 4x - 3 \\
\hline
x - 2 & 2x^3 \qquad\quad - 11x + 6 \\
 & \underline{2x^3 - 4x^2} \\
 & \qquad 4x^2 - 11x + 6 \\
 & \qquad \underline{4x^2 - 8x} \\
 & \qquad\qquad -3x + 6 \\
 & \qquad\qquad \underline{-3x + 6}
\end{array}
$$

Cleachtadh 1.1

1. Tugtar an t-iltéarmach $4x^3 + 3x^2 - 9x + 5$. Scríobh síos

(i) comhéifeacht x^2

(ii) comhéifeacht x

(iii) an téarma atá neamhspleách ar x (an téarma tairiseach).

2. Luaigh céim gach ceann de na sloinn iltéarmacha seo a leanas.

(i) $-3x^2 + 5x - 1$ (ii) $4x^3 - 4x^2 + 9x + 3$ (iii) $7 + 3x - 3x^3 + 6x^4$

3. Tabhair dhá fháth nach iltéarmach é $3x^2 - \dfrac{4}{x} + x^{\frac{3}{2}}$

4. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas.

(i) $3x^2 - 6x + 7 + 5x^2 + 2x - 9$

(ii) $x^3 - 4x^2 - 5x + 3x^3 + 6x^2 - x$

(iii) $x(x + 4) + 3x(2x - 3)$

(iv) $3(x^2 - 7) + 2x(3x - 1) - 7x + 2$

5. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas.

(i) $3x^2(4x + 2) + 5x^2(2x - 5)$

(ii) $x^3(x - 2) + 4x^3(2x - 6)$

(iii) $x(x^3 + 4x^2 - 7x) + 3x^2(2x^2 - 3x + 4)$

(iv) $3x(x^2 - 7x + 1) + 2x^2(6x - 5)$

6. Forbair gach ceann díobh seo a leanas.

(i) $(x + 4)(2x + 5)$ (ii) $(2x + 3)(x - 2)$ (iii) $(3x - 2)(x + 3)$
(iv) $(3x - 2)(4x - 1)$ (v) $(3x - 1)(2x + 5)$ (vi) $(4x + 1)(2x - 6)$
(vii) $(x - 2)(x + 2)$ (viii) $(2x + 5)(2x - 5)$ (ix) $(ax - by)(ax + by)$

7. Forbair gach ceann de na slánchearnóga seo.

(i) $(x + 2)^2$ (ii) $(x - 3)^2$ (iii) $(x + 5)^2$
(iv) $(a + b)^2$ (v) $(x - y)^2$ (vi) $(a + 2b)^2$
(vii) $(3x - y)^2$ (viii) $(x - 5y)^2$ (ix) $(2x + 3y)^2$

8. Sloinn gach ceann díobh seo san fhoirm $ax^2 + bx + c$.

(i) $(x + \frac{1}{2})^2$ (ii) $8(x - \frac{1}{4})^2$ (iii) $-(1 - x)^2$

9. Cé acu díobh seo a leanas ar slánchearnóga iad? Mínigh do chuid freagraí.

(i) $x^2 + 5x + 25$ (ii) $9x^2 - 6x - 1$ (iii) $4 + 12x + 9x^2$

10. Más slánchearnóg é $25x^2 + tx + 4$ maidir le gach luach ar x, faigh luach t.

11. Más slánchearnóg é $px^2 + 4x + 1$ maidir le gach luach ar x, faigh luach p.

12. Más slánchearnóg é $9x^2 + 24x + s$ maidir le gach luach ar x, faigh luach s.

13. Forbair agus simpligh gach ceann díobh seo.

(i) $(x + 2)(x^2 + 2x + 6)$ (ii) $(x - 4)(2x^2 + 3x - 1)$
(iii) $(2x + 3)(x^2 - 3x + 2)$ (iv) $(3x - 2)(2x^2 - 4x + 2)$

14. Taispeáin go bhfuil $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.

15. Fíoraigh go bhfuil $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

16. Faigh comhéifeacht x má fhorbraítear $(2x - 3)(3x^2 - 2x + 4)$.

17. Forbair go hiomlán agus simpligh $(x + 3)(x - 4)(2x + 1)$.

18. Forbair go hiomlán agus simpligh $(x^2 - 3x - 2)(2x^2 - 4x + 1)$.

19. Faigh comhéifeacht x^2 má fhorbraítear $(3x^2 + 5x - 1)(2x^2 - 6x - 5)$.

20. Simpligh gach ceann de na líonta seo a leanas:

(i) $\dfrac{3x + 6}{3}$ (ii) $\dfrac{x^2 + 2x}{x}$ (iii) $\dfrac{3x^3 - 6x^2}{3x}$ (iv) $\dfrac{15x^2y - 10xy^2}{5xy}$

21. Simpligh gach ceann de na líonta seo a leanas:

(i) $\dfrac{6x^2y + 9xy^2 - 3xy}{3xy}$ (ii) $\dfrac{6x^4 - 9x^3 + 12x^2}{3x^2}$

22. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\dfrac{12a^2b}{3ab}$ (ii) $\dfrac{12a^2bc}{3ac}$ (iii) $\dfrac{4xy^2z}{2xy}$ (iv) $\dfrac{3xy}{2} \times \dfrac{4}{6x^2}$

23. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\dfrac{2x^2 + 5x - 3}{2x - 1}$ (ii) $\dfrac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}$ (iii) $\dfrac{8x^2 + 8x - 6}{4x - 2}$

24. Roinn gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 \div (x - 1)$ (ii) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 \div (2x - 1)$
(iii) $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4 \div (3x - 4)$ (iv) $4x^3 - 7x^2 - 21x + 18 \div (x - 3)$
(v) $x^3 - 22x + 15 \div (x + 5)$ (vi) $2x^3 - x^2 - 12 \div (x - 2)$

25. Cuir na hoibríochtaí seo i gcrích:

(i) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 \div (x^2 + 2)$ (ii) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \div (x^2 - 6x + 9)$
(iii) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \div (x^2 + x - 2)$ (iv) $5x^3 + 14x^2 + 7x - 2 \div (5x^2 + 4x - 1)$

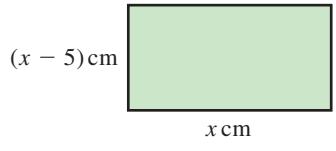
26. Roinn gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $x^3 - 8 \div (x - 2)$ (ii) $8x^3 - 27y^3 \div (2x - 3y)$

Mír 1.2 Feidhmeanna iltéarmacha, réamheolas

Tagann feidhmeanna iltéarmacha chun cinn nuair a bhímid ag plé le fadhbanna laethúla.

Bíodh x mar fhad dronuilleoige.



Má tá leithead na dronuilleoige 5 cm níos giorra ná a fad, ansin is é (x − 5) cm an leithead.

Braitheann A, achar na dronuilleoige, ar an bhfad agus ar an leithead agus, dá réir sin, ar x.

Scríobhtar siombail an achair a bhraitheann ar x mar $A(x)$.

Mar sin, $A(x) = x(x - 5) = x^2 - 5x$. De réir mar a athraíonn x, athraíonn an t-achar A.

An **athróg neamhspleách** a thugtar ar x agus an **athróg spleách** a thugtar ar $A(x)$.

Is é $A(x)$ an t-iltéarmach cearnach $x^2 - 5x$ de chéim 2.

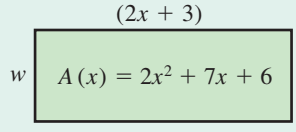
Tugaimid faoi deara, má tá $x = 10$ cm, go bhfuil $A(10) = (10)^2 - 5(10) = 50$ cm^2.

Tugaimid faoi deara freisin gurb é $(x - 5) \Rightarrow x - 5 > 0$
$\Rightarrow x > 5$ cm

Sampla 1

Is é $(2x + 3)$ cm fad dronuilleoige. Má thugann an fheidhm iltéarmach $A(x) = 2x^2 + 7x + 6$ achar na dronuilleoige, faigh

(a) slonn do leithead na dronuilleoige
(b) slonn do $P(x)$, imlíne na dronuilleoige sin
(c) íosluach x.



Bíodh w mar leithead na dronuilleoige.

(a) Achar $A(x) = 2x^2 + 7x + 6 = w(2x + 3)$

$$\therefore \quad w = \frac{2x^2 + 7x + 6}{(2x + 3)} = \frac{(2x + 3)(x + 2)}{(2x + 3)} = (x + 2).$$

(b) An imlíne $P(x) = 2(2x + 3) + 2(x + 2) = 4x + 6 + 2x + 4 = 6x + 10.$

(c) Ós é $(2x + 3)$ fad na dronuilleoige,

$$\Rightarrow (2x + 3) > 0$$
$$\Rightarrow x > -1.5$$

Nóta 1: Caithfear glacadh le $A(x)$ mar aon choincheap amháin; ní chiallaíonn sé go n-iolraítear A faoi x.
Ciallaíonn sé go mbraitheann an chainníocht A ar athróg x.

Nóta 2: Is féidir feidhmeanna iltéarmacha a shuimiú le chéile agus a dhealú óna chéile mar a rinneadh thuas, ach na téarmaí cosúla a bhailiú agus a shimpliú.

Sampla 2

Glac le $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$ agus $g(x) = 5x^3 + 14x^2 + 7x - 2$. Faigh

(a) $2f(x) - g(x)$ agus luaigh a chéim
(b) $f(x) + 2g(x)$ agus luaigh a chéim.

(a) $2f(x) - g(x) = 2(3x^3 - 4x^2 - 3x + 4) - (5x^3 + 14x^2 + 7x - 2)$
$= 6x^3 - 8x^2 - 6x + 8 - 5x^3 - 14x^2 - 7x + 2$
$= x^3 - 22x^2 - 13x + 10$, céim 3

(b) $f(x) + 2g(x) = (3x^3 - 4x^2 - 3x + 4) + 2(5x^3 + 14x^2 + 7x - 2)$
$= 3x^3 - 4x^2 - 3x + 4 + 10x^3 + 28x^2 + 14x - 4$
$= 13x^3 + 24x^2 + 11x$, céim 3

Luach feidhmeanna iltéarmacha a fháil

Faighimid luach feidhme iltéarmaí ach luach tugtha a chur in ionad na hathróige neamhspleáiche agus í a shimpliú.

Má tá $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$, ansin $p(1) = 2(1)^2 - 5(1) + 6 = 3$
agus $p(-3) = 2(-3)^2 - 5(-3) + 6 = 39.$

Is féidir athróg nua a thabhairt isteach ar an mbealach céanna.

Má tá $p(x) = 2x^2 - 5x + 6,$

$p(t) = 2t^2 - 5t + 6.$

Freisin $p(t^2) = 2(t^2)^2 - 5(t^2) + 6 = 2t^4 - 5t^2 + 6$

Sampla 3

Is eol do dhéantóir péinte go dtugann an fhoirmle $C(x) = 0.001x^2 + 0.1x + 5$ an costas laethúil (€C) a bhaineann le x lítear péinte a tháirgeadh.

(a) Luaigh céim $C(x)$.

(b) Faigh costas laethúil (i) 100 ℓ péinte (ii) 400 ℓ péinte a tháirgeadh.

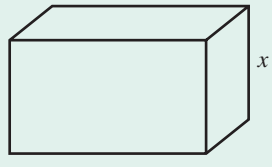
(a) Is é 2 céim $C(x)$.

(b) (i) $C(100) = 0.001(100)^2 + 0.1(100) + 5 =$ €25

(ii) $C(400) = 0.001(400)^2 + 0.1(400) + 5 =$ €205.

Sampla 4

Tá toisí $x + 3$, $x + 1$ agus x ar bhosca oscailte, áit arb é x airde (in cm) an bhosca. Faigh slonn do $S(x)$, achar an dromchla sheachtraigh ar an mbosca, agus uaidh sin, faigh $S(5)$.



Achar na sleasa: $= 2(x)(x + 3) + 2(x)(x + 1)$

$= 2x^2 + 6x + 2x^2 + 2x = 4x^2 + 8x$

Achar an bhoinn: $= (x + 3)(x + 1) = x^2 + 4x + 3$

Achar an dromchla iomláin $S(x) = x^2 + 4x + 3 + 4x^2 + 8x$

$= (5x^2 + 12x + 3)\,\text{cm}^2$

$S(5) = 5(5)^2 + 12(5) + 3 = 188\,\text{cm}^2$

Sampla 5

Tugtar an fheidhm $f(x) = 2x - 4$ i gcás gach $x \in \mathbb{R}$. Faigh

(a) $f(3)$, $f(-2)$, $f(t)$

(b) cad iad luachanna t a fhágann $f(t) = t$.

(a) $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f(3) = 2(3) - 4 = 2$

$f(-2) = 2(-2) - 4 = -8$

$f(t) = 2(t) - 4 = 2t - 4$

(b) $f(t) = t \Rightarrow 2t - 4 = t$

$t - 4 = 0$

$t = 4$

Nóta: Tarlaíonn feidhmeanna iltéarmacha, ina bhfuil níos mó ná athróg neamhspleách amháin, go minic:

Toirt sorcóra $V = \pi.r^2.h$, áit arb é r ga bhonn an tsorcóra agus h airde an tsorcóra.

I dtéarmaí feidhmeanna: $V(r, h) = \pi.r^2.h$,
i.e. braitheann toirt an tsorcóra ar an nga, r, agus ar an airde, h, araon.

Braitheann an toirt V ar dhá athróg neamhspleácha, .i. r, h.
Is é 2 céim an iltéarmaigh seo, an chumhacht (séan) is airde ar cheachtar athróg.

Cleachtadh 1.2

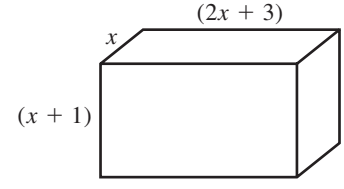
1. Tá slios amháin ar dhronuilleog 4 cm níos faide ná an slios eile.
Abraimis gurb é x fad an tsleasa níos giorra.

Uaidh sin, faigh (i) slonn do $A(x)$, achar na dronuilleoige
(ii) slonn do $P(x)$, imlíne na dronuilleoige.

2. Is é $6x^2 + 4x - 2$ achar dronuilleoige, $A(x)$.
Más é $(3x - 1)$ an fad, faigh

(i) slonn do leithead na dronuilleoige
(ii) slonn do $P(x)$, imlíne na dronuilleoige.

3. Sa léaráid, tugtar toisí (in cm) bosca dhronuilleogaigh oscailte. Faigh



(a) slonn do $V(x)$, toirt an bhosca
(b) slonn do $S(x)$, achar an dromchla sheachtraigh ar an mbosca
(c) luach
(i) $V(x)$ agus (ii) $S(x)$ nuair atá $x = 5$.

4. Má tá $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 4$, faigh

(a) $f(0)$ (b) $f(1)$ (c) $f(-2)$ (d) $f(3a)$

5. Má tá $f(x) = x^2 - 3x + 6$, faigh

(a) $f(0)$ (b) $f(-5)$ (c) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (d) $f\left(\frac{a}{4}\right)$

6. Tá fad $(x - y)$ agus leithead $(2x + 3y)$ ag dronuilleog.
Faigh, i dtéarmaí x agus y, slonn le haghaidh

(a) achar (b) imlíne na dronuilleoige.

7. Tá leithead bosca dhronuilleogaigh oscailte 5 cm níos giorra ná a fhad. Tá airde an bhosca dhá oiread a fhad.
Más é x cm fad an bhosca, faigh
(a) slonn do $V(x)$, toirt an bhosca
(b) slonn do $S(x)$, achar dhromchla iomlán an bhosca (inmheánach agus seachtrach).

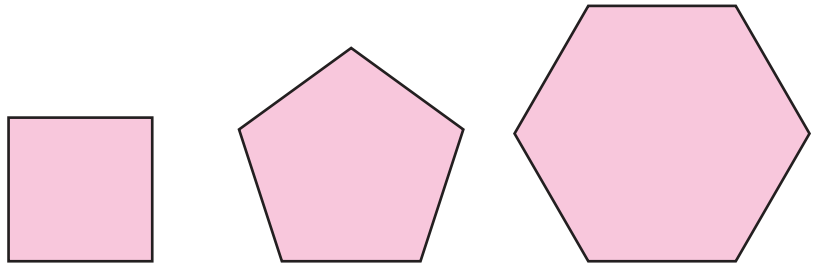
8. Tugann an t-iltéarmach

$$d(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} \text{ líon na dtrasnán, } d\text{, i bpolagán a bhfuil } n \text{ slios air.}$$

Mínigh cad atá i gceist le (i) $d(4)$ (ii) $d(5)$ agus faigh luachanna ar $d(4)$, $d(5)$, $d(6)$.

Déan cóip de gach polagán thíos agus fíoraigh do fhreagra i ngach cás.

Mínigh an fáth a bhfuil $d(3) = 0$.



9. Má tá $f(x) = x + 5$, faigh, i dtéarmaí a, $f(a^2) - 3f(a) + 2$.

10. Má tá $f(x) = x^2 - 3x + 6$, faigh

(i) $f(-2t)$ (ii) $f(t^2)$ (iii) $f(t - 2)$

Luaigh céim gach ceann de na feidhmeanna iltéarmacha in t.

11. Tugtar $V(r, h)$, toirt cóin, dúinn san fhoirmle $V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, áit arb é r an ga agus h airde ingearach an chóin. Faigh

(i) i dtéarmaí π, toirt cóin ar airde dó 21 cm agus ar ga dó 14 cm.

(ii) i dtéarmaí r agus π, toirt cóin a bhfuil a airde ar comhfhad le r, ga an chóin

(iii) i dtéarmaí h agus π, toirt cóin má tá ga an bhoinn dhá oiread níos mó ná an airde h.

12. Má tá $f(x) = 3x + 6$, faigh $f(10)$.

Má tá $f(x) = 2x + 8$, faigh $f(10)$.

Féach ar phatrún na dtorthaí thuas agus uaidh sin, scríobh $g(x)$ san fhoirm $ax + b$, má tá $g(10) = 47$.

13. Úsáid an fhoirmle $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ chun luach l, i dtéarmaí π, a fháil má tá $T = 4s$ agus $g = 10\,\text{m s}^{-1}$.

14. Úsáid an fhoirmle $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ chun luach r a fháil má tá $V = \frac{792}{7}\text{m}^3$ agus $\pi = \frac{22}{7}$.

15. Gach maidin, croitheann gach dalta sa rang lámh le gach dalta eile mar bheannú.

Tugann an slonn $H(x) = \frac{x}{2}(x - 1)$ líon na gcroití láimhe, H, idir x dalta.

Úsáid an fhoirmle sin chun iad seo a fháil:

(i) líon na gcroití láimhe idir 5 daltaí
(ii) líon na gcroití láimhe idir 6 daltaí
(iii) líon na gcroití láimhe idir 10 daltaí.

Úsáid patrún a eascraíonn as seo, nó úsáid bealach eile, chun líon na ndaltaí sa seomra maidin áirithe a fháil, má tugadh 136 croitheadh láimhe an mhaidin sin.

Mír 1.3 Sloinn ailgéabracha a fhachtóiriú

Roinneann **fachtóir** ailgéabrach isteach in iltéarmach go cothrom, gan aon fhuílleach a fhágáil.

Is fachtóir é (x − 3) de $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3$
mar $(2x^3 - 9x^2 + 10x - 3) \div (x - 3) = (2x^2 - 3x + 1)$.

Is fachtóirí iad (x − 4) agus (x + 3) araon de $x^2 - x - 12$ mar

(i) $(x^2 - x - 12) \div (x - 4) = (x + 3)$ agus (ii) $(x^2 - x - 12) \div (x + 3) = (x - 4)$.

Chun cothromóidí ailgéabracha a réiteach, is gá bheith ábalta sloinn ailgéabracha éagsúla a réiteach ar dtús.

Is féidir a lán teicnící éagsúla a úsáid chun sloinn a fhachtóiriú agus léirítear iad seo thíos.

1. An fachtóir coiteann is airde a aimsiú trí iniúchadh

(i) $3x^2 - 9xy = 3x(x - 3y) \Rightarrow$ is iad $3x$ agus (x − 3y) na fachtóirí

(ii) $2a^2b - 4ab^2 + 12\,abc = 2ab(a - 2b + 6c) \Rightarrow$ is iad $2ab$ agus $(a - 2b + 6c)$ na fachtóirí

2. Fachtóiriú trí théarmaí a ghrúpáil

$$\begin{aligned} 6x^2y + 3xy^2 - 12x - 6y &= 3xy(2x + y) - 6(2x + y) \\ &= (2x + y)(3xy - 6) \\ &\Rightarrow \text{is iad } (2x + y) \text{ agus } (3xy - 6) \text{ na fachtóirí} \end{aligned}$$

3. An difríocht idir dhá chearnóg

Ó tá $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, is iad $(x + y)$ agus $(x - y)$ fachtóirí $x^2 - y^2$.

Nóta: Nuair a shimplímid líonta, tá sé tábhachtach bheith ábalta sloinn, ina bhfuil an difríocht idir dhá chearnóg, a fhachtóiriú go hiomlán.

(i) $c^2 - d^2 = (c - d)(c + d)$

(ii) $x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2 = (x - 3y)(x + 3y)$

(iii) $x^2 - 8y^2 = x^2 - (\sqrt{8}y)^2 = (x - \sqrt{8}y)(x + \sqrt{8}y)$

(iv) $x - 9 = (\sqrt{x})^2 - 3^2 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)$

Sampla 1

Déan iad seo a fhachtóiriú go hiomlán: (i) $x^4 - y^4$ (ii) $12x^2 - 75y^2$

(i) $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2$ … scríobh mar an difríocht idir dhá chearnóg

$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ … difríocht idir dhá chearnóg arís

$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

(ii) $12x^2 - 75y^2 = 3(4x^2 - 25y^2)$ … aimsigh an fachtóir coiteann is airde trí iniúchadh

$= 3[(2x)^2 - (5y)^2]$ … scríobh mar an difríocht idir dhá chearnóg

$= 3\,(2x - 5y)(2x + 5y)$

Sampla 2

Simpligh $\dfrac{x^2 - 9y^2}{3x + 9y}$

$$\frac{x^2 - 9y^2}{3x + 9y} = \frac{(x - 3y)(x + 3y)}{3(x + 3y)} = \frac{x - 3y}{3}$$

4. Sloinn chearnacha a fhachtóiriú

Tá dhá shlí ann chun sloinn chearnacha san fhoirm $ax^2 + bx + c = 0$ a fhachtóiriú:

(i) triail is earráid **nó**

(ii) foirmle na cothromóide cearnaí, má tá na comhéifeachtaí mór nó éagóimheasta.

(i) $x^2 + 3x - 18 = (x \pm ?)(x \pm ?)$ … péirí fachtóirí -18 uile a thriail

$= (x + 6)(x - 3)$ … $(\pm 1, \pm 18), (\pm 2, \pm 9), (\pm 3, \pm 6)$ … is é $(+6, -3)$ an péire fachtóirí a thugann $+3$ don téarma láir nuair a shuimítear iad

(ii) $3x^2 - 17x + 20 = ax^2 + bx + c \rightarrow a = 3, b = -17, c = 20.$

Má úsáidimid $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4.3.20}}{2.3} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{17 \pm 7}{6} = \left(\frac{24}{6} \text{ or } \frac{10}{6}\right) = \left(4 \text{ or } \frac{5}{3}\right)$$

Má tá $x = 4$, ansin is é $(x - 4)$ an fachtóir.

Agus má tá $x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow 3x = 5$, dá bhrí sin is é $(3x - 5)$ an dara fachtóir.

$\therefore \quad 3x^2 - 17x + 20 = (3x - 5)(x - 4).$

Má tá $ax^2 + bx + c = 0$,

ansin $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Sampla 3

Fachtóirigh (i) $3x^2 + 10x + 8$ (ii) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$

(i) $3x^2 + 10x + 8 = (3x \pm ?)(x \pm ?)$ … is iad $(\pm 1, \pm 8)$, $(\pm 2, \pm 4)$ péirí fachtóirí 8

$= (3x + 4)(x + 2)$ … a thugann téarma láir $+10x$

(ii) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = ax^2 + bx + c \rightarrow a = 1, b = -2\sqrt{2}, c = -6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 - 4(1)(-6)}}{2.1} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{32}}{2}$$

Mar sin, $x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \pm 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ nó $(-\sqrt{2})$.

Is iad $(x + \sqrt{2})$ agus $(x - 3\sqrt{2})$ na fachtóirí.

5. Sloinn san fhoirm $x^3 - y^3$ agus $x^3 + y^3$ a fhachtóiriú

Ach úsáid a bhaint as roinnt fhada, is féidir a thaispeáint gur fachtóir de chuid $x^3 - y^3$ é $(x - y)$ agus tugann sé seo an dara fachtóir dúinn, $x^2 + xy + y^2$.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + xy + y^2 \\ \hline x - y & x^3 \qquad\qquad\quad - y^3 \\ & \underline{x^3 - x^2y} \\ & \quad + x^2y \qquad\quad - y^3 \\ & \quad \underline{+ x^2y - xy^2} \\ & \qquad\quad + xy^2 - y^3 \\ & \qquad\quad \underline{+ xy^2 - y^3} \end{array}$$

Mar sin, scríobhaimid

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Ar an gcaoi chéanna, tá sé seo againn:

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Más féidir linn iltéarmach a scríobh i gceann amháin de na foirmeacha seo, is féidir linn na péirí fachtóirí seo a úsáid mar theimpléid chun fachtóirí an iltéarmaigh a aimsiú.

Mar shampla, scríobhaimid

(i) $27x^3 + y^3 = (3x)^3 + y^3$

(ii) $64x^3 - 125y^3 = (4x)^3 - (5y)^3$.

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Freisin

$(ax)^3 - (by)^3 = (ax - by)(a^2x^2 + abxy + b^2y^2)$

$(ax)^3 + (by)^3 = (ax + by)(a^2x^2 - abxy + b^2y^2)$

$(ax)^2 - (by)^2 = (ax - by)(ax + by)$

Sampla 4

Fachtóirigh (i) $a^3 + 8b^3$ (ii) $64c^3 - 125d^3$

(i) $a^3 + 8b^3 = a^3 + (2b)^3$ … nóta: bíodh $x = a$ agus $y = 2b$ sa bhosca ar an leathanach roimhe seo

$= (a + 2b)(a^2 - 2ab + b^2)$

(ii) $64c^3 - 125d^3 = (4c)^3 - (5d)^3$ … nóta: bíodh $x = 4c$ agus $y = 5d$

$= (4c - 5d)[(4c)^2 + (4c)(5d) + (5c)^2]$

$= (4c - 5d)(16c^2 + 20cd + 25c^2)$

Cleachtadh 1.3

Bain leas as an bhfachtóir coiteann is airde chun gach ceann díobh seo a fhachtóiriú:

1. $5x^2 - 10x$ **2.** $6ab - 12bc$ **3.** $3x^2 - 6xy$

4. $2x^2y - 6x^2z$ **5.** $2a^3 - 4a^2 + 8a$ **6.** $5xy^2 - 20x^2y$

7. $2a^2b - 4ab^2 + 12abc$ **8.** $3x^2y - 9xy^2 + 15xyz$ **9.** $4\pi r^2 + 6\pi rh$

Grúpáil tearmaí chun gach ceann díobh seo a fhachtóiriú:

10. $3a(2b - c) - 4(2b - c)$ **11.** $x^2 - ax + 3x - 3a$

12. $2c^2 - 4cd + c - 2d$ **13.** $8ax + 4ay - 6bx - 3by$

14. $7y^2 - 21by + 2ay - 6ab$ **15.** $6xy + 12yz - 8xz - 9y^2$

16. $6x^2 - 3y(3x - 2a) - 4ax$ **17.** $3ax^2 - 3ay^2 - 4bx^2 + 4by^2$

Úsáid an difríocht idir dhá chearnóg chun gach ceann díobh seo a fhachtóiriú:

18. $a^2 - b^2$ **19.** $x^2 - 4y^2$ **20.** $9x^2 - y^2$

21. $16x^2 - 25y^2$ **22.** $36x^2 - 25$ **23.** $1 - 36x^2$

24. $49a^2 - 4b^2$ **25.** $x^2y^2 - 1$ **26.** $4a^2b^2 - 16c^2$

27. $3x^2 - 27y^2$ **28.** $45 - 5x^2$ **29.** $45a^2 - 20$

30. $(2x + y)^2 - 4$ **31.** $(3a - 2b)^2 - 9$ **32.** $a^4 - b^4$

Fachtóirigh gach ceann de na sloinn chearnacha seo:

33. $x^2 + 9x + 14$ **34.** $2x^2 + 7x + 3$ **35.** $2x^2 + 11x + 14$

36. $x^2 - 9x + 14$ **37.** $x^2 - 11x + 28$ **38.** $2x^2 - 7x + 3$

39. $3x^2 - 17x + 20$ **40.** $7x^2 - 18x + 8$ **41.** $2x^2 - 7x - 15$

42. $3x^2 + 11x - 20$ **43.** $12x^2 - 11x - 5$ **44.** $6x^2 + x - 15$

45. $3x^2 + 13x - 10$ **46.** $6x^2 - 11x + 3$ **47.** $36x^2 - 7x - 4$

48. $15x^2 - 14x - 8$ **49.** $6y^2 + 11y - 35$ **50.** $12x^2 + 17xy - 5y^2$

51. Úsáid foirmle na cothromóide cearnaí chun gach ceann díobh seo a fhachtóiriú:

(i) $x^2 + 3\sqrt{3}x + 6$ (ii) $x^2 + 2\sqrt{5}x - 15$ (iii) $2x^2 - 5\sqrt{2}x - 6$

52. Úsáid suim dhá chiúb agus an difríocht idir dhá chiúb chun gach ceann díobh seo a fhachtóiriú:

(i) $a^3 + b^3$ (ii) $a^3 - b^3$ (iii) $8x^3 + y^3$

53. (i) $27x^3 - y^3$ (ii) $x^3 - 64$ (iii) $8x^3 - 27y^3$

54. (i) $8 + 27k^3$ (ii) $64 - 125a^3$ (iii) $27a^3 + 64b^3$

55. (i) $a^3 - 8b^3c^3$ (ii) $5x^3 + 40y^3$ (iii) $(x + y)^3 - z^3$

Mír 1.4 Codáin ailgéabracha a shimpliú

Déantar codáin ailgéabracha a shuimiú, a dhealú, a iolrú agus a roinnt, mar a dhéantar le codáin uimhreacha.

Súil siar:

(i) $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$ (ní féidir codáin a shuimiú nó a dhealú ach amháin nuair a bhíonn an t-ainmneoir céanna acu.)

(ii) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$ (iolráitear codáin ach na huimhreoirí agus na hainmneoirí a iolrú astu féin)

(iii) $\frac{2}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$ (roinntear codáin ach an roinnt a athrú ina toradh.)

$$\frac{{}^{2}\cancel{6} \times 12}{{}_{1}\cancel{3}} = 24 \qquad \frac{{}^{2}\cancel{6} + \cancel{12}^{4}}{{}_{1}\cancel{3}} = 6$$

Ar an gcaoi chéanna (maidir le téarmaí ailgéabracha):

(i) $$\frac{2}{x+1} - \frac{2x}{2x+3} = \frac{2(2x+3)}{(x+1)(2x+3)} - \frac{2x(x+1)}{(x+1)(2x+3)}$$ … comhainmneoir a fháil

$$= \frac{4x + 6 - 2x^2 - 2x}{(x+1)(2x+3)} = \frac{-2x^2 + 2x + 6}{(x+1)(2x+3)}$$ … an t-uimhreoir a shimpliú

(ii) $$\frac{2}{x+1} \times \frac{2x}{2x+3} = \frac{4x}{(x+1)(2x+3)}$$ … uimhreoirí a iolrú agus ainmneoirí a iolrú

(iii) $$\frac{2}{x+1} \div \frac{2x}{2x+3} = \frac{2}{x+1} \times \frac{2x+3}{2x} = \frac{2(2x+3)}{2x(x+1)} = \frac{(2x+3)}{x(x+1)}$$ … an roinnt a athrú go hiolrú agus ansin roinnt ar fhachtóir coiteann thuas agus thíos

Mar sin, go hiondúil nuair a bhímid ag obair le codáin ailgéabracha:

(i) Is gá comhainmneoir a bheith againn chun codáin a shuimiú nó a dhealú.

(ii) Ní féidir codán a laghdú (a shimpliú) ach amháin má tá fachtóir coiteann ag an uimhreoir agus ag an ainmneoir.

(iii) Má tá codáin atá suimithe nó dealaithe san ainmneoir nó san uimhreoir, caithfear iad a shimpliú go haon chodán amháin sula leantar ar aghaidh.

(iv) Chun codáin a roinnt, iolraímid faoin ainmneoir inbhéartaithe.

Sampla 1

Simpligh (i) $\dfrac{5ax}{15a + 10a^2}$ (ii) $\dfrac{t^2 + 3t - 4}{t^2 - 16}$ (iii) $\dfrac{\frac{5}{8} + y}{\frac{1}{8}}$

(i) $\dfrac{5ax}{15a + 10a^2} = \dfrac{(\overset{1}{\cancel{5a}})x}{(\underset{1}{\cancel{5a}})(3 + 2a)} = \dfrac{x}{3 + 2a}$

(ii) $\dfrac{t^2 + 3t - 4}{t^2 - 16} = \dfrac{(\overset{1}{\cancel{t + 4}})(t - 1)}{(t - 4)(\underset{1}{\cancel{t + 4}})} = \dfrac{t - 1}{t - 4}$

(iii) $\dfrac{\frac{5}{8} + y}{\frac{1}{8}} = \left(\frac{5}{8} + y\right).8 = 5 + 8y$

Sampla 2

Simpligh gach ceann díobh seo a leanas

(i) $\dfrac{6y}{x(x + 4y)} - \dfrac{3}{2x}$ (ii) $\dfrac{5}{3x - 4} + \dfrac{2x + 5}{3}$

(i) $\dfrac{6y}{x(x + 4y)} - \dfrac{3}{2x} = \dfrac{2(6y)}{2x(x + 4y)} - \dfrac{3(x+4y)}{2x(x + 4y)}$

$= \dfrac{2(6y) - 3(x+4y)}{2x(x + 4y)} = \dfrac{12y - 3x - 12y}{2x(x + 4y)}$

$= \dfrac{-3x}{2x(x + 4y)} = \dfrac{-3}{2(x + 4y)}$

(i) $\dfrac{5}{3x-4}+\dfrac{2x+5}{3} = \dfrac{3(5)}{3(3x-4)}+\dfrac{(2x+5)(3x-4)}{3(3x-4)}$ … comhainmneoir: $3(3x-4)$

$$= \frac{15+6x^2+7x-20}{3(3x-4)}$$

$$= \frac{6x^2+7x-5}{3(3x-4)} = \frac{(2x-1)(3x+5)}{3(3x-4)}$$

Sampla 3

Simpligh $\dfrac{y-\dfrac{x^2+y^2}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$.

$$\frac{y-\dfrac{x^2+y^2}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}} = \frac{\dfrac{y^2-(x^2+y^2)}{y}}{\dfrac{(y-x)}{xy}} = \frac{\dfrac{-x^2}{y}}{\dfrac{(y-x)}{xy}} = \frac{-x^2}{y}\times\frac{xy}{(y-x)}$$

$$= \frac{-x^3y}{y(y-x)} = \frac{-x^3}{y-x}$$

Cleachtadh 1.4

1. Simpligh gach ceann de na codáin seo a leanas:

(i) $\dfrac{8y}{2y^3}$ (ii) $\dfrac{7a^6b^3}{14a^5b^4}$ (iii) $\dfrac{(2x)^2}{4x}$ (iv) $\dfrac{7y+2y^2}{7y}$ (v) $\dfrac{5ax}{15a+10a^2}$

2. Sloinn gach ceann díobh seo a leanas ina chodán singil:

(a) $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{4x}{3}$ (b) $\dfrac{3x}{5}-\dfrac{x}{2}$ (c) $\dfrac{2x+3}{4}+\dfrac{x}{3}$

(d) $\dfrac{x+1}{4}+\dfrac{2x-1}{5}$ (e) $\dfrac{3x-4}{6}-\dfrac{2x+1}{3}$ (f) $\dfrac{3x-2}{6}-\dfrac{x-3}{4}$

(g) $\dfrac{5x-1}{4}-\dfrac{2x-4}{5}$ (h) $\dfrac{3x+5}{6}-\dfrac{2x+3}{4}-\dfrac{1}{12}$ (i) $\dfrac{3x-2}{4}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{2x-1}{10}$

(j) $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{5x}$ (k) $\dfrac{3}{4x}-\dfrac{5}{8x}$ (l) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}$

(m) $\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+4}$ (n) $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{2x-1}$ (o) $\frac{5}{3x-1} - \frac{2}{x+3}$

(p) $\frac{3}{2x-7} - \frac{1}{5x+2}$ (q) $\frac{2}{3x-5} - \frac{1}{4}$ (r) $\frac{5}{2x-1} - \frac{3}{x-2}$

(s) $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$ (t) $\frac{3}{x} + \frac{4}{3y} - \frac{2}{3xy}$ (u) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x(x-1)}$

$$(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)$$

3. Fachtóirigh an t-ainmneoir agus an t-uimhreoir go hiomlán agus uaidh sin, simpligh gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\frac{2z^2 - 4z}{2z^2 - 10z}$ (ii) $\frac{y^2 + 7y + 10}{y^2 - 25}$ (iii) $\frac{t^2 + 3t - 4}{t^2 - 3t + 2}$

(iv) $\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x+2}$ (v) $\frac{2}{a+4} - \frac{a+2}{a^2 - 9}$ (vi) $\frac{x-1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x-2}$

4. Fachtóirigh an t-ainmneoir agus uaidh sin, simpligh gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\frac{10}{2x^2 - 3x - 2} - \frac{2}{x-2}$ (ii) $\frac{x+2}{2x^2 - x - 1} - \frac{1}{x-1}$

5. Simpligh iad seo a leanas:

(i) $\frac{1}{x^2 - 9} - \frac{2}{x^2 - x - 6}$ (ii) $\frac{3}{x^2 + x - 2} - \frac{2}{x^2 + 3x + 2}$

(iii) $\frac{2}{6x^2 - 5x - 4} - \frac{3}{9x^2 - 16}$ (iv) $\frac{1}{xy - x^2} - \frac{1}{y^2 - xy}$

6. Simpligh gach ceann de na codáin choimpléascacha seo a leanas:

(i) $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$ (ii) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{3}{8}}$ (iii) $\dfrac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$

7. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\dfrac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1}$ (ii) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - 4}{\frac{1}{x} - 2}$ (iii) $\dfrac{x + y}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$

8. Sloinn an t-uimhreoir mar chodán singil agus uaidh sin, simpligh na codáin seo a leanas:

(i) $\dfrac{4y - \frac{3}{2}}{2}$ (ii) $\dfrac{2 - \frac{1}{x}}{2}$ (iii) $\dfrac{3x + \frac{1}{x}}{2}$ (iv) $\dfrac{y + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$

9. Sloinn an t-uimhreoir agus an t-ainmneoir mar chodáin shingile agus uaidh sin, scríobh na codáin a leanas san fhoirm is simplí díobh.

(i) $\dfrac{z - \frac{1}{3}}{z - \frac{1}{2}}$ (ii) $\dfrac{2x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{4}}$ (iii) $\dfrac{z - \frac{1}{2z}}{z - \frac{1}{3z}}$ (iv) $\dfrac{x - \frac{1}{x+1}}{x - 1}$

10. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas.

(i) $\dfrac{1 + \frac{2}{x}}{\frac{x+2}{x-2}}$ (ii) $\dfrac{2 + \frac{1}{x}}{2x^2 + x}$ (iii) $\dfrac{x + \frac{2x}{x-2}}{1 + \frac{4}{(x+2)(x-2)}}$

11. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas.

(i) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a-b}{a+b}}$ (ii) $\dfrac{x + \frac{3}{x}}{x - \frac{9}{x^3}}$ (iii) $\dfrac{9 - \frac{1}{y^2}}{9 + \frac{6}{y} + \frac{1}{y^2}}$

12. Léirigh go simplíonn $\dfrac{3x-5}{x-2} + \dfrac{1}{2-x}$ go tairiseach i gcás $x \neq 2$.

Mír 1.5 Ionannais ailgéabracha

Úsáidtear an focal ionannas i réimsí éagsúla matamaitice. Úsáidtear é sa triantánacht, sna tacair, sna feidhmeanna agus san ailgéabar.

In **ionannas**, bíonn comhéifeachtaí uile na gcumhachtaí atá mar an gcéanna cothrom.

Caithfidh ionannas bheith fíor **i gcás gach luacha** ar an athróg neamhspleách.

Má tá $3x + 7 = ax + b$ i gcás gach luacha ar $\boldsymbol{x}$, **ionannas ailgéabrach** a thugtar air.

Má tá sé seo fíor, bainimid de thátal as go bhfuil $a = 3$ agus $b = 7$.

Nuair a bhíonn dhá shlonn cothrom le chéile **i gcás gach luacha ar $\boldsymbol{x}$**, is ionannas í an chothromóid a eascraíonn astu.

Go hiondúil, má tá $ax^3 + bx^2 + cx + d = px^3 + qx^2 + rx + s$ i gcás gach luacha ar x,

ansin $a = p, b = q, c = r, d = s$.

Freisin, má tá $ax^3 + bx^2 + cx + d = qx^2 + s$ i gcás gach luacha ar x,

ansin $a = c = 0$ agus $b = q, d = s$.

Úsáidtear an t-airí seo chun comhéifeachtaí anaithnide a aimsiú i gcothromóidí áirithe.

Sampla 1

Má tá $(2x + a)^2 = 4x^2 + 12x + b$, **i gcás gach luacha ar x**, faigh luach a agus b.

Má tá $(2x + a)^2 = 4x^2 + 12x + b$, i gcás gach luacha ar x,

$\Rightarrow \quad 4x^2 + 4ax + a^2 = 4x^2 + 12x + b$

$\Rightarrow \quad 4a = 12$ (cuir cumhachtaí cosúla x i gcomparáid) $\therefore \quad a = 4$

$\Rightarrow$ agus $a^2 = b$ (cuir na tairisigh i gcomparáid) $\therefore \quad 4^2 = 16 = b$.

Sampla 2

Má tá $3t^2x - 3px + c - 2t^3 = 0$ **i gcás gach luacha ar x**, faigh c i dtéarmaí p.

Má tá $3t^2x - 3px + c - 2t^3 = 0$ i gcás gach luacha ar x,

$\therefore \quad (3t^2 - 3p)x + c - 2t^3 = (0)x + (0)$ … scríobh an dá thaobh mar iltéarmaigh in x

$\therefore \quad 3t^2 - 3p = 0$ (cuir cumhachtaí cosúla x i gcomparáid) $\therefore \quad t = \sqrt{p}$

agus $\quad c - 2t^3 = 0$ (cuir na tairisigh i gcomparáid) $\therefore \quad c = 2t^3$

$$\therefore \; c = 2(\sqrt{p})^3 = 2p^{\frac{3}{2}}$$

Is féidir ionannais ailgéabracha a úsáid freisin chun **páirtchodáin** a dhéanamh as codán ar leith.

i.e. $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x-2)}$ áit a bhfuil A agus $B \in \mathbb{Q}$.

Sampla 3

Má tá $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x-2)}$ i gcás gach luacha ar x, faigh luach A agus luach B.

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$\therefore \quad 1 = A(x-2) + B(x+1)$ i gcás gach luacha ar x.

Is féidir linn luachanna A agus B a fháil ar dhá mhodh éagsúla.

Modh 1: Má tá an chothromóid seo fíor i gcás gach luacha ar x, is furasta luach A agus B a fháil, má phiocaimid dhá luach oiriúnacha ar x.

Ó tá $\quad 1 = A(x-2) + B(x+1)$

Bíodh $x = 2 \quad \therefore \quad 1 = A(0) + B(2+1) \quad \therefore \quad B = \frac{1}{3}$

Bíodh $x = -1 \quad \therefore \quad 1 = A(-1-2) + B(0) \quad \therefore \quad 1 = -3A \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$

Modh 2: Comhéifeachtaí cumhachtaí cosúla a ionannú agus iad a réiteach le cothromóidí comhuaineacha.

$$1 = A(x - 2) + B(x + 1)$$
$$1 = Ax - 2A + Bx + B$$
$$1 = Ax + Bx - 2A + B$$
$$1 = x(A + B) - 2A + B$$

$x(0) + 1 = x(A + B) - 2A + B$ i gcás gach luacha ar x.

$\therefore\ 0 = A + B$ agus $1 = -2A + B$ … comhéifeachtaí cumhachtaí cosúla x agus téarmaí tairiseacha a ionannú

$\therefore\ A = -B$ agus trí ionadaíocht, $1 = -2(-B) + B = 3B$.

$\therefore\ B = \frac{1}{3}$ agus $A = -\frac{1}{3}$

$$\therefore\ \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{-1}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)}$$

Ionannais ailgéabracha agus fachtóirí

Más fachtóir é $x^2 - ax + b$ de $x^3 + 2ax^2 + 4bx + c$, is féidir linn coibhneas idir na comhéifeachtaí a, b agus c a aimsiú ach **ionannais ailgéabracha** a úsáid.

Tabhair faoi deara nach mbíonn aon fhuílleach ann nuair a roinntear slonn ar fhachtóir, toisc gur fachtóir é.

$$\begin{array}{r|l} & x + 3a \\ \hline x^2 - ax + b & x^3 + 2ax^2 + 4bx + c \\ & \underline{x^3 - ax^2 + bx} \\ & \quad 3ax^2 + 3bx + c \\ & \quad \underline{3ax^2 - 3a^2x + 3ab} \\ \text{Fuílleach} & \quad = x(3b + 3a^2) + c - 3ab \end{array}$$

Mar nach féidir aon fhuílleach a bheith ann, glacaimid leis, **i gcás gach luacha ar *x*,**

(i) $3b + 3a^2 = 0$, i.e. $b = -a^2$ agus

(ii) $c - 3ab = 0$, i.e. $c = 3ab$

Is féidir na torthaí céanna a aimsiú ach an fachtóir atá ar iarraidh a bheith $= (x + k)$.

$\therefore\ (x + k)(x^2 - ax + b) = x^3 + 2ax^2 + 4bx + c$

Má fhorbraímid taobh na láimhe clé, gheobhaimid

$x^3 - ax^2 + bx + kx^2 - akx + bk = x^3 + 2ax^2 + 4bx + c$ … **i gcás gach luacha ar *x*.**

$\therefore\ x^3 + (k - a)x^2 + (b - ak)x + bk = x^3 + 2ax^2 + 4bx + c$ … cuir téarmaí cosúla le chéile.

Comhéifeachtaí x^2 a chur i gcomparáid: $(k - a) = 2a$, mar sin $k = 3a$ mar atá thuas.

Comhéifeachtaí x a chur i gcomparáid: $(b - ak) = 4b$

$(b - 3a^2) = 4b$, mar sin $3b = -3a^2$, i.e. $b = -a^2$ mar atá thuas.

Ar deireadh, téarmaí tairiseacha a chur i gcomparáid: $bk = c$

$\therefore\ 3ab = c$, mar atá thuas.

Sampla 4

Glac leis gur fachtóir é $(x - t)^2$ de $x^3 + 3px + c$. Uaidh sin, taispeáin go bhfuil $p = -t^2$ agus $c = 2t^3$.

$(x - t)^2 = x^2 - 2xt + t^2$ agus trí roinnt fhada, faighimid:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 2t \\
\hline
x^2 - 2xt + t^2 & x^3 \qquad\qquad + 3px + c \\
 & x^3 - 2tx^2 + t^2x \\
\hline
 & \quad 2tx^2 - t^2x + 3px + c \\
 & \quad 2tx^2 + (3p - t^2)x + c \\
 & \quad 2tx^2 - 4t^2x + 2t^3 \\
\hline
 & \quad (3p + 3t^2)x + c - 2t^3 \qquad (= \text{fuílleach})
\end{array}
$$

(tabhair faoi deara nach bhfuil aon téarma x^2 ann)

Níor cheart dúinn aon fhuílleach a fháil; mar sin $(3p + 3t^2)x + c - 2t^2 = 0$ **i gcás gach luacha ar *x***.

$\therefore \quad (3p + 3t^2)x + c - 2t^3 = (0)x + 0$ i gcás gach luacha ar x.

$\therefore \quad 3p + 3t^2 = 0 \Rightarrow p = -t^2$

agus $\quad +c - 2t^3 = 0 \Rightarrow c = 2t^3$.

(Nóta: Is iad $x^2 - 2xt + t^2$ agus $x + 2t$ fachtóirí $x^3 + 3px + c$).

Sampla 5

Is fachtóir é $2x - \sqrt{3}$ de $4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$; faigh an dara fachtóir.

Glac leis go bhfuil an dara fachtóir san fhoirm $(ax + b)$.
(Nóta: Caithfimid a a thabhairt isteach mar gurb é 4 comhéifeacht x^2; ba cheart go mbeadh sé soiléir go bhfuil $a = 2$).

Ansin $(2x - \sqrt{3})(ax + b) = 4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad 2ax^2 + 2bx - \sqrt{3}ax - \sqrt{3}b = 4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad 2ax^2 + (2b - \sqrt{3}a)x - \sqrt{3}b = 4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$$

Comhéifeachtaí cumhachtaí cosúla á gcothromú,

(i) $(x^2) \ldots 2a = 4$ a thugann $a = 2$

(ii) $(x) \ldots + (2b - \sqrt{3}a) = -2(1 + \sqrt{3})$
ó tá $\quad a = 2, \Rightarrow 2b - 2\sqrt{3} = -2 - 2\sqrt{3}$
$\therefore \quad b = -1$

(iii) (na tairisigh a chur i gcomparáid) $\ldots -\sqrt{3}b = \sqrt{3}$, a fhíoraíonn go bhfuil $b = -1$.
Mar sin is é $2x - 1$ an dara fachtóir.

Cleachtadh 1.5

1. Má tá $ax^2 + bx + c = (2x - 3)(3x + 4)$ i gcás gach luacha ar x, faigh luachanna a, b agus c.

2. Má tá $(3x - 2)(x + 5) = 3x^2 + px + q$ i gcás gach luacha ar x, faigh luachanna p agus q.

3. Má tá $x^2 + 6x + 16 = (x + a)^2 + b$ i gcás gach luacha ar x, faigh luachanna a agus b.

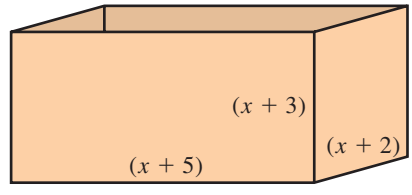
4. Faigh na réaduimhreacha a agus b má tá $x^2 + 4x - 6 = (x + a)^2 + b$ i gcás gach $x \in \mathbb{R}$.

5. Má tá $2x^2 + 5x + 6 = p(x + q)^2 + r$ i gcás gach luacha ar x, faigh luachanna p, q agus r.

6. Faigh luachanna a agus b má tá $(2x + a)^2 = 4x^2 + 12x + b$ i gcás gach x.

7. Má tá $x^2 - 4x - 5 = (x - n)^2 - m$, i gcás gach x, faigh luachanna m agus n.

8. Tugann an fheidhm $V(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d$ toirt, V, an bhosca seo dúinn, áit a bhfuil a, b, c agus $d \in \mathbb{Z}$.



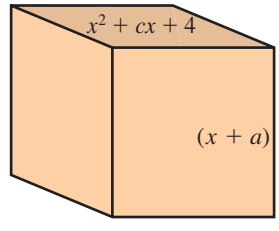
(i) Faigh luachanna a, b, c agus d.

Tugann an chothromóid $S(x) = px^2 + qx + r$ achar dhromchla seachtrach an bhosca, $S(x)$, dúinn, áit a bhfuil p, q agus $r \in \mathbb{Z}$..

(ii) Faigh luachanna p, q agus r.

9. Má tá $3(x - p)^2 + q = 3x^2 - 12x + 7$ i gcás gach x, faigh luachanna p agus q.

10. Tugann $V(x) = x^3 + 12x^2 + bx + 30$ toirt bosca sholadaigh.



Má tá achar bharr an bhosca cothrom le $x^2 + cx + 4$ agus más é $x + a$ a airde, faigh luachanna a, b agus c.

11. Má tá $(x - 4)^3 = x^3 + px^2 + qx - 64$ i gcás gach x, faigh luachanna na dtairiseach p agus q.

12. Má tá $(x + a)(x^2 + bx + 2) = x^3 - 2x^2 - x - 6$ i gcás gach x, faigh luachanna na dtairiseach a agus b.

13. Faigh luachanna b agus c má tá $(x - 2)(x^2 + bx + c) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ i gcás gach luacha ar x.

14. Má tá $(5a - b)x + b + 2c = 0$ i gcás gach luacha ar x, faigh a i dtéarmaí c.

15. Má tá $(4x + r)(x^2 + s) = 4x^3 + px^2 + qx + 2$ i gcás gach x, faigh luach pq.

16. Tá $(x + s)(x + t) = x^3 + bx^2 + cx + d$ i gcás gach luacha ar x.
Úsáid an t-ionannas seo chun a thaispeáint go bhfuil $bc = ad$.

17. Má tá $\dfrac{1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x-1)}$ i gcás gach x, faigh luachanna ar A agus B.

18. Má tá $\dfrac{1}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{C}{(x+2)} + \dfrac{D}{(x-3)}$ i gcás gach x, faigh luachanna ar C agus D.

19. Scríobh $\dfrac{1}{(x+1)(x+4)}$ i bhfoirm na bpáirtchodán $\dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x+4)}$.

20. Más fachtóir é $(x - 3)^2$ de $x^3 + ax + b$, faigh luach a agus luach b.

21. Más fachtóir é $(x - 2)^2$ de $x^3 + px + q$, faigh luach p agus luach q.

22. Más fachtóir é $(x^2 - 4)$ de $x^3 + cx^2 + dx - 12$, faigh luachanna na gcomhéifeachtaí c agus d.
Uaidh sin, fachtóirigh an t-iltéarmach ciúbach go hiomlán.

23. Más fachtóir é $(x^2 + b)$ de $x^3 - 3x^2 + bx - 15$, faigh luach b.

24. Más fachtóir é $x^2 - px + 9$ de $x^3 + ax + b$, sloinn (i) a (ii) b i dtéarmaí p.
Uaidh sin, faigh luachanna p má tá $a + b = 17$.

25. Más fachtóir é $x^2 - kx + 1$ de $ax^3 + bx + c$, léirigh go bhfuil $c^2 = a(a - b)$.

26. Más fachtóir é $(x - a)^2$ de $x^3 + 3px + c$, léirigh go bhfuil (i) $p = -a^2$ (ii) $c = 2a^3$.

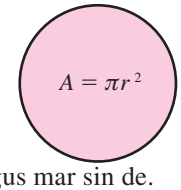
27. Más fachtóir é $x^2 + ax + b$ de $x^3 - k$, léirigh go bhfuil (i) $a^3 = k$ (ii) $b^3 = k^2$.

28. Úsáid roinnt fhada chun a thaispeáint gur fachtóir é $2x - \sqrt{3}$ de $4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$ agus uaidh sin, faigh an dara fachtóir.

29. Faigh luachanna A, B agus C sa chaoi go bhfuil
$5x + 3 = Ax(x + 3) + Bx(x - 1) + C(x - 1)(x + 3)$ i gcás gach luacha ar x.

Mír 1.6 Foirmlí a ionramháil

Tugann an fhoirmle $A = \pi r^2$ achar diosca.



Deirtear go bhfuil A sainithe **i dtéarmaí** r (is é r an athróg neamhspleách).

Má tá a fhios againn cad é r, is féidir linn A a fháil.
Mar shampla, má tá $r = 3$, tá $A = 9\pi$; má tá $r = 8$, ansin tá $A = 64\pi$ agus mar sin de.

Uaireanta, iarrtar orainn r a fháil i dtéarmaí A, i.e. r a bheith mar **ábhar** na cothromóide.

$\therefore \quad \pi r^2 = A \;\Rightarrow r^2 = \dfrac{A}{\pi} \;\Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$. Tá r sainithe anois i dtéarmaí A.

Mar sin, má tá achar an chiorcail ar eolas againn, is féidir linn an ga a fháil.

m.sh. Má tá $A = 9\pi$, ansin $r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}} \;\Rightarrow\; r = \sqrt{\dfrac{9\pi}{\pi}} = \sqrt{9} = 3$.

Sampla 1

(i) Má tá $v^2 = u^2 + 2as$, sloinn a i dtéarmaí v, u agus s.

(ii) Má tá $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{1}{2}$, sloinn y i dtéarmaí x. Uaidh sin, faigh luach y nuair atá $x = 5$.

(i)
$$v^2 = u^2 + 2as$$
$$u^2 + 2as = v^2$$
$$2as = v^2 - u^2$$
$$\therefore\; a = \frac{v^2 - u^2}{2s}$$

(ii) $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{1}{4}$ … an dá thaobh a chearnú

$4(x+y) = x - y$ … an dá thaobh a iolrú faoi $4(x-y)$

$4x + 4y = x - y$ … taobh na láimhe clé a fhorbairt

$y + 4y = x - 4x$ … na y-théarmaí amháin a bhailiú le chéile ar thaobh na láimhe clé

$5y = -3x$

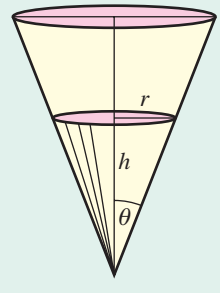
$y = \dfrac{-3x}{5}$ … y a fháil i dtéarmaí x

Nuair atá $x = 5, y = \dfrac{-3(5)}{5} = -3$.

Sampla 2

Úsáidtear coimeádán atá i gcruth cóin inbhéartaithe chun leacht a choimeád.

Má tá $\tan\theta = \dfrac{r}{h}$, sloinn an toirt, V, i dtéarmaí h, doimhneacht an leachta, agus na huillinne θ.



Toirt cóin, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Ach $\tan\theta = \dfrac{r}{h} \;\Rightarrow h\tan\theta = r$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \pi(h\tan\theta)^2 h = \pi h^3 \tan^2\theta$$

Sampla 3

Glac leis go bhfuil $x = \dfrac{t+4}{3t+1}$. Faigh t i dtéarmaí x.

$$x = \frac{t+4}{3t+1}$$

$x(3t+1) = t+4$ … an dá thaobh a iolrú faoi $3t+1$

$3tx + x = t + 4$ … forbair taobh na láimhe clé

$3tx - t = 4 - x$ … na t-théarmaí amháin a bhailiú ar thaobh na láimhe clé

$t(3x-1) = 4 - x$ … t a fhachtóiriú

$t = \dfrac{4-x}{3x-1}$ … an dá thaobh a roinnt ar $3x - 1$

Cleachtadh 1.6

1. I ngach ceann díobh seo a leanas, sloinn x i dtéarmaí na n-athróg eile.

(i) $3x - 2y = 4$ (ii) $2x - b = 4c$ (iii) $5x - 4 = \dfrac{y}{2}$

(iv) $5(x-3) = 2y$ (v) $3y = \dfrac{x}{3} - 2$ (vi) $xy = xz + yz$

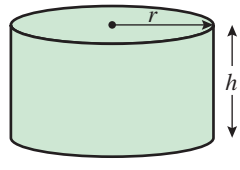
2. Sloinn x i dtéarmaí na n-athróg eile i ngach ceann díobh seo a leanas.

(i) $2x - \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{3}$ (ii) $z = \dfrac{y-2x}{3}$ (iii) $\dfrac{a}{x} - b = c$

3. (a) Tugann $V = \pi r^2 h$ toirt sorcóra.
Faigh an ga r i dtéarmaí V agus h.

(b) Tugann $A = 2\pi rh$ achar cuar sorcóra.
Faigh an ga r i dtéarmaí A agus h.

(c) Uaidh sin, léirigh go bhfuil $A^2 = 4\pi hV$.



4. Tarraingítear ciorcal ar ga dó r taobh istigh de chearnóg, mar a léirítear.

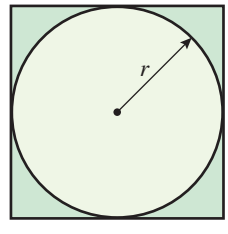
(a) Faigh achar an chiorcail, A.

(b) Faigh achar na cearnóige, i dtéarmaí r.

(c) Uaidh sin, faigh slonn ar achar na gcúinní scáthaithe i dtéarmaí r.

(d) Má dhúblaítear slios na cearnóige agus má laghdaítear ga an chiorcail faoina leath, faigh slonn ar an achar scáthaithe i dtéarmaí r.

(e) Má imscríobhtar ciorcal thart ar an mbunchearnógh, cruthaigh gurb ionann achar an diosca sheachtraigh agus dhá oiread achar an diosca inmheánaigh.

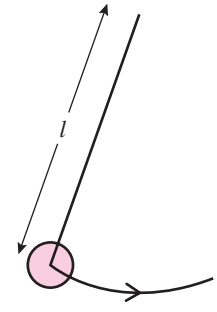


5. Tomhaiseann ceamara luais an t-athrú ar mhinicíocht tonnta ó f go f'. Carr ag gluaiseacht is cúis leis an athrú seo. Úsáideann an ceamara an fhoirmle $f' = \dfrac{fc}{c-u}$, áit ar luas na dtonnta é c agus luas an chairr é u. Faigh

(i) u, luas an chairr, i dtéarmaí na n-athróg eile f', f agus c.

(ii) c, luas na dtonnta, i dtéarmaí na n-athróg eile f', f agus u.

6. Tugann $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ an t-am a ghlacann sé ar luascadán ciogal iomlán amháin a dhéanamh, áit arb é l fad an luascadáin agus arb é g an luasghéarú de bharr domhantarraingthe.



(i) Faigh l i dtéarmaí na n-athróg eile.

(ii) Glac leis go bhfuil $T = 3\text{ s}$ agus $g = 10\text{ m s}^{-2}$.
Ríomh fad an luascadáin ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

7. I ngach ceann díobh seo a leanas, sloinn a i dtéarmaí na n-athróg eile:

(i) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a+b}{a-b}$ (ii) $bc - ac = ac.$

8. Sloinn v i dtéarmaí na n-athróg eile i ngach ceann díobh seo a leanas:

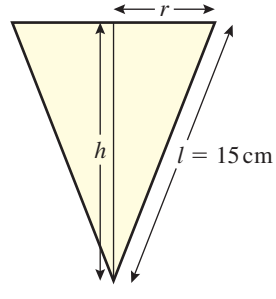
(i) $y = \dfrac{3(u-v)}{4}$ (ii) $S = \dfrac{t}{2}(u+v)$

9. Tugann an fhoirmle $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^3$ luach cumaisc €P, a infheistítear ar feadh 3 bliana ar i%. Faigh i i dtéarmaí P agus A. Má tá luach reatha €2650 ag €2500 a infheistíodh trí bliana ó shin, faigh an ráta úis (ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha).

10. Scríobh c i dtéarmaí na n-athróg eile i ngach ceann díobh seo.

(i) $d = \sqrt{\dfrac{a-b}{ac}}$ (ii) $b = \dfrac{2c-1}{c-1}$

11. Ga r cm agus airde ingearach h cm atá ag cón. Má tá an chlaon-airde $l = 15$ cm, úsáid Teoirim Phíotagarás



(i) chun h a shloinneadh i dtéarmaí r.

(ii) Uaidh sin, faigh luach h nuair atá $r = 5$ cm.

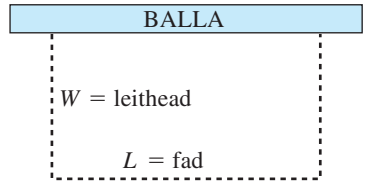
(iii) Cén luach atá ar h nuair atá an ga r cothrom le leath na claon-airde l?
Tabhair do fhreagra ceart go dtí an cm is gaire.

12. Tá 300 m d'fhálú ag feirmeoir. Teastaíonn uaidh an fálú uile seo a úsáid chun banrach dhronuilleogach a dhéanamh in aice le balla atá ann cheana féin, mar a léirítear.

(i) Faigh L, fad na banraí, i dtéarmaí a leithid (W).

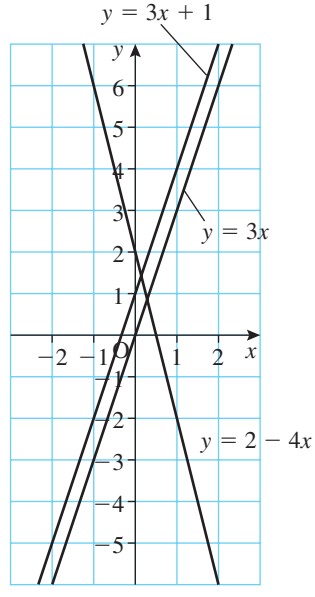
(ii) Uaidh sin, faigh achar na banraí (A) i dtéarmaí an leithid amháin.

(iii) Faigh toisí na banraí más é 10,000 m^2 an t-achar féideartha is mó.



Mír 1.7 Patrúin ailgéabracha, réamheolas

1. Líneach Cruthaíonn gach feidhm iltéarmach patrún ar féidir é a scrúdú go huimhriúil agus go grafach.



Déanann an fheidhm $f(x) = (y) = 3x$, áit a bhfuil $x \geq 0$, cur síos ar phatrún ar nós 0, 3, 6, 9, …

Ar an gcaoi chéanna, déanann an fheidhm $f(x) = (y) = 3x + 1$, áit a bhfuil $x \geq 0$, cur síos ar an bpatrún 1, 4, 7, 10,…

Freisin, léiríonn an fheidhm $f(x) = (y) = 2 - 4x$, áit a bhfuil $x \geq 0$, an patrún 2, −2, −6, −10 …

I gcás gach ceann de na patrúin uimhreacha seo, tá méid tairiseach suimithe leis, nó bainte de, idir théarmaí agus nuair a léirítear aon cheann acu mar ghraf, cruthaíonn sé líne dhíreach.

Feidhmeanna **líneacha** a thugtar ar fheidhmeanna san fhoirm

$$f(x) = y = mx + c.$$

I bpatrún líneach, tugann an difríocht idir théarmaí leantacha ***m*** fána na líne. An 1ú difríocht a thugtar ar an difríocht idir théarmaí leantacha.

						$y = mx + c$
Patrún	0	3	6	9	12	$f(x) = (y) = 3x$
1ú Difríocht		3	3	3	3	
Patrún	1	4	7	10	13	$f(x) = (y) = 3x + 1$
1ú Difríocht		3	3	3	3	
Patrún	2	−2	−6	−10	−14	$f(x) = (y) = 2 - 4x$
1ú Difríocht		−4	−4	−4	−4	

Cinneann túsphointe gach patrúin c, an téarma tairiseach. Nuair atá $x = 0$, go céimseatúil, faighimid idirlíne na y−aise, c.

2. Cearnach I gcás patrún ar nós 0, 1, 4, 9, 16, … níl méid tairiseach suimithe leo, ná bainte díobh, idir théarmaí. Má fhéachaimid ar na chéad difríochtaí idir théarmaí, feicfimid 1, 3, 5, 7, … .

Ach is tairiseach é 2, an **dara difríocht** (3 − 1), (5 − 3), … .

Léiríonn an fheidhm $f(x) = (y) = x^2$ i gcás $x \geq 0$ patrúin mar seo.

Cruthaíonn feidhmeanna san fhoirm $\boldsymbol{f(x) = x^2 + b}$ patrúin den chineál céanna.

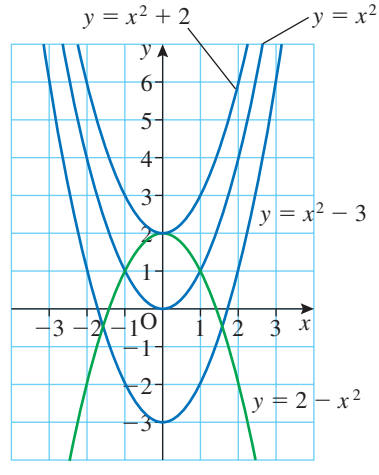
Patrún	0	1	4	9	16	25	$f(x) = (y) = x^2$
1ú Difríocht		1	3	5	7	9	
2ú Difríocht			2	2	2	2	
Patrún	2	3	6	11	18	27	$f(x) = (y) = x^2 + 2$
1ú Difríocht		1	3	5	7	9	
2ú Difríocht			2	2	2	2	
Patrún	−3	−2	1	6	13	22	$f(x) = (y) = x^2 - 3$
1ú Difríocht		1	3	5	7	9	
2ú Difríocht			2	2	2	2	
Patrún	2	1	−2	−7	−14	−23	$f(x) = (y) = 2 - x^2$
1ú Difríocht		−1	−3	−5	−7	−9	
2ú Difríocht			−2	−2	−2	−2	

Mar a fheictear sna graif, tá na cuair siméadrach thart ar an líne $x = 0$ (an y−ais).

Bíonn cruth ∪ ar phatrúin san fhoirm $f(x) = x^2 + b$.

Bíonn cruth ∩ ar phatrúin san fhoirm $f(x) = b - x^2$.

Féach ar an bpatrún thíos.



Patrún	4	7	16	31	52	79
An 1ú difríocht		3	9	15	21	27
An 2ú difríocht			6	6	6	6

Toisc gur tairiseach í an dara difríocht, tá a fhios againn gur patrún cearnach é seo san fhoirm

$ax^2 + b, x \geqslant 0.$

Is é 4 an luach tosaithe, i.e. nuair atá $x = 0$, $b = 4$.

Nuair atá $x = 1$, $ax^2 + b = a(1) + 4 = 7 \Rightarrow a = 3$.
(Tugaimid faoi deara freisin gurb é 6 an dara difríocht, i.e. $2 \times 3 = 2a$)

Má tá $f(x) = ax^2 + bx + c$, tá an dara difríocht $= 2a$.

∴ Is féidir an patrún uimhreacha seo a léiriú leis an bhfeidhm iltéarmach $f(x) = 3x^2 + 4$.

Sampla 1

Scrúdaigh na patrúin uimhreacha seo a leanas agus cinn an bhfuil coibhneas líneach nó cearnach idir na téarmaí.

Scríobh slonn ailgéabrach do gach tacar uimhreacha:

(a) $-2, 1, 4, 7, \ldots$ (b) $3, 5, 11, 21, \ldots$

Patrún	-2	1	4	7
1ú Difríocht		3	3	3

(a) Is tairiseach í an chéad difríocht.
Mar sin, léiríonn sé seo coibhneas líneach $f(x) = ax + b$.
$a = 3$ agus $b = -2$,
$\therefore \quad f(x) = 3x - 2, x \geqslant 0$.

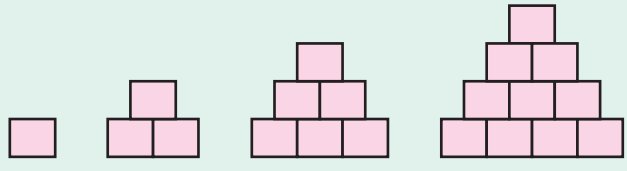
Patrún	3	5	11	21
1ú Difríocht		2	6	10
2ú Difríocht			4	4

(b) Is tairiseach í an dara difríocht.
Mar sin, léiríonn sé seo coibhneas cearnach
$f(x) = ax^2 + b$.
$4 = 2a \Rightarrow a = 2$ agus $b = 3$,
$\therefore \quad f(x) = 2x^2 + 3, x \geqslant 0$.

Is féidir patrúin chearnacha níos casta, san fhoirm $ax^2 + bx + c$, a chruthú in dhá chéim; ar dtús, an chuid chearnach x^2 a shainaithint agus ansin é sin a bhaint ón bpatrún chun an chuid líneach $bx + c$ a dhéanamh.

Sampla 2

Rinneadh seicheamh patrún as cipíní singile mar a léirítear.
Aimsigh slonn cearnach ailgéabrach do líon na gcipíní is gá chun gach patrún a dhéanamh.
Cé mhéad cipín a theastódh chun an deichiú patrún a dhéanamh?



Nuair a chomhairimid na cipíní is gá do na chéad cheithre phatrún, faighimid an patrún uimhreacha 4, 10, 18, 28, …

Patrún	4	10	18	28
1ú difríocht		6	8	10
2ú difríocht			2	2

Tugann an dara difríocht 2, 2, 2, … srl dúinn.

Mar sin, tá cuid chearnach (x^2) leis an bpatrún seo.

Nuair a thriailimid $f(x) = x^2 + 4$ i gcás $x \geq 0$, faighimid an patrún 4, 5, 8, 13. Ní hé sin an patrún a theastaíonn uainn.

Nuair a bhainimid $f(x) = x^2 = 0, 1, 4, 9, \ldots$ i gcás $x \geq 0$ ó 4, 10, 18, 28, …, faighimid an patrún nua 4, 9, 14, 19, …

Patrún	4	10	18	28
x^2	0	1	4	9
Patrún Nua	4	9	14	19
1ú Difríocht		5	5	5

Is é 5, 5, 5, 5, …. srl an chéad difríocht sa seicheamh seo – coibhneas líneach san fhoirm $5x + 4$ i gcás $x \geq 0$.

Nuair a chuirimid an dá choibhneas le chéile, faighimid $f(x) = x^2 + 5x + 4$ i gcás $x \geq 0$.

Chun an 10ú patrún a fháil, glacaimid le $x = 9$ (ó tá an chothromóid fíor i gcás $x \geq 0$, i.e. tosaíonn sé ar 0). $\therefore$ $f(9) = 9^2 + 5(9) + 4 = 130$ cipín ag teastáil.

[Nóta: Dá mbeadh $x \geq 1$, dhealóimis 1, 4, 9, srl agus dhéanfaimis seicheamh nua 3, 6, 9, … le coibhneas líneach 3x. Á gcur le chéile, faighimid $f(x) = x^2 + 3x$ i gcás $x \geq 1$, agus nuair a úsáidimid an fhoirmle seo, $f(10) = 10^2 + 3(10) = 130$ arís.]

Nóta: Déantar staidéar níos mine ar phatrúin líneacha agus chearnacha i gCaibidil 4.

Cleachtadh 1.7

1. Scrúdaigh gach ceann de na patrúin uimhreacha seo a leanas agus cinn an bhfuil coibhneas líneach nó cearnach ag an bpatrún.

(a)	4, 7, 10, 13, 16, …	(b)	−2, 2, 6, 10, 14, …
(c)	−4, −3, 0, 5, 12, …	(d)	2, 1, −2, −7, −14, −23, …
(e)	2, 7, 22, 47, …	(f)	3, 1, −5, −15, −29, …
(g)	1, −4, −19, −44, −79, …	(h)	3, −2, −7, −12, −17, …
(i)	0, 3, 12, 27, 48, …	(j)	1, 17, 37, 65, 101, …

2. Scríobh slonn ailgéabrach chun gach ceann de na patrúin uimhreacha seo a léiriú.

(a) −1, 3, 15, 35, 63, … (b) 4, 3, 0, −5, −12, −21, −32, …

3. Is féidir gach ceann de na patrúin uimhreacha seo a leanas a scríobh san fhoirm $f(x) = ax + b$, $x \geq 0$. Faigh luachanna a agus b.

(i) 2, 7, 12, 17, 22, … (ii) −6, −2, 2, 6, 10, …
(iii) 3, 2, 1, 0, −1, −2, … (iv) −2, −7, −12, −17, −22, −27, …
(v) 3, 3.5, 4, 4.5, 5, … (vi) −1, −0.8, −0.6, −0.4, −0.2, …

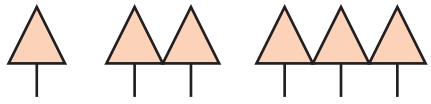
4. Má tá $x \geq 3$, faigh slonn ailgéabrach líneach don phatrún 11, 13, 15, 17, 19, …

5. Má tá $x \geq -2$, faigh a agus b sa chaoi go seasann $f(x) = ax + b$ don phatrún uimhreacha 1, 3, 5, 7, 9, …

6. Iompaigh gach ceann de na dearaí a leanas ina phatrún uimhreacha. Faigh slonn cearnach ailgéabrach do líon na gcipíní is gá chun gach patrún a dhéanamh agus uaidh sin, faigh líon na gcipíní is gá chun an 15ú ball de gach patrún a dhéanamh.

(a)

(b)



(c)

7. Tairgeann comhlacht dhá phlean billí éagsúla chun teilifíseán a cheannach thar roinnt míonna. I bPlean A, aisíoctar €35.00 sa mhí agus íoctar éarlais €70.00. I bPlean B, aisíoctar €24.00 sa mhí agus íoctar éarlais €125.00. Má sheasann x do líon na míonna sa phlean, scríobh slonn do gach plean billí. Scríobh seicheamh uimhreacha a sheasann don chostas sa mhí maidir le gach plean (A agus B) do na chéad cheithre mhí. Cé mhéad mí a ghlacfadh sé sula mbeadh an méid céanna aisíoctha ar an dá phlean?

8. Chomhair bitheolaí líon na gceall baictéarach a d'fhás i saothrán gach uair an chloig. Taifeadadh an patrún 4, 7, 14, 25, 40, …. do na chéad chúig uaire. Ba é 4 líon na gceall ag an tús. Léirigh go bhfuil cuid líneach agus cuid chearnach sa seicheamh seo. Aimsigh slonn do líon na mbaictéar i ndiaidh t uair, i.e. faigh $f(t)$. Úsáid do shlonn do $f(t)$, chomh maith le triail is earráid, le fáil amach cén uair an chloig ina sroichfidh an choilíneacht 500 ceall.

Mír 1.8 Cothromóidí a réiteach

Chun cothromóid a réiteach, caithfimid luachanna na hathróige tugtha, a shásaíonn an chothromóid, a fháil.

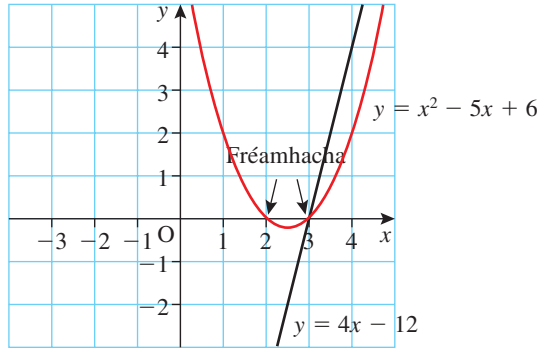
Má tá $4x - 12 = 0$, is é $x = 3$ an t-aon réiteach amháin ar an gcothromóid seo.
Má tá $x^2 - 5x + 6 = 0$, is réitigh ar an gcothromóid iad $x = 2$ agus $x = 3$.
Má tá $y = 4x - 12$, tá $(x, y) = (4, 4)$ ar cheann den iliomad luachanna ar (x, y) a shásaíonn an chothromóid seo.

Má tá $f(x) = y = 4x - 12$, is é $x = 3$ an luach a shásaíonn $f(x) = y = 0$.

Mar sin, is é $(x, y) = (3, 0)$ an réiteach a shásaíonn $y = 4x - 12$.

Ar an gcaoi chéanna, is réitigh iad $(2, 0)$ agus $(3, 0)$ ar $f(x) = y = x^2 - 5x + 6$.

Fréamhacha na cothromóide a thugtar ar na luachanna ar x a shásaíonn $y = f(x) = 0$.



Má bhreactar graf feidhme, is iad na fréamhacha na pointí ag a dtrasnaíonn an graf an x-ais.

Cothromóidí líneacha a réiteach

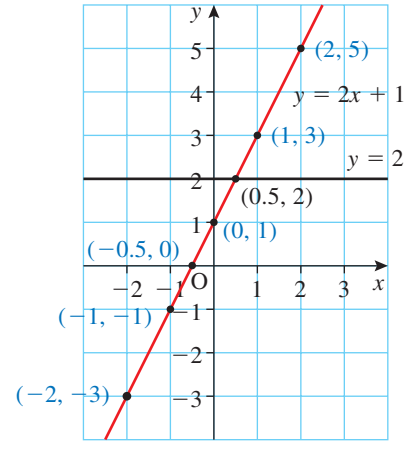
Déanann aon chothromóid san fhoirm $\boldsymbol{y = ax + b}$ líne dhíreach nuair a ghraftar í.

Cothromóidí líneacha a thugtar ar chothromóidí den sórt seo.

Chun an chothromóid $2x + 1 = 0$ a réiteach, caithfimid an luach ar x a fhágann go bhfuil $y = 0$ a fháil, i.e. an áit ina dtrasnaíonn an líne an $x-$ais.

$$2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-1}{2} = -0.5$$



Ar an gcaoi chéanna, chun an chothromóid $2x + 1 = 2$ a réiteach, caithfimid an luach ar x a fhágann go bhfuil $y = 2$ a fháil, i.e. an áit ina dtrasnaíonn an líne an líne $y = 2$.

$$2x + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} = 0.5$$

I ngach cás, ní fhaightear ach luach amháin ar x (fréamh amháin).

Sampla 1

Réitigh an chothromóid líneach $\dfrac{2t-3}{5} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{t-1}{4}$.

$$\frac{2t-3}{5} + \frac{1}{20} = \frac{t-1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{4(2t-3)}{20} + \frac{1}{20} = \frac{5(t-1)}{20}$$ … an comhainmneoir is lú a fháil

$$\Rightarrow \quad 4(2t-3) + 1 = 5(t-1)$$

$$\Rightarrow \quad 8t - 12 + 1 = 5t - 5$$ … á fhorbairt

$$\Rightarrow \quad 3t = 6$$

$$\Rightarrow \quad t = 2$$

Cleachtadh 1.8

1. Mínigh an fáth ar **cothromóidí neamhlíneacha** iad gach ceann díobh seo.

(i) $y = 2x^2 + 2x - 1$

(ii) $y = \dfrac{2}{(x-1)} = 2(x-1)^{-1}$

(iii) $y^2 = 3x + 4$

2. Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo a leanas.

(i) $5x - 3 = 32$ (ii) $3x + 2 = x + 8$ (iii) $2 - 5x = 8 - 3x$

3. Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo.

(i) $2(x - 3) + 5(x - 1) = 3$ (ii) $2(4x - 1) - 3(x - 2) = 14$

(iii) $3(x - 1) - 4(x - 2) = 6(2x + 3)$ (iv) $3(x + 5) + 2(x + 1) - 3x = 22$

4. Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo a leanas.

(i) $\frac{2x + 1}{5} = 1$ (ii) $\frac{3x - 1}{4} = 8$ (iii) $\frac{x - 3}{4} = \frac{x - 2}{5}$

5. Faigh luach na hanaithnide i ngach ceann de na cothromóidí seo a leanas.

(i) $\frac{2a}{3} - \frac{a}{4} = \frac{5}{6}$ (ii) $\frac{b + 2}{4} - \frac{b - 3}{3} = \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3c - 1}{6} - \frac{c - 3}{4} = \frac{4}{3}$

6. Faigh luach na hanaithnide i ngach ceann de na cothromóidí seo a leanas.

(i) $\frac{x - 2}{5} + \frac{2x - 3}{10} = \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3y - 12}{5} + 3 = \frac{3(y - 5)}{2}$

(iii) $\frac{3p - 2}{6} - \frac{3p + 1}{4} = \frac{2}{3}$ (iv) $\frac{3r - 2}{5} - \frac{2r - 3}{4} = \frac{1}{2}$

7. Réitigh gach ceann díobh seo a leanas.

(i) $\frac{3}{4}(2x - 1) - \frac{2}{3}(4 - x) = 2$ (ii) $\frac{2}{3}(x - 1) - \frac{1}{5}(x - 3) = x + 1$

Mír 1.9 Cothromóidí líneacha comhuaineacha a réiteach

1. Cothromóidí líneacha comhuaineacha ina bhfuil dhá athróg a réiteach

Is féidir an chothromóid líneach $y = \frac{2}{3}x - 3$ a athchóiriú mar seo:

$$y = \frac{2}{3}x - 3$$

$$3y = 2x - 9$$

Is é $2x - 3y - 9 = 0$ cothromóid na líne céanna, sloinnte san fhoirm chaighdeánach.

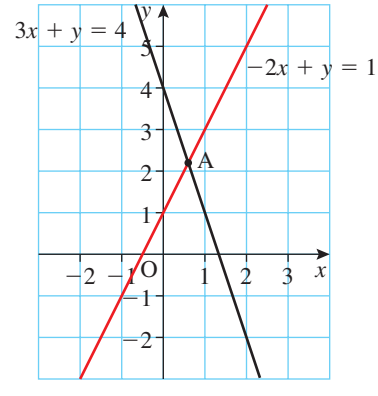
Foirm chaighdeánach cothromóid líne:

$$ax + by + c = 0$$

Tá dhá athróg (x, y) ag an gcothromóid seo agus is iomaí réiteach atá ann.
Ach, má tá dhá chothromóid againn in x agus y, tá siad

(a) comhthreomhar, gan aon phointe trasnaithe
(b) trasnaíonn siad ag pointe (x_1, y_1), i bpáirt ag an dá líne.

Sa léaráid seo, graftar na línte $2x - y + 1 = 0$ agus $3x + y - 4 = 0$.



Tá pointe trasnaithe $A(x, y) = \left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$ acu a shásaíonn an dá chothromóid ag an am céanna i.e. go comhuaineach.

Tá trí mhodh againn chun dhá chothromóid líneacha a réiteach (i.e. a bpointe trasnaithe a aimsiú):

(i) ionadaíocht (ii) díbirt (iii) go grafach (féach thuas).

Sampla 1

Réitigh na cothromóidí $3x - y = 1$ agus $x - 2y = -8$.

Tóg $x - 2y = -8$ agus athchóirigh na téarmaí, chun ***x* a fháil i dtéarmaí *y***,

$$\Rightarrow x = -8 + 2y$$

Cuir an slonn seo in áit x sa dara cothromóid líneach.

Athraíonn $3x - y = 1$ go $3(-8 + 2y) - y = 1$

$$-24 + 6y - y = 1 \quad \text{... á fhorbairt}$$
$$\Rightarrow 5y = 25$$
$$\Rightarrow y = 5$$

Má tá $y = 5$, ansin athraíonn $x = -8 + 2y$ go $x = -8 + 2(5) = 2$

Mar sin, is é $(x, y) = (2, 5)$ an pointe trasnaithe.

[Nóta: Ó tá $3(2) - 5 = 1$ agus $(2) - 2(5) = -8$, tá an pointe $(2, 5)$ ar an dá líne.]

Nóta 1: Níos faide anonn, úsáidfimid teicníc na hionadaíochta chun cothromóidí a réiteach chun an pointe trasnaithe / na pointí trasnaithe idir líne agus cuar a aimsiú.

Nóta 2: Is féidir ceachtar athróg a ionadú.
(Roghnaigh an athróg is fusa a aonrú, i gcónaí).

Sampla 2

Réitigh na cothromóidí $2x - 5y = 9$ agus $3x + 2y = 4$.

Bíodh A $\Rightarrow 2x - 5y = 9$
Bíodh B $\Rightarrow 3x + 2y = 4$

$\therefore$ 3A $\Rightarrow 6x - 15y = 27$
agus 2B $\Rightarrow \underline{6x + 4y = 8}$
$-19y = 19$ ... Dealaigh chun x a dhíbirt
$y = -1$

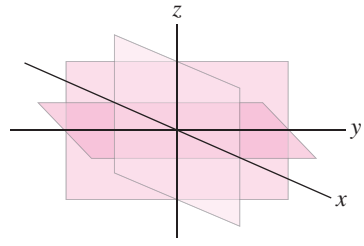
Má chuirimid $y = -1$ isteach in A, gheobhaimid $2x - 5(-1) = 9$
$2x = 4$
$x = 2$

Is é $(x, y) = (2, -1)$ an pointe trasnaithe.

[Nóta: $2(2) - 5(-1) = 9$ agus $3(2) + 2(-1) = 4$ agus mar sin, tá an pointe seo ar an dá líne.]

2. Cothromóidí comhuaineacha ina bhfuil trí athróg a réiteach

Is cothromóid agus trí athróg (trí thoise) inti é
$x + y + z = 6$.



Chun an chothromóid seo a bhreacadh, is gá trí ais, x-ais, y-ais agus z-ais, a úsáid, iad dronuilleach le chéile.

Agus í breactha, seasann an chothromóid seo do phlána pointí.

Má bhreactar trí phlána ar na haiseanna céanna, beidh pointe trasnaithe (x, y, z) amháin ann, fad is nach bhfuil aon dá cheann de na plánaí comhthreomhar.

Chun cothromóid, agus trí anaithnid inti, a réiteach,

(i) díbir ceann de na hanaithnidí chun na trí chothromóid a laghdú go dhá cheann
(ii) roghnaigh an anaithnid is fusa a aonrú
(iii) roghnaigh na cothromóidí péire ar phéire agus díbir an anaithnid seo ó na trí chothromóid
(iv) réitigh an dá chothromóid a thiocfaidh as sin mar a rinneadh thuas
(v) úsáid na luachanna atá agat ar na hanaithnidí seo i gceann de na cothromóidí bunaidh chun an tríú hanaithnid a réiteach
(vi) cinntigh do fhreagraí i ngach cothromóid.

Sampla 3

Réitigh na cothromóidí comhuaineacha:

A: $x + y + z = 6$
B: $2x + y - z = 1$
C: $4x - 3y + 2z = 4$

Má dhíbrímid z ó na trí chothromóid, gheobhaimid

A: $x + y + z = 6$
B: $2x + y - z = 1$
D: $3x + 2y = 7$ … ag suimiú A agus B

2B: $4x + 2y - 2z = 2$
C: $4x - 3y + 2z = 4$
E: $8x - y = 6$ … ag suimiú 2B agus C

D: $3x + 2y = 7$
2E: $16x - 2y = 12$
$19x = 19$ … ag suimiú D agus 2E

$x = 1$ $\therefore$ Ag úsáid D: $3(1) + 2y = 7$
$2y = 4$
$y = 2$

Ar deireadh, ag úsáid A $(1) + (2) + z = 6$
$z = 3$ $\therefore$ is é $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ an pointe trasnaithe

[**Nóta:** A: $(1) + (2) + (3) = 6$, agus
B: $2(1) + (2) - (3) = 1$, agus
C: $4(1) - 3(2) + 2(3) = 4$ agus mar sin, sásaíonn an pointe seo na trí chothromóid].

3. Cothromóidí comhuaineacha i gcomhthéacs

Sampla 4

Bhí 240 duine i láthair ag ceoldráma. Bhí ticéid ar fáil ar dhá phraghas, €31 agus €16. Má caitheadh €5595 san iomlán ar thicéid an oíche sin, faigh, ag úsáid an eolais seo,

(i) dhá chothromóid líneacha a nascann an dá shórt ticéid a díoladh
(ii) líon na dticéad ar €31 a díoladh
(iii) líon na dticéad ar €16 a díoladh.

Seasadh x do líon na dticéad ar €16 a díoladh agus y do líon na dticéad ar €31 a díoladh.

(i) $\Rightarrow$ Ó bhí 240 duine i láthair san iomlán, $\quad A: x + y = 240$
$\Rightarrow$ Má caitheadh €5595, $\quad B: 16x + 31y = 5595$

(ii) Á réiteach, faighimid

$$\begin{aligned} 16A: 16x + 16y &= 3840 \\ B: 16x + 31y &= 5595 \quad \text{(á dhealú)} \\ -15y &= -1755 \\ y &= 117, \end{aligned}$$

i.e. díoladh 117 ticéad ar €31 an ceann.

(iii) Agus uaidh sin, $x + (117) = 240$

$x = 123$, díoladh 123 ticéad ar €16 an ceann.

Sampla 5

Bailíodh boinn caoga cent, fiche cent agus deich cent as meaisín bonn. Comhaireadh iad. €32 luach iomlán na mbonn. Agus é ag comhaireamh, thug an t-airgeadóir faoi deara gurbh ionann trí oiread líon na mbonn caoga cent agus dhá oiread líon na mbonn fiche cent suimithe le líon na mbonn deich cent. Ansin, thug sé faoi deara gurbh ionann sé oiread líon na mbonn fiche cent agus ceithre oiread líon na mbonn caoga cent suimithe le líon na mbonn deich cent.
Faigh líon gach sórt boinn a bhí sa mheaisín.

Bíodh x = líon na mbonn 50 cent
Bíodh y = líon na mbonn 20 cent
Bíodh z = líon na mbonn 10 cent.

(i) $50x + 20y + 10z = 3200$ … €32 = 3200c
(ii) $2y + z = 3x$
(iii) $4x + z = 6y$

Nuair a athchóirímid na cothromóidí le go mbeidh siad san fhoirm chaighdeánach, faighimid

$$\begin{aligned} A&: 50x + 20y + 10z = 3200 \\ B&: 3x - 2y - z = 0 \\ C&: 4x - 6y + z = 0 \end{aligned}$$

Nuair a shuimímid B agus C, cuirimid z as an áireamh $\therefore$ B + C $\Rightarrow 7x - 8y = 0$.

Nuair a shuimímid A agus 10B, cuirimid z as an áireamh freisin (agus y sa chás seo)

$$\therefore \text{ A: } 50x + 20y + 10z = 3200$$
$$\underline{\text{10B: } 30x - 20y - 10z = 0}$$
$$\text{A} + \text{10B} \Rightarrow 80x = 3200$$
$$\therefore x = 40$$

Ó tá $7x - 8y = 0 \Rightarrow 7(40) - 8y = 0$
$\Rightarrow 280 - 8y = 0$
$\Rightarrow y = 35$

Freisin, $3x - 2y - z = 0 \Rightarrow 3(40) - 2(35) - z = 0 \therefore z = 120 - 70 = 50.$

$\therefore (x, y, z) = (40, 35, 50)$ i.e. bhí 40 bonn 50 cent, 35 bonn 20 cent agus 50 bonn 10 cent sa mheaisín.

Cleachtadh 1.9

1. Faigh pointe trasnaithe gach ceann de na péirí línte seo a leanas.

(i) $3x - 2y = 8$, $x + y = 6$ (ii) $3x - y = 1$, $x - 2y = -8$ (iii) $2x - 5y = 1$, $4x - 3y - 9 = 0$

2. Réitigh gach ceann de na péirí cothromóidí comhuaineacha seo a leanas.

(i) $4x - 5y = 22$, $7x + 3y - 15 = 0$ (ii) $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = \frac{1}{6}$, $x - 2y = -8$ (iii) $\frac{4x - 2}{5} = \frac{8y}{10}$, $18x - 20y = 4$

3. Réitigh do x agus y, má tá $\frac{2x - 5}{3} + \frac{y}{5} = 6$ agus $\frac{3x}{10} + 2 = \frac{3y - 5}{2}$.

4. Má tá $y = 3x - 23$ agus $y = \frac{x}{2} + 2$, faigh luachanna y agus x.

5. Réitigh na cothromóidí seo a leanas, ina bhfuil trí anaithnid.

(i) $2x + y + z = 8$, $5x - 3y + 2z = 3$, $7x + y + 3z = 20$ (ii) $2x - y - z = 6$, $3x + 2y + 3z = 3$, $4x + y - 2z = 3$ (iii) $2x + y - z = 9$, $x + 2y + z = 6$, $3x - y + 2z = 17$

6. Faigh pointe trasnaithe gach ceann de na tacair plánaí seo a leanas.

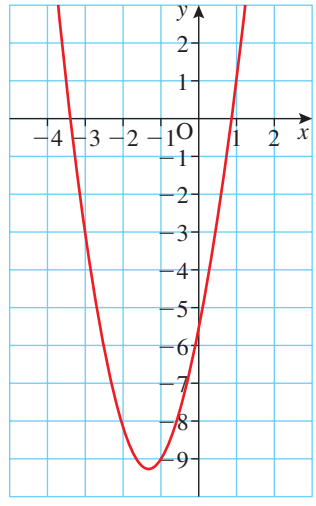
(i) $2a + b + c = 8$, $5a - 3b + 2c = -3$, $7a - 3b + 3c = 1$ (ii) $x + y + 2z = 3$, $4x + 2y + z = 13$, $2x + y - 2z = 9$ (iii) $x + y + z = 2$, $2x + 3y + z = 7$, $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = \frac{2}{3}$

7. Faigh an réiteach (x, y, z) ar

$6x + 4y - 2z - 5 = 3x - 2y + 4z + 10 = 5x - 2y + 6z + 13 = 0.$

8. Téann an cuar $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ trí na trí phointe (1, 2), (2, 4) agus (3, 8). Úsáid na pointí seo chun trí chothromóid in a, b agus c a fháil. Uaidh sin, réitigh chun $f(x)$ a fháil.

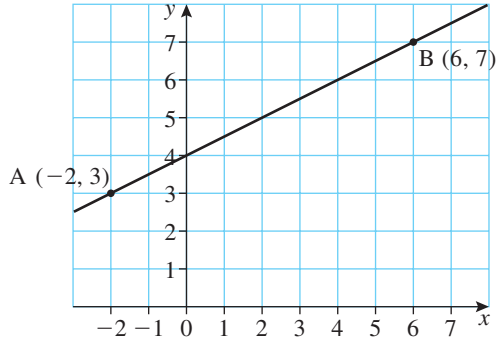
9. Tarraingítear cuar san fhoirm $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ mar a léirítear.
Pioc trí phointe ar bith ar an gcuar agus uaidh sin, scríobh síos trí chothromóid a nascann na comhéifeachtaí a, b agus c. Uaidh sin, réitigh chun $f(x)$ a fháil.



10. Bhí 44,000 duine i láthair ag cluiche i bPáirc an Chrócaigh. €30 agus €20 an dá phraghas a bhí ar thicéid an lá sin. €1.2 milliún euro an méid iomlán airgid a tháinig isteach don chluiche. Cé mhéad duine a d'íoc an praghas níos airde ar an ticéad?

11. I gceann trí bliana, beidh Colm dhá oiread níos sine ná mar a bhí Laobhaise cúig bliana ó shin. Faoi láthair, is ionann 16 agus leath a n−aoiseanna suimithe le chéile. Faigh a n-aoiseanna.

12. Maidir leis an líne a cheanglaíonn A agus B, $y = ax + b$, bain úsáid as an dá phointe ar an líne a thugtar duit chun dhá chothromóid chearnacha in a agus b a cheapadh agus, ar an gcaoi sin, faigh cothromóid na líne.
Fíoraigh go dtéann do líne trí phointe amháin eile ar a laghad idir A agus B.



13. Brúnn dhá fhórsa, N_1 agus N_2, ar leathsféar atá socair.
Má tá $\frac{1}{4}N_1 - N_2 = 0$ agus $N_1 + \frac{1}{2}N_2 - 99 = 0$,
faigh luachanna N_1 agus N_2.

14. Má tá $\dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2} = \dfrac{4}{(x-2)(x+2)}$ i gcás gach luacha ar x,
scríobh síos dhá chothromóid i dtéarmaí a agus b amháin, ag úsáid ionannais ailgéabracha.
Uaidh sin, réitigh do a agus b.
Fíoraigh do chuid freagraí ag úsáid na cothromóide bunaidh.

15. Má tá $\frac{c}{z-3} + \frac{d}{z+2} = \frac{4}{(z-3)(z+2)}$ i gcás gach luacha ar z, réitigh do c agus d.

Fíoraigh do chuid freagraí trí ionadaíocht.

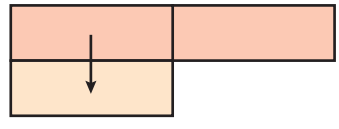
16. Cé mhéad lítear ina bhfuil 70% alcóil is gá a chur le 50 lítear ina bhfuil 40% alcóil chun tuaslagán 50% a dhéanamh?

17. Is é 26 suim dhá uimhir.
Má dhealaítear cúig oiread na huimhreach níos lú ó cheithre oiread na huimhreach níos mó, gheofar 5 mar fhreagra. Abraimis gurb é x an uimhir níos mó agus y an uimhir níos lú.

(i) Scríobh síos dhá chothromóid chomhuaineacha in x agus y.
(ii) Réitigh na cothromóidí do x agus y.
(iii) Fíoraigh do chuid freagraí trí ionadaíocht.

18. Rinne mac léinn staidéar ar charr a bhí ag rolladh síos plána ar fiar. Thomhais sé luas an chairr faoi dhó, ag dhá am éagsúla.
Tar éis 7 soicind, bhí luas 2 m s^{-1} ag an gcarr; tar éis 13 shoicind, mhéadaigh an luas go 5 m s^{-1}.
Úsáid an chothromóid $v = u + at$, áit arb é v an luas agus t an t-am, chun dhá chothromóid líneacha in u agus in a a scríobh síos.
Réitigh na cothromóidí seo chun luachanna u agus a a fháil.

19. Úsáideann feirmeoir 60 m d'fhálú chun cró fada cúng a thógáil do chaoirigh.
Má dhúblaíonn sé an leithead agus má laghdaíonn sé an fad faoina leath, ní bheidh gá ach le 42 m d'fhálú.
Faigh toisí an dá chró.



(Mar a fheictear ón léaráid, ní athraíonn achar an dá chró.
Mínigh an fáth go n-úsáidtear níos lú fálaithe don dara cró.)

20. Tá na pointí (0, 1), (2, 9) agus (4, 41) ar an gcuar $y = ax^2 + bx + c$.

(i) Scríobh trí chothromóid chomhuaineacha in a, b agus c, ag úsáid na bpointí seo.
(ii) Uaidh sin, réitigh na cothromóidí chun luachanna a, b agus c a fháil.

21. Réitigh na cothromóidí comhuaineacha.

(i) $y - z = 3$
$x - 2y + z = -4$
$x + 2y = 11$

(ii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - z = 7$
$\frac{x}{4} - \frac{3y}{2} + \frac{z}{2} = -6$
$\frac{x}{6} - \frac{y}{4} - \frac{z}{3} = 1$

22. Téann an ciorcal $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ trí na pointí (1, 0), (1, 2) agus (2, 1).
Faigh luachanna a, b agus c.

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. Simpligh gach ceann de na sloinn ailgéabracha seo a leanas.

(i) $\dfrac{12m^2n^3}{(6m^4n^5)^2}$ (ii) $\dfrac{3+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}+4}$ (iii) $\dfrac{2+\frac{x}{2}}{x^2-16}$

2. Réitigh do x agus y:

(i) $y = x + 4$
$5y + 2x = 6$

(ii) $3x + y = 7$
$x^2 + y^2 = 13$

3. Úsáid roinnt fhada chun $(x^3 - x^2 - 7x + 3) \div (x - 3)$ a fháil.

4. Roinn $3x^4 - 9x^2 + 27x - 66$ ar $x - 2$.

5. Réitigh na cothromóidí.

(i) $x^4 - 9x^2 = 0$ (ii) $(2x - 1)^3(2 - x) = 0$

6. Más slánchearnóg í $4x^2 + 20x + k$, faigh k.

7. Faigh na slánuimhreacha a agus b sa chaoi go bhfuil

(i) $(3 - \sqrt{2})^2 = a - b\sqrt{2}$ (ii) $\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) = a\sqrt{2} - b$.

8. Fachtóirigh $x^3 - 27$.

9. Má tá $p(x - q)^2 + r = 2x^2 - 12x + 5$ i gcás gach luacha ar x, faigh luachanna p, q agus r.

10. Réitigh na cothromóidí comhuaineacha
$$\begin{aligned} 3x + 5y - z &= -3 \\ 2x + y - 3z &= -9 \\ x + 3y + 2z &= 7. \end{aligned}$$

11. Simpligh $(b + 1)^3 - (b - 1)^3$.

12. Aimsigh an riail a bhaineann le gach ceann de na patrúin chearnacha seo a leanas.

(i) 3, 12, 27, 48, 75 …
(ii) 5, 20, 45, 80, 125 …
(iii) 0.5, 2, 4.5, 8, 12.5 …

13. Aimsigh an riail a bhaineann leis an bpatrún 6, 12, 20, 30, 42 ag úsáid na gcéad difríochtaí agus na ndara difríochtaí. Uaidh sin, faigh an 100ú téarma sa phatrún seo.

14. Tá trí oiread leithead dronuilleoige áirithe 3 cm níos faide ná dhá oiread a faid.
Tá ceithre oiread a faid 12 cm níos mó ná a himlíne.
Faigh toisí na dronuilleoige.

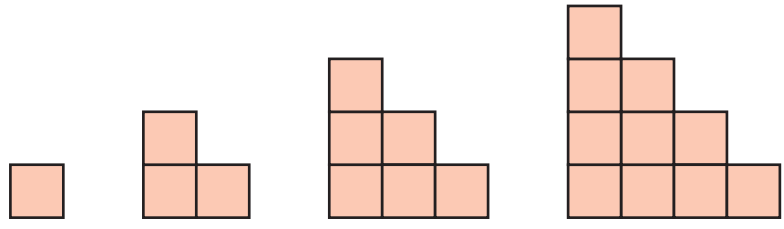
15. Is é $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{r}$ an fhoirmle do scáthán comhchruinn (= sféarúil) ar ga dó r cm, áit arb é u cm fad na frithne (*object distance*) agus v cm fad na híomhá go dtí an scáthán.

Tugann $m = \frac{v - r}{r - u}$ an formhéadú sa scáthán.

(i) Faigh m i dtéarmaí v agus u amháin.
(ii) Faigh m i dtéarmaí v agus u amháin.

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. Tiontaigh na dearaí seo a leanas go patrún uimhreacha agus uaidh sin, scríobh riail don phatrún. Úsáid an riail le fáil amach cé mhéad bríce a theastódh chun an 49ú dearadh a thógáil.



2. Cé mhéad ithreach ar gaineamh 55% di is gá a chur le 1 m^3 d'ithir ar gaineamh 25% di, chun ithir ar gaineamh 35% di a dhéanamh.

Leid: Tabhair x m^3 ar mhéid na hithreach a bheidh ag teastáil.

3. Tá miotalóir ag déanamh 8.4 kg de chóimhiotal ina mbeidh 50% óir. Tá sé chun dhá chóimhiotal a leá, ceann amháin ina bhfuil 60% óir agus ceann eile ina bhfuil 40% óir.

(i) Tabhair x kg agus y kg ar an méid den dá chóimhiotal a theastaíonn.
Scríobh dhá chothromóid a nascann an dá anaithnid x agus y.
(ii) Réitigh na cothromóidí chun an méid den dá chóimhiotal a theastaíonn a fháil.

4. Má tá $(3p - 2t)x + r - 4t^2 = 0$, i gcás gach luacha ar x, taispeáin go bhfuil $r = 9p^2$.

5. Simpligh an chothromóid $\frac{x + y^2}{x^2} + \frac{x - 1}{x} = -1$ agus uaidh sin, aimsigh an cóimheas x^2 le y^2.

6. I rang ceimice, teastaíonn tuaslagán aigéid 15% ó ghrúpa daltaí chun triail a chríochnú. Níl ach tuaslagán aigéid 10% agus tuaslagán aigéid 30% ar fáil sa tsaotharlann. Socraíonn na daltaí ar an dá thuaslagán a mheascadh chun an tuaslagán 15% a fháil.
Má theastaíonn 10 lítear den tuaslagán nua uathu, faigh

(i) líon na lítear den tuaslagán 10% a theastóidh uathu
(ii) líon na lítear den tuaslagán 30% a theastóidh uathu.

7. Ritheann Brian agus Lúcás rás 50 méadar. Ritheann Brian sa chaoi go dtógann sé a soicind air 1 mhéadar a rith. Ritheann Lúcás sa chaoi go dtógann sé b soicind air 1 mhéadar a rith. Buann Lúcás an rás agus é 1 soicind chun tosaigh. An chéad lá eile, ritheann siad rás eile 50 méadar (agus ar na luasanna céanna) ach tugann Lúcás tús 3 mhéadar do Bhrian. Mar sin ní ritheann Brian ach 47 méadar. Buann Lúcás an rás seo freisin agus é 0.1 soicind chun tosaigh.
Faigh

(i) luachanna a agus b (ii) luas Lúcáis.

Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. Theastaigh ó chumann peile Lá na dTeaghlach a eagrú chun airgead a thiomsú don chumann. Shocraigh siad ar thicéid a dhíol roimh ré ar €5 an ceann do dhaoine fásta agus €2.50 an ceann do pháistí in aois a 6 bliana nó níos óige.
Anuraidh, bhí 13,000 duine i láthair nuair a d'eagraigh siad an ócáid chéanna. Anuraidh, ní raibh ach praghas amháin acu ar thicéid.
Theastaigh ón lucht eagraíochta meastachán a dhéanamh ar an ioncam a ghnothóidís ar an lá. Shocraigh siad ar an eolas a fuair siad ó réamh−dhíolachán na dticéad a úsáid chun an meastachán a dhéanamh. Ach níor coimeádadh taifead ar leith ar líon na ndaoine fásta agus líon na bpáistí a cheannaigh ticéad. Bhí a fhios acu gur díoladh 548 ticéad ar fad agus gur bailíodh €2460.

(a) Cum cothromóidí fóirsteanacha chun
  (i) líon na dticéad do dhaoine fásta a díoladh roimh ré a fháil
  (ii) líon na dticéad do pháistí a díoladh roimh ré a fháil
  (iii) comhréir na dticéad do dhaoine fasta a díoladh a fháil.

(b) Bunaithe ar an tinreamh céanna i mbliana, déan meastachán ar an ioncam a mbeidís ag súil leis don ócáid seo.

2. Déanann monarcha dhá shórt toilg. Dhá uair an chloig oibre sa roinn déantúsaíochta agus uair an chloig oibre sa roinn ballchríochnaithe a ghlacann an tolg bunúsach.
Dhá uair go leith oibre sa roinn déantúsaíochta agus uair go leith oibre sa roinn ballchríochnaithe a ghlacann an tolg deluxe.
Tá uasmhéid 48 uair an chloig d'am oibrithe ar fáil sa roinn déantúsaíochta agus uasmhéid 26 uair ar fáil sa roinn ballchríochnaithe in aghaidh an lae.

(i) Má dhéantar x tolg bhunúsacha agus y tolg deluxe in aghaidh an lae, agus go bhfeidhmíonn an roinn déantúsaíochta i mbarr a hacmhainne, mínigh an fáth a bhfuil $2x + 2.5y = 48$.
(ii) Aimsigh an dara cothromóid in x agus y má fheidhmíonn an roinn ballchríochnaithe i mbarr a hacmhainne freisin.
(iii) Cé mhéad tolg bunúsach agus tolg deluxe is féidir a dhéanamh má fheidhmíonn an dá roinn i mbarr a n-acmhainne?

3. Tá bonn cearnógach x cm ar fad ar bhosca dronuilleogach dúnta. Tá an bosca h cm ar airde. Is é 40 cm^3 toirt an bhosca.

(i) Scríobh slonn do h i dtéarmaí x.
(ii) Taispeáin go dtugann $S = 2x^2 + \frac{160}{x}$ achar dhromchla an bhosca seo, S cm^2.
(iii) Tarraing sceitse de S in aghaidh x.
(iv) Faigh na luachanna féideartha ar x agus h i gcás go bhfuil achar dromchla 72 cm^2 ag an mbosca seo.

4. Díolann comhlacht áirithe cluichí ar €11.50 an ceann. €3500 an costas tosaigh ar an táirgeadh agus €10.50 in aghaidh gach cluiche a tháirgtear ansin.
Tabhair x ar líon na gcluichí a tháirgtear.

(i) Más é $C(x)$ an costas ar x cluiche a tháirgeadh, faigh slonn ar $C(x)$ i dtéarmaí x.
(ii) Má sheasann $I(x)$ don ioncam a bhailítear tar éis x cluiche a dhíol, faigh slonn ar $I(x)$ i dtéarmaí x.

(iii) Breac graif $I(x)$ agus $C(x)$ ar na haiseanna céanna. (Scálaigh an x-ais in aonaid de 500 agus an y-ais in aonaid de 10,000).

(iv) Cé mhéad cluiche is gá a dhíol chun na costais ar an táirgeadh a thabhairt isteach?

(v) Bíodh $P = I - C$. Cad dó a seasann P?

(vi) Cé mhéad cluiche is gá a dhíol chun brabús €2000.00 a dhéanamh?

5. Tá 15 lá ag Síle chun cuilt a chríochnú don Díolachán Saothair. Fuálann sí cearnóga gorma na cuilte ar ráta 4 chearnóg in aghaidh an lae; fuálann sí cearnóga bána na cuilte ar ráta 7 gcearnóg in aghaidh an lae. Beidh 96 cearnóg sa chuilt iomlán. Cosnaíonn an t-éadach gorm €0.80 an chearnóg agus cosnaíonn an t-éadach bán €1.20 an chearnóg.

(a) Faigh costas na cuilte.

(b) Déantar dronuilleog as na 96 cearnóg. Beidh fad agus leithead na dronuilleoige sa chóimheas 3:2.
Socraíonn Síle ar dhronuilleog de chearnóga gorma a chur i lár na cuilte, agus cearnóga bána a chur mórthimpeall ar an dronuilleog ghorm sin.
Tarraing leagan amach na gcearnóg gorm agus na gcearnóg bán a thabharfadh dearadh siméadrach.

6. Déanann comhlacht beag baraí rotha don mhargadh a dhéanann soláthar do gharraithe.
Tá forchostais €30,000 in aghaidh na bliana ag an gcomhlacht.
Cosnaíonn sé €40 orthu gach bara rotha a dhéanamh.

(i) Scríobh riail a dhéanann amach €C, costas iomlán x bara rotha a tháirgeadh sa bhliain.

(ii) Más é 6000 bara rotha sa bhliain an meántáirgeadh, cad é an costas foriomlán in aghaidh an bhara rotha?

(iii) Cé mhéad bara rotha is gá a dhéanamh sa chaoi gurb é €46 in aghaidh an bhara rotha an meánchostas?

(iv) Díoltar na baraí rotha le miondíoltóirí ar €80 an ceann. Scríobh riail a dhéanann amach an t-ioncam, €R, a thagann ó x bara rotha a dhíol le miondíoltóirí.

(v) Breac na graif do C agus R ar na haiseanna céanna. Cuir x, líon na mbaraí rotha, ar an ais chothrománach.

(vi) Cad é íosmhéid na mbaraí rotha is gá a dhíol in aghaidh na bliana chun brabús a dhéanamh?

(vii) Scríobh riail a dhéanann amach €P, an brabús a thagann ó x bara rotha a tháirgeadh agus a dhíol.

7. Tá scuaine fhada ag an doras isteach go ceolchoirm. Seasann Séan ag deireadh na scuaine. Gach uair a ligtear duine amháin isteach, scipeálann Seán (a) dhá spás nó (b) trí spás chun tosaigh.

Líon isteach an tábla a leanas chun patrún uimhreacha a chruthú a thaispeánfaidh líon na ndaoine a fuair cead isteach roimh Sheán, bunaithe ar fhad na scuaine.

Ag úsáid an phatrúin a chruthaigh tú, faigh líon na ndaoine a fuair cead isteach roimh Sheán má tá 70 duine sa scuaine nuair a shroicheann sé é.

Líon na ndaoine sa scuaine sular sheas Seán isteach	(a) Líon na ndaoine a fuair cead isteach roimh Sheán (ag scipeáil dhá spás)	(b) Líon na ndaoine a fuair cead isteach roimh Sheán (ag scipeáil trí spás).
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
70		

caibidil 2

Ailgéabar 2

Focail thábhachtacha

ionadú **idirdhealaí** **an chearnóg a shlánú** **fréamhacha réadacha ar leith** **samhailteach** **cóimheasta** **rinn parabóil** **uasphointe** **íosphointe** **surda** **éagóimheasta** **an t-ainmneoir a chóimheas**

Mír 2.1 Cothromóidí cearnacha

Mar a luadh cheana, nuair is é a dó an chumhacht is airde atá ag athróg in iltéarmach, slonn cearnach a thugtar ar an slonn a thagann as sin.
Baintear úsáid as sloinn chearnacha chun cothromóidí cearnacha a dhéanamh. Seo roinnt samplaí:

(i) $3x^2 + 4x - 5 = 0$ (ii) $6 = 3t + 8t^2$ (iii) $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Dhá réiteach a bhíonn ar an gcothromóid chearnach, i.e. dhá fhréamh a bhíonn léi.

Cothromóidí cearnacha a réiteach

Seo roinnt modhanna chun cothromóidí cearnacha a réiteach:

(i) fachtóiriú (ii) foirmle na cothromóide cearnaí (iii) modhanna a bhaineann le graf (iv) ionadú.

(i) Modhanna a bhaineann le fachtóiriú (mar atá i gCaibidil 1)

Más féidir cothromóid (= 0) a fhachtóiriú, caithfidh ceann amháin ar a laghad dá fachtóirí a bheidh cothrom le nialas.

Má tá $(a)(b) = 0$, tá $a = 0$ nó $b = 0$.

Sampla 1

Bain úsáid as fachtóirí chun iad seo a réiteach: (i) $x^2 - 5x - 6 = 0$ (ii) $y^2 - 5y = 0$ (iii) $4t^2 - 100 = 0$

(i) $x^2 - 5x - 6 = 0$
$(x - 6)(x + 1) = 0$
$\therefore\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$
nó $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

(ii) $y^2 - 5y = 0$
$y(y - 5) = 0$
$\therefore\ y = 0$
nó $y - 5 = 0 \rightarrow y = +5$

(iii) $4t^2 - 100 = 0$
$4(t^2 - 25) = 0$
$4(t - 5)(t + 5) = 0$
$\therefore\ t - 5 = 0 \rightarrow t = +5$
nó $t + 5 = 0 \rightarrow t = -5$

Réitigh (fréamhacha) (i) $x = (6, -1)$ (ii) $y = (0, +5)$ (iii) $t = (+5, -5)$

(ii) Foirmle na cothromóide cearnaí

Is féidir foirmle na cothromóide cearnaí $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a úsáid chun cothromóid chearnach ar bith atá san fhoirm $ax^2 + bx + c = 0$.

Má tá $ax^2 + bx + c = 0$,

tá $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Is maith an cleachtas é na comhéifeachtaí a, b agus c a scríobh amach sula gcuireann tú an fhoirmle i bhfeidhm.

Sampla 2

Réitigh $x - 6 = \dfrac{3}{x}$. (Nóta: Ní bhíonn sé soiléir i gcónaí gur ag plé le cothromóid san fhoirm $ax^2 + bx + c = 0$ atáimid.)

$$x - 6 = \frac{3}{x}$$

Atheagrú $\rightarrow x^2 - 6x = 3 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0$

$\therefore$ $a = 1, b = -6, c = -3$, uaidh sin $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

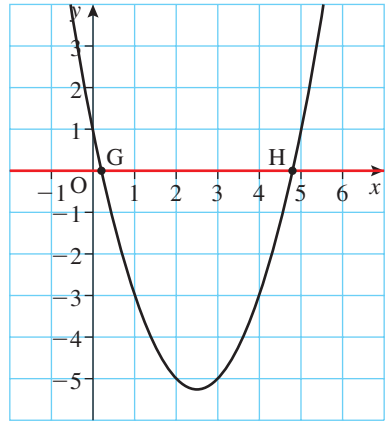
$\therefore$ is iad $x = 3 + 2\sqrt{3}$ nó $x = 3 - 2\sqrt{3}$ fréamhacha (réitigh) na cothromóide.

(iii) Modhanna atá bunaithe ar ghraf

Ach an slonn $y = x^2 - 5x + 1$, $0 \le x \le 5$, a ghrafadh, faighimid na pointí
(0, 1), (1, −3), (2, −5), (3, −5), (4, −3), (5, 1).
Nuair a bhreacaimid iad sin, faighimid cuar a bhfuil cruth ∪ air, cuar atá feicthe go minic cheana againn.

Chun $y = x^2 - 5x + 1 = 0$ a réiteach ón ngraf, ní mór dúinn na pointí ar an gcuar ina bhfuil $y = 0$ a aimsiú, i.e. na pointí G(0.2, 0) agus H(4.8, 0).

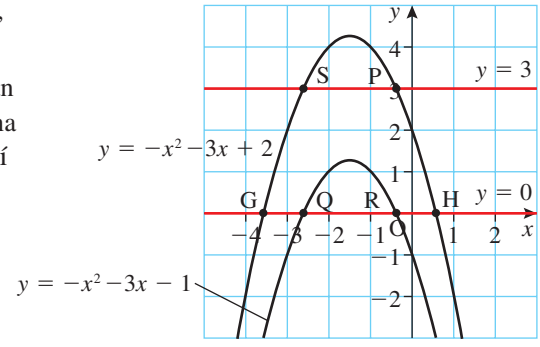
$\therefore$ is iad 0.2 agus 4.8 na fréamhacha.



Nuair a bhreactar an slonn $y = -x^2 - 3x + 2$, faighimid graf a bhfuil cruth $\cap$ air.

Arís, is sna háiteanna a dtrasnaíonn an cuar an $-x$-ais (i.e. nuair atá $y = 0$) atá fréamhacha na cothromóide $-x^2 - 3x + 2 = 0$, i.e. na pointí G$(-3.6, 0)$ agus H$(0.6, 0)$.

Ní féidir le modhanna atá bunaithe ar ghraf ach garluachanna a thabhairt ar fhréamhacha cothromóide.



ag réiteach $-x^2 - 3x + 2 = 3$

Chun an chothromóid $-x^2 - 3x + 2 = 3$ a réiteach, is féidir linn ceachtar de dhá chur chuige a úsáid:

(i) Na pointí ar an gcuar $y = -x^2 - 3x + 2$ ina bhfuil $y = 3$ a aimsiú (i.e. S, P) **nó**

(ii) An cuar nua $y = -x^2 - 3x + 2 - 3 = -x^2 - 3x - 1$ a chruthú agus $-x^2 - 3x - 1 = 0$ a réiteach.

Tá an dá chuar difriúil lena chéile ach is iad na réitigh chéanna atá orthu (i.e. na fréamhacha céanna atá leo), Q = S = $(x, y) \cong (-2.6, 0)$ agus P = R = $(x, y) \cong (-0.4, 0)$.

(iv) Ionadú

Is féidir na saghsanna cothromóide seo a leanas a réiteach ach ionadú oiriúnach a roghnú, ionadú a chruthaíonn cothromóid chearnach nua san fhoirm chaighdeánach.

(i) $\left(t - \frac{6}{t}\right)^2 - 6\left(t - \frac{6}{t}\right) + 5 = 0$ bíodh $u = \left(t - \frac{6}{t}\right)$, mar sin $u^2 - 6u + 5 = 0$

(ii) $x^4 + x^2 - 6 = 0$ bíodh u^2, mar sin $u^2 + u - 6 = 0$

(iii) $2x + 3\sqrt{x} = 5$ bíodh $u = \sqrt{x}$, mar sin $2u^2 + 3u - 5 = 0$

Ach na luachanna le haghaidh u a bheith aimsithe, is féidir na luachanna le haghaidh x a fháil ansin.

Sampla 3

Réitigh $x^4 + x^2 - 6 = 0$ i gcás $x \in \mathbb{R}$.

Bíodh $u = x^2$, $\Rightarrow u^2 = x^4$.

$$x^4 + x^2 - 6 = 0 \Rightarrow u^2 + u - 6 = 0$$
$$\Rightarrow (u + 3)(u - 2) = 0$$
$$u + 3 = 0 \Rightarrow u = -3 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{(-3)}$$
$$\textbf{nó} \quad u - 2 = 0 \Rightarrow u = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{(2)}$$

$x = \pm\sqrt{(-3)}$, dhá fhréamh shamhailteacha nach dteastaíonn.

$\therefore$ is iad $x = +\sqrt{(2)}, -\sqrt{(2)}$ na réitigh.

[Nóta: $(+\sqrt{(2)})^4 + (+\sqrt{(2)})^2 - 6 = 0$ agus $(-\sqrt{(2)})^4 + (-\sqrt{(2)})^2 - 6 = 0$]

Sampla 4

Réitigh $2x + 3\sqrt{x} = 5$ i gcás $x \in \mathbb{R}$.

Bíodh $u = \sqrt{x}$ $\Rightarrow u^2 = x \Rightarrow 2x + 3\sqrt{x} = 5 \Rightarrow 2u^2 + 3u - 5 = 0$

$\Rightarrow 2u^2 + 3u - 5 = (u - 1)(2u + 5) = 0$

$\Rightarrow u = 1$ nó $u = \dfrac{-5}{2}$

Dá bhrí sin, $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

nó $\sqrt{x} = \dfrac{-5}{2} \Rightarrow x = \dfrac{25}{4}$

Dearbhú go bhfuil na réitigh bailí: $x = 1 \Rightarrow 2x + 3\sqrt{x} = 2(1) + 3(\sqrt{1}) = 5$

Freisin, $x = \dfrac{25}{4} \Rightarrow 2x + 3\sqrt{x} = 2\left(\dfrac{25}{4}\right) + 3\left(\sqrt{\dfrac{25}{4}}\right) \neq 5$

Dá bhrí sin níl ach aon réiteach réadach amháin ann: $x = 1$.

Cleachtadh 2.1

1. Bain úsáid as fachtóirí chun na cothromóidí seo a leanas a réiteach:

(a) (i) $(x - 4)(x + 5) = 0$ (ii) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (iii) $x^2 - 4x - 5 = 0$
(b) (i) $x^2 - 2x - 15 = 0$ (ii) $2x^2 + 7x - 15 = 0$ (iii) $3x^2 - 13x - 10 = 0$
(c) (i) $5x^2 - 13x - 6 = 0$ (ii) $9x^2 + 3x - 20 = 0$ (iii) $8x^2 - 2x - 15 = 0$
(d) (i) $x^2 - 9 = 0$ (ii) $3x^2 - 10x = 0$ (iii) $5x^2 - 8x = 0$
(e) (i) $15 - 7x - 2x^2 = 0$ (ii) $10 + x - 3x^2 = 0$ (iii) $12 - 6x - 6x^2 = 0$
(f) (i) $(x + 5)(x^2 - 16)$ (ii) $(x - 3)(4x^2 - 4) = 0$
(g) (i) $(x^2 - 4)(3x + 4) = 0$ (ii) $(2x + 8)(x^2 - 2x - 15) = 0$

2. Bain úsáid as foirmle na cothromóide cearnaí chun gach ceann díobh seo a réiteach.
Bíodh do chuid freagraí ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

(a) (i) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (ii) $x^2 + 3x - 2 = 0$ (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$
(b) (i) $x^2 - 6x + 3 = 0$ (ii) $3x^2 - 8x + 1 = 0$ (iii) $2x^2 + 4x - 5 = 0$

3. Bain úsáid as foirmle na cothromóide cearnaí chun gach ceann díobh seo a réiteach.
Fág do chuid freagraí i bhfoirm surda.

(a) (i) $3x^2 + 4x - 5 = 0$ (ii) $2x^2 - 12x - 5 = 0$ (iii) $(2x - 3)^2 = 8$
(b) (i) $x^2 + 4x - 8 = 0$ (ii) $5x^2 + 4x - 2 = 0$ (iii) $x^2 - x - 1 = 0$

4. Réitigh na cothromóidí seo a leanas:

(a) (i) $\dfrac{x + 7}{3} + \dfrac{2}{x} = 4$ (ii) $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{4}{x} = 3$ (iii) $\dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{2}{x + 1} = 1$

(b) (i) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x - 2} = 3$ (ii) $\dfrac{x + 2}{x - 4} = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$ (iii) $\dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{5}{x - 4}$

5. Trí ionadú oiriúnach a aimsiú, réitigh gach ceann díobh seo:

(a) (i) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0, x \in R$ (ii) $(x+1)^2 + 3(x+1) - 2 = 0$
(iii) $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$ (iv) $2(k-2)^2 - 3(k-2) - 4 = 0$

(b) (i) $(2y-1)^2 - 3(2y-1) - 28 = 0$ (ii) $(2y-3)^2 - 1 = 0$

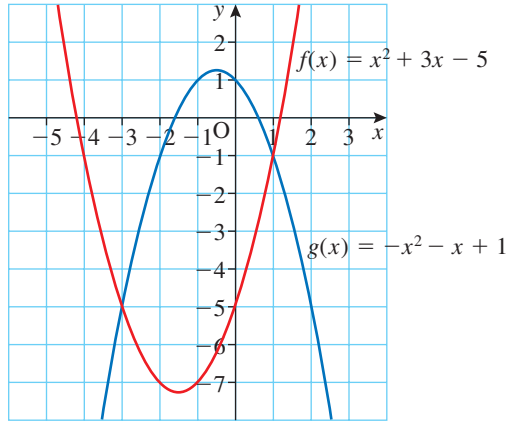
(c) $\left(y + \frac{4}{y}\right)^2 - 9\left(y + \frac{4}{y}\right) + 20 = 0$

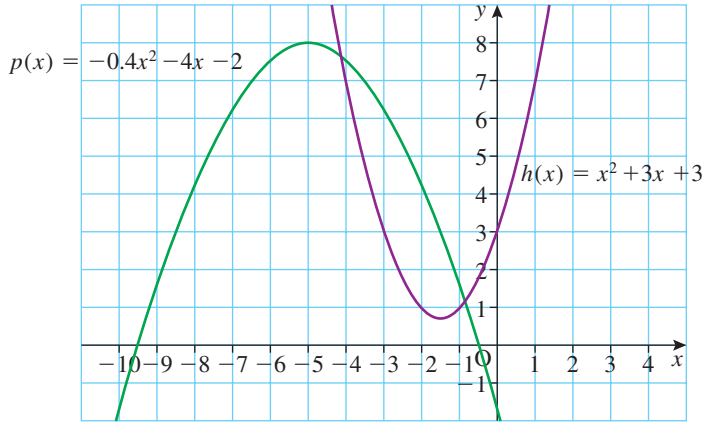
(d) $\left(2t - \frac{5}{t}\right)^2 - 12\left(2t - \frac{5}{t}\right) + 27 = 0$

6. Réitigh $2x^2 - \sqrt{3}x - 3 = 0$.

7. Agus tú ag úsáid na ngraf, faigh gar-réitigh ar gach ceann de na cothromóidí seo a leanas.

(a) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (b) $-x^2 - x + 1 = -2$ (c) $p(x) = 0$ (d) $g(x) > 0$
(e) $-x^2 - x + 1 = 0$ (f) $g(x) = f(x)$ (g) $h(x) = 5$ (h) $p(x) > h(x)$

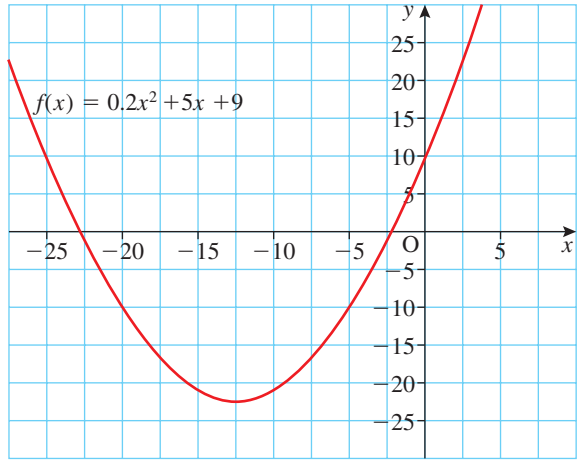




8. Agus tú ag úsáid na ngraf thuas, mínigh cén fáth nach bhfuil réiteach réadach ar bith ar $x^2 + 3x + 3 = 0$.

9. Más iad x_1 agus x_2 fréamhacha na cothromóide $f(x) = 0.2x^2 + 5x + 9 = 0$ agus má tá $x_1 > x_2$, bain úsáid as an ngraf chun garluach a fháil le haghaidh

(a) $(x_2 - x_1)$
(b) $(x_2 + x_1)$

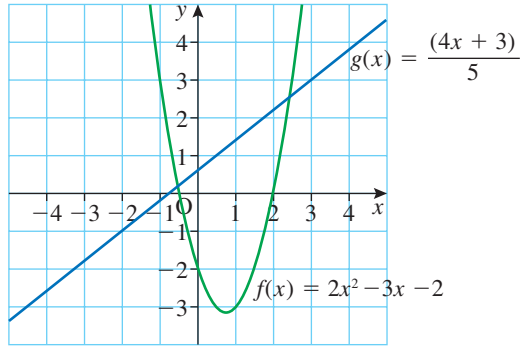


10. Féach ar ghraif na bhfeidhmeanna

$f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ agus $g(x) = \dfrac{4x + 3}{5}$

ar dheis. Bain úsáid as na graif chun na réitigh ar na cothromóidí seo a leanas a mheas:

(a) $f(x) = 0$
(b) $g(x) = 0$
(c) $f(x) = g(x)$.



11. Bain úsáid as an ionadú $u = \sqrt{x}$, chun gach ceann de na cothromóidí seo a leanas a réiteach. Mínigh an fáth nach bhfuil ach réiteach amháin ar gach cothromóid.

(i) $2x + 3\sqrt{x} = 5$ (ii) $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

12. Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo a leanas. Tabhair do chuid freagraí i bhfoirm surda.

(i) $x^2 - \sqrt{7}x - 14 = 0$ (ii) $2x^2 + 7\sqrt{5}x + 15 = 0$

Mír 2.2 Cineál na bhfréamhacha cearnacha

1. An t-idirdhealaí

Tá úsáid bainte againn as an bhfoirmle $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ chun cothromóidí cearnacha san fhoirm $ax^2 + bx + c = 0$ a réiteach, áit a bhfuil $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Is é luach an tsloinn $(b^2 - 4ac)$ a chinnfidh cén cineál fréamhacha a bheidh leis an gcothromóid seo. **Idirdhealaí** na cothromóide a thugtar air.

$(b^2 - 4ac)$ = idirdhealaí

2. Fréamhacha réadacha ar leith

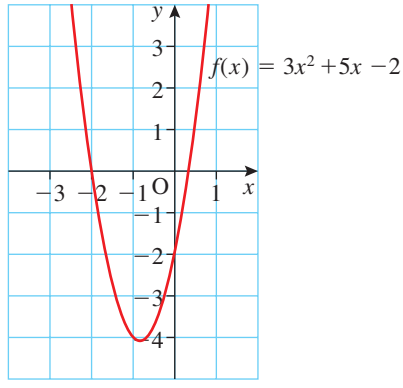
Bíonn fréamhacha réadacha ar leith ann nuair atá $\mathbf{(b^2 - 4ac) > 0}$.

m.sh. $3x^2 + 5x - 2 = 0$; $a = 3, b = 5, c = -2$;
$\therefore (b^2 - 4ac) = [5^2 - 4(3)(-2)] = 49 > 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

$$\rightarrow x = \frac{-5 + 7}{6}, \frac{-5 - 7}{6} = (0.33, -2)$$

Sa chás seo, trasnaíonn an graf an x-ais ag dhá áit ar leith, $(-2, 0)$ agus $(0.33, 0)$.



$\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$

3. Fréamhacha réadacha cothroma

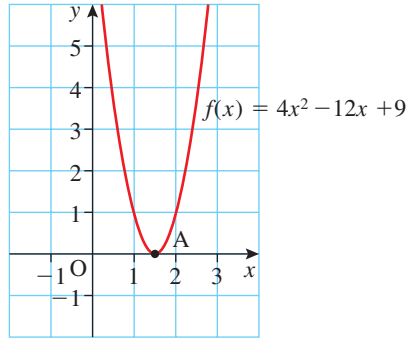
Bíonn fréamhacha réadacha cothroma ann nuair atá $\mathbf{(b^2 - 4ac) = 0}$.

m.sh. $4x^2 - 12x + 9 = 0$; $a = 4, b = -12, c = 9$;
$\therefore (b^2 - 4ac) = [144 - 4(4)(9)] = 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{(0)}}{2.4}$$

$$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Ní bhíonn ach aon réiteach amháin ann agus teagmhaíonn an graf leis an x-ais sa phointe seo: $A(\frac{3}{2}, 0)$.



$\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$

4. Fréamhacha samhailteacha

Bíonn fréamhacha samhailteacha ann nuair atá $\mathbf{(b^2 - 4ac) < 0}$.

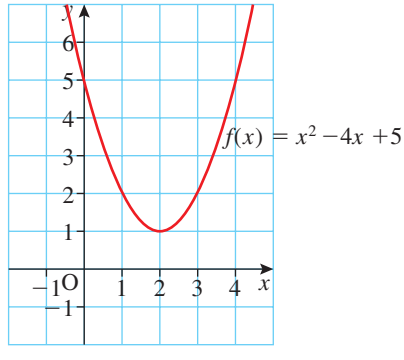
m.sh. $x^2 - 4x + 5 = 0$; $a = 1, b = -4, c = 5$;
$\therefore (b^2 - 4ac) = [16 - 4(1)(5)] = -4 < 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)}}{2.1}$$

$$\rightarrow x = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2}, \frac{4 - \sqrt{-4}}{2}$$

Bíodh $\sqrt{-1} = i$. Ansin is féidir linn na réitigh a athscríobh mar leanas:

$$x = \frac{4 + 2i}{2}, \frac{4 - 2i}{2} = 2 + i, 2 - i$$



$\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$

Ní féidir na pointí sin a léiriú ar an bplána réadach. (Déanfaimid a thuilleadh staidéir ar uimhreacha den sórt sin sa chéad chaibidil eile, an chaibidil ar na huimhreacha coimpléascacha.)

Tugaimid faoi deara nach ngearrann (nach dtrasnaíonn) an cuar an x-ais.

5. Fréamhacha cóimheasta

Más slánchearnóg é $(b^2 - 4ac)$, is uimhir chóimheasta é $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ agus ciallaíonn sé sin gur fréamhacha cóimheasta atá leis an gcothromóid.

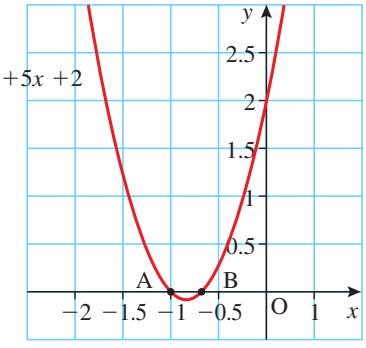
(Is iad na slánchearnóga ná 1, 4, 9, 16, 25, 36, etc.)

m.sh. $3x^2 + 5x + 2 = 0$; $a = 3, b = 5, c = 2$;

$\therefore (b^2 - 4ac) = [25 - 4(3)(2)] = 1$ atá ina shlánchearnóg.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{(25 - 24)}}{2.3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{6} = \frac{-6}{6}, \frac{-4}{6} = (-1, -\tfrac{2}{3})$$



Achoimre

1. Má tá $(b^2 - 4ac) > 0 \rightarrow$ dhá fhréamh réadacha dhifriúla (ar leith)
2. Má tá $(b^2 - 4ac) = 0 \rightarrow$ dhá fhréamh réadacha chothroma
3. Má tá $(b^2 - 4ac) < 0 \rightarrow$ dhá fhréamh shamhailteacha
4. Más slánchearnóg é $(b^2 - 4ac) \rightarrow$ fréamhacha cóimheasta

Nóta: Nuair a deirtear i gceist go bhfuil **fréamhacha réadacha** le cothromóid éigin, tugann sé sin le tuiscint gur dhá fhréamh réadacha ar leith nó dhá fhréamh réadacha chothroma (= ilfhréamh) atá léi.

Fréamhacha **réadacha** a bhíonn ann má tá $(b^2 - 4ac) \geq 0$

Sampla 1

Faigh luach an idirdhealaí i ngach ceann díobh seo a leanas.
Abair cén sórt fréamhacha atá leis an gcothromóid:

(i) dhá fhréamh réadacha ar leith (ii) dhá fhréamh réadacha chothroma
(iii) gan aon fhréamh réadach.

(a) $3x^2 + 5x - 1 = 0$ (b) $49x^2 + 42x + 9 = 0$
(c) $2x^2 + 8x + 9 = 0$ (d) $2x^2 + 7x + 4 = 0$

(a) $3x^2 + 5x - 1 = 0 \rightarrow a = 3, b = 5, c = -1.$
$\therefore (b^2 - 4ac) = 25 - 4(3)(-1) = 37 > 0$ $\therefore$ dhá fhréamh réadacha ar leith.

(b) $49x^2 + 42x + 9 = 0 \rightarrow a = 49, b = 42, c = 9.$
$\therefore (b^2 - 4ac) = 1764 - 4(49)(9) = 0$ $\therefore$ dhá fhréamh réadacha chothroma.

(c) $2x^2 + 8x + 9 = 0 \rightarrow a = 2, b = 8, c = 9.$
$\therefore (b^2 - 4ac) = 64 - 4(2)(9) = -8 < 0$ $\therefore$ gan aon fhréamh réadach.

(d) $2x^2 + 7x + 4 = 0 \rightarrow a = 2, b = 7, c = 4.$
$\therefore (b^2 - 4ac) = 49 - 4(2)(4) = 17 > 0$ $\therefore$ dhá fhréamh réadacha ar leith.

Sampla 2

Faigh na luachanna ar k a fhágann gur fréamhacha cothroma atá le $-8 + kx - 2x^2 = 0$.

$$-8 + kx - 2x^2 = 0 \Rightarrow a = -2, b = k, c = -8.$$

I gcás fréamhacha cothroma, $(b^2 - 4ac) = 0$.

$\therefore \quad (b^2 - 4ac) = [k^2 - 4(-2)(-8)]$

$\therefore \quad k^2 - 64 = 0 \qquad \therefore \quad k = \pm 8$

Sampla 3

Tugtar duit an chothromóid $px^2 + (p + q)x + q = 0$.

(i) Taispeáin go bhfuil na fréamhacha réadach i gcás gach luacha ar p agus $q \in \mathbb{R}$.

(ii) Taispeáin go bhfuil na fréamhacha cóimheasta.

(iii) Uaidh sin faigh

(a) na fréamhacha, i dtéarmaí p agus q

(b) na fachtóirí, i dtéarmaí p agus q.

$$px^2 + (p + q)x + q = 0 \rightarrow a = p, b = (p + q), c = q.$$

(i) I gcás fréamhacha cothroma, caithfimid a thaispeáint go bhfuil $(b^2 - 4ac) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \therefore \quad (b^2 - 4ac) &= (p + q)^2 - 4(p)(q) \\ &= p^2 + 2pq + q^2 - 4pq \\ &= p^2 - 2pq + q^2 = (p - q)^2 \end{aligned}$$

Ós rud é nach féidir (uimhir ar bith)^2 a bheith diúltach $\Rightarrow (p - q)^2 \geqslant 0$.

$\therefore \quad (b^2 - 4ac) \geqslant 0$

$\therefore$ tá na fréamhacha réadach.

(ii) I gcás fréamhacha cóimheasta, caithfidh $(b^2 - 4ac)$ a bheith ina shlánchearnóg.

Ó tá $(b^2 - 4ac) = (p - q)^2$, i.e. slánchearnóg,

$\therefore$ tá na fréamhacha cóimheasta freisin.

(iii) (a) Is iad na fréamhacha ná $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(p + q) \pm \sqrt{(p - q)^2}}{2p}$

$$= \frac{-(p + q) \pm (p - q)}{2p}$$

$$\therefore \quad x = \left(\frac{-2q}{2p}, \frac{-2p}{2p}\right) = \left(\frac{-q}{p}, -1\right)$$

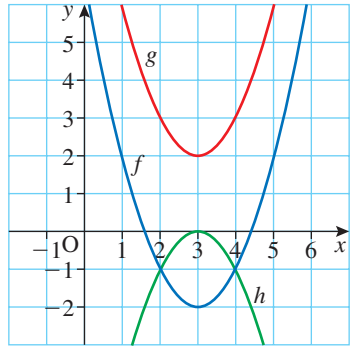
(b) Is iad na fachtóirí ná $x + \dfrac{q}{p}$ agus $x + 1$,

i.e. $(xp + q)$ agus $(x + 1)$.

Cleachtadh 2.2

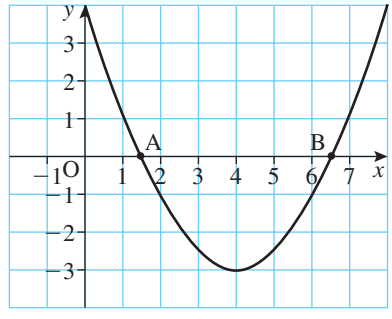
1. Féach ar an léaráid ar dheis. Ón méid a fheiceann tú, abair cé acu de na cuair f, g nó h a bhfuil

(i) fréamhacha réadacha ar leith leo
(ii) fréamhacha réadacha cothroma leo
(iii) fréamhacha samhailteacha leo.
(iv) I gcás fréamhacha réadacha, tabhair meastachán ón ngraf ar fhréamhacha gach cothromóide.



2. Féach ar an gcuar ar dheis. Tá a chothromóid san fhoirm $ax^2 + bx + c = 0$.

Faigh comhordanáidí na bpointí A agus B i dtéarmaí a, b agus c.



3. I gcás gach ceann de na cothromóidí seo a leanas, faigh an t-idirdhealaí agus abair an bhfuil na fréamhacha

(a) réadach agus difriúil (b) réadach agus cothrom (c) samhailteach.

(i) $2x^2 + x + 5 = 0$ (ii) $-2x^2 + 3x + 1 = 0$ (iii) $3x^2 + 2x - 1 = 0$
(iv) $-3 + 2x - x^2 = 0$ (v) $x^2 + 8x + 16 = 0$ (vi) $25 - 10x + x^2 = 0$

4. Tarraing sceitse de chuar cearnach ar bith atá deimhneach i gcás gach luacha ar x. Má tá $3x^2 - kx + 12$ deimhneach i gcás gach luacha ar x, faigh raon na luachanna féideartha ar k.

5. I gcás gach ceann de na cothromóidí seo a leanas, cén luach/cé na luachanna ar k a fhágann gur fréamhacha cothroma atá léi?

(i) $x^2 - 10x + k = 0$ (ii) $4x^2 + kx + 9 = 0$ (iii) $x^2 - x(2k + 2) + 5k + 1 = 0$

6. Faigh luach k más fréamhacha cothroma atá leis an gcothromóid $k^2x^2 + 2(k + 1) + 4 = 0$.

7. Ag cuimhneamh duit go bhfuil (réaduimhir ar bith)$^2 \geq 0$, cruthaigh gur fréamhacha réadacha atá leis na cothromóidí seo a leanas i gcás gach luacha ar $k \in \mathbb{R}$.

(i) $x^2 - 3kx - k^2 = 0$ (ii) $kx^2 + 2x + (2 - k) = 0$

8. Taispeáin gur réadach atá fréamhacha na cothromóide $x^2 - 3x + 2 - c^2 = 0$ i gcás gach luacha ar $c \in \mathbb{R}$.

9. Cruthaigh gur fréamhacha réadacha atá leis an gcothromóid $(k - 2)x^2 + 2x - k = 0$, cuma cén luach atá ar k.

10. Faigh an luach ar k a fhágann gur fréamhacha cothroma atá leis an gcothromóid $(k - 2)x^2 + x(2k + 1) + k = 0$.

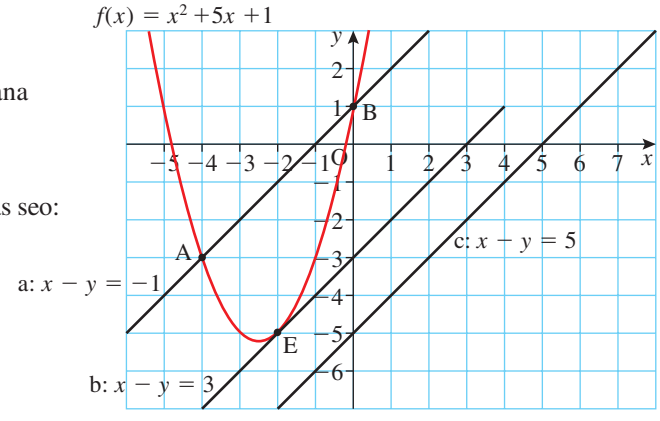
11. Taispeáin gur fréamhacha cothroma atá leis an gcothromóid $(m + 3)x^2 + (6 - 2m)x + m - 1 = 0$ má tá $m = \frac{3}{2}$.

12. Más fréamhacha cothroma atá leis an gcothromóid $ax^2 + bx + 1 = 0$, scríobh a i dtéarmaí b. Scríobh síos uaidh sin fréamh na cothromóide i dtéarmaí b.

13. Taispeáin nach féidir fréamhacha réadacha a bheith leis an gcothromóid $x^2 - 2px + 3p^2 + q^2 = 0$ i gcás $p, q \in \mathbb{R}$.

Mír 2.3 Cothromóidí cearnacha ₇ líneacha a réiteach

Chun na pointí ina dtrasnaíonn líne agus cuar a chéile a fháil, bainimid úsáid as teicníc ar a dtugtar **ionadú**. Bhaineamar úsáid as an modh seo cheana agus muid ag réiteach cothromóidí líneacha comhuaineacha.



Tarlóidh ceann amháin de thrí rud sa chás seo:

(i) Trasnóidh an líne an cuar in dhá phointe

(ii) Trasnóidh an líne an cuar i bpointe amháin

(iii) Ní thrasnóidh an líne an cuar ar chor ar bith.

Mura mbíonn ach aon phointe trasnaithe amháin ann, deirtear gur **tadhlaí** leis an gcuar í an líne.

Trasnaíonn an líne $x - y = -1$ an cuar $y = x^2 + 5x + 1$ in dhá phointe, A$(-4, -3)$ agus $B(0, 1)$.

Is tadhlaí leis an gcuar $y = x^2 + 5x + 1$ í an líne $x - y = 3$ sa phointe E$(-2, -5)$.

Ní thrasnaíonn an líne $x - y = 5$ an cuar.

Sampla 1

Faigh an pointe/na pointí trasnaithe idir

(i) $x - y = -1$ (ii) $x - y = 3$ agus an cuar $y = x^2 + 5x + 1$.

(i) Ó tá $x - y = -1$

$\rightarrow -y = -1 - x$

$\rightarrow y = (1 + x)$

Ach $y = (1 + x)$ a ionadú isteach in $y = x^2 + 5x + 1$, faighimid $(1 + x) = x^2 + 5x + 1$.

$\therefore \quad 0 = x^2 + 5x + 1 - 1 - x = x^2 + 4x.$

$\therefore \quad 0 = x(x + 4)$

$\therefore \quad (x + 4) = 0$ nó $x = 0$, i.e. $x = -4$ nó 0.

$\therefore \quad y = 1 - 4 = -3 \rightarrow (x, y) = (-4, -3)$

agus $y = 1 - 0 = 1 \rightarrow (x, y) = (0, 1)$

$\therefore$ iad na pointí trasnaithe i gcás $x - y = -1$ ná $(-4, -3)$ agus $(0, 1)$.

(ii) $x - y = 3$

$\rightarrow -y = 3 - x$

$\rightarrow y = (-3 + x)$

Ach $y = (-3 + x)$ a ionadú isteach in $y = x^2 + 5x + 1$,

$\therefore \quad (-3 + x) = x^2 + 5x + 1$

$0 = x^2 + 5x + 1 + 3 - x = x^2 + 4x + 4$

$\therefore \quad (x + 2)(x + 2) = 0$

$\therefore \quad x = -2$ (ilréiteach)

$\therefore \quad y = -3 - 2 = -5 \rightarrow (x, y) = (-2, -5)$

$\therefore$ is é an pointe trasnaithe i gcás $x - y = 3$ ná $(-2, -5)$.

$\therefore$ is **tadhlaí** leis an gcuar $y = x^2 + 5x + 1$ í an líne $x - y = 3$ sa phointe $(-2, -5)$.

Mar achoimre, chun an pointe/na pointí trasnaithe idir líne agus cuar a fháil,

(i) tabhair ceann amháin de na hathróga i gcothromóid na líne go taobh amháin den chothromóid léi féin, m.sh. $y = ax + b$.

(ii) Ionadaigh an slonn seo le haghaidh x isteach i gcothromóid an chuair $y = cx^2 + dx + e$, i.e. $ax + b = cx^2 + dx + e$ agus simpligh.

(iii) Réitigh an chothromóid chearnach a thagann as sin.

Sampla 2

Taispeáin nach dtrasnaíonn an líne $x - y = 5$ agus an cuar $y = x^2 + 5x + 1$ a chéile i bpointe ar bith.

$x - y = 5$

$\rightarrow -y = 5 - x$

$\rightarrow \quad y = (-5 + x)$

Ach $y = (-5 + x)$ a ionadú isteach in $y = x^2 + 5x + 1$, faighimid $(-5 + x) = x^2 + 5x + 1$.

$\therefore \quad 0 = x^2 + 5x + 1 + 5 - x$

$0 = x^2 + 4x + 6.$

Mura bhfuil pointe trasnaithe ar bith ann, tugann sé sin le fios nach bhfuil fréamh réadach ar bith le $0 = x^2 + 4x + 6$. $\quad \therefore \quad (b^2 - 4ac) < 0$

$0 = x^2 + 4x + 6 \rightarrow a = +1, b = +4, c = +6.$

$\therefore \quad (b^2 - 4ac) = [4^2 - 4(1)(6)] = (16 - 24) = -8 < 0.$

$\therefore$ ní thrasnaíonn an líne $x - y = 5$ an cuar $y = x^2 + 5x + 1$.

Cleachtadh 2.3

Réitigh na péirí cothromóidí comhuaineacha seo a leanas, ceann líneach agus ceann cearnach.

1. $y = x^2$
$2x + y = 3$

2. $x^2 + y^2 = 5$
$x - y + 1 = 0$

3. $4x^2 - y = 0$
$2x + y = 2$

4. $y = x^2 - 6x + 5$
$x + y - 1 = 0$

5. $x^2 + y^2 = 25$
$x + y = 7$

6. $3x^2 - y^2 = 3$
$2x - y = 1$

7. $y = x^2 - 4x + 6$
$y = 3x - 4$

8. $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$
$x + y - 4 = 0$

9. $x^2 + 4y^2 = 4$
$x + 2y - 2 = 0$

10. $xy = 4$
$2x - y + 2 = 0$

11. $y^2 + xy = 2$
$2x + y = 3$

12. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$
$x - y + 3 = 0$

13. $s = 2t - 1$
$3t^2 - 2ts + s^2 = 9$

14. $2s^2 = t^2 + 1$
$2s = t - 3$

15. $2t - 3s = 1$
$t^2 + ts - 4s^2 = 2$

Mír 2.4 Cothromóidí cearnacha agus líneacha i gcomhthéacs

Is féidir a lán fadhbanna ón ngnáthshaol a réiteach ach úsáid a bhaint as an ailgéabar. Más féidir linn athróg a chur in iúl le siombail, agus an gaol idir na hathróga a scríobh i bhfoirm cothromóid líneach nó cearnach, is féidir na cothromóidí a thagann as sin a réiteach ach úsáid a bhaint as na teicnící a phléamar níos luaithe.

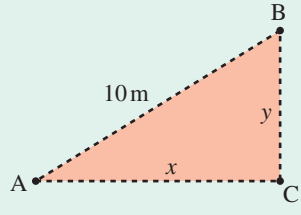
Sampla 1

Tá triantán dronuilleach le déanamh as téad atá 24 m ar fad. Más 10 m ar fad atá taobhagán (AB) an triantáin, faigh

(i) cothromóid i dtéarmaí x agus y d'imlíne an triantáin

(ii) cothromóid i dtéarmaí x agus y do thaobhagán an triantáin.

(iii) Réitigh na cothromóidí chun faid fhéideartha a fháil le haghaidh bhonn (x) agus airde (y) an triantáin.



(i) Imlíne an triantáin $= x + y + 10$.
$\Rightarrow x + y + 10 = 24 \Rightarrow x + y = 14$.

(ii) An (taobhagán)$^2 = x^2 + y^2 = 10^2$.

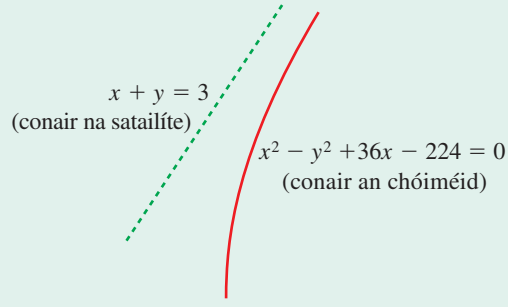
(iii) Ó tharla go bhfuil $x + y = 14 \Rightarrow x = 14 - y$.
$\therefore \quad (14 - y)^2 + y^2 = 10^2$
$\therefore \quad 196 - 28y + y^2 + y^2 = 10^2$
$\therefore \quad 2y^2 - 28y + 96 = 0$
$\therefore \quad y^2 - 14y + 48 = 0$
$(y - 6)(y - 8) = 0$
$\therefore \quad y = 6$ nó $y = 8$
$\therefore$ más 8 m atá an bonn, 6 m atá an airde, nó a mhalairt go cruinn.

Nuair atá $y = 6$
$\Rightarrow x = 14 - y = 14 - 6 = 8$.

Freisin, má tá $y = 8$
$\Rightarrow x = 14 - y = 14 - 8 = 6$.

Sampla 2

Tá satailít ar aistear go dtí gealacha Phlútoin chun faisnéis a bhailiú. Léiríonn an chothromóid $x - y = 3$ a conair. Tagtar ar chóiméad atá ag gluaiseacht i gcuar sa phlána céanna leis an tsatailít. Más í an chothromóid $x^2 + y^2 - 36x + 224 = 0$ a léiríonn conair an chóiméid, abair an dtrasnóidh a gcuid conairí a chéile.



Má tá an dá chonair le bualadh le chéile, caithfidh réitigh réadacha a bheith ar thrasnú an dá chothromóid.

i.e. $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Má tá $x - y = 3$,

tá $y = x - 3$. Ach é sin a ionadú isteach in $x^2 + y^2 - 36x + 224 = 0$,

faighimid $x^2 + (x - 3)^2 - 36x + 224 = 0$

$\therefore \quad 2x^2 - 42x + 233 = 0$ … réitigh réadacha ag teastáil.

$\therefore \quad a = 2, b = -42, c = 233.$

$\therefore \quad b^2 - 4ac = [(-42)^2 - 4(2)(233)] = -100 < 0$

$\therefore$ Níl aon réiteach réadach ann agus ní thrasnaíonn na conairí a chéile.

Cleachtadh 2.4

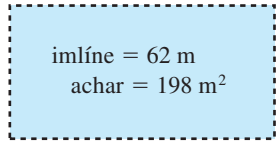
1. Faigh luach dhá uimhir leantacha, a bhfuil suim a gcearnóg cothrom le 61.

2. Faigh dhá **ré-uimhir** leantacha, a bhfuil suim a gcearnóg cothrom le 52.

3. Úsáidtear 62 m de chlaí chun cró dronuilleogach ar achar dó 198 m^2 a dhéanamh.

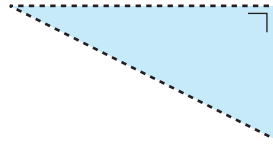
(i) Faigh dhá chothromóid a nascann fad agus leithead na dronuilleoige.

(ii) Réitigh na cothromóidí chun toisí na dronuilleoige a fháil.



4. Tá triantán dronuilleach le déanamh. Úsáidfear trí shlánuimhir leantacha mar shleasa.

Faigh fad imlíne an triantáin.



5. Is féidir an fad slí atá déanta ag carr a fháil ach an fhoirmle $s = 12t - t^2$ a úsáid. Faigh an dá am ag a ngabhann an carr thar phointe atá 25 m ar shiúl. Tabhair do chuid freagraí ceart go dtí dhá ionad de dheachúlacha.

6. Laghdaítear cearnóg uimhreach de 15. Is ionann an luach a thagann as sin agus dhá oiread na bunuimhreach. Faigh an uimhir/na huimhreacha.

7. Ciceáiltear liathróid suas san aer. Is féidir airde na liathróide a shamhaltú ach úsáid a bhaint as an gcothromóid $h = -16t^2 + 24t + 1$, áit a bhfuil $h =$ an airde ina méadair agus $t =$ am ina shoicindí.
Céard iad na hamanna ag a mbeidh an liathróid ag airde 6 m?

8. Tá slios amháin ar thriantán dronuilleach 4 cm níos faide ná an slios eile. Tá an taobhagán 20 cm ar fad. Faigh fad an tsleasa is giorra ar an triantán.

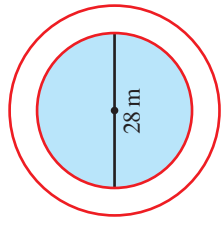
9. Is lú de 1 toradh dhá chorr-shlánuimhir leantacha ná ceithre oiread a suime.
Faigh an dá shlánuimhir.

10. Tá an taobhagán ar thriantán dronuilleach 6 cm níos faide ná an slios is giorra.
Tá an tríú slios 3 cm níos faide ná an slios is giorra. Fad fad an tsleasa is giorra.

11. Tá fad gairdín dhronuilleogaigh 4 mhéadar níos faide ná a leithead.
Más ionann achar an ghairdín agus 60 m^2, faigh toisí an ghairdín.

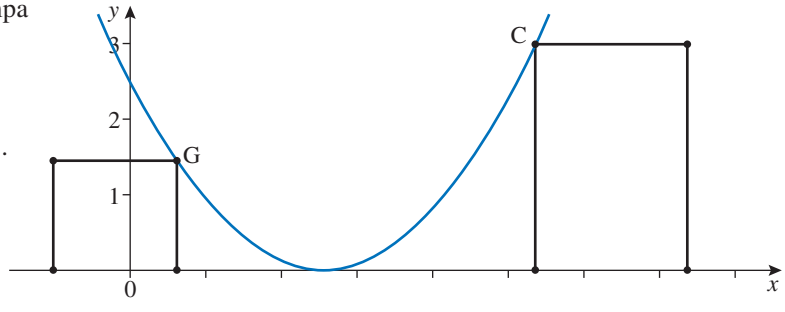
12. Faigh trí shlánuimhir leantacha sa chaoi is gurb ionann trí oiread a suime agus toradh an dá cheann is mó.

13. Tá deic adhmaid timpeall ar linn snámha chiorclach ar trastomhas di 28 méadar.
Más ionann achar na deice agus 60π m^2, faigh leithead na deice.



14. Má dhúblaítear slios amháin ar chearnóg agus má laghdaítear an slios cóngarach de 2 cm, beidh achar na dronuilleoige a thagann as sin 96 cm^2 níos mó ná an bhunchearnóg.
Faigh toisí na dronuilleoige.

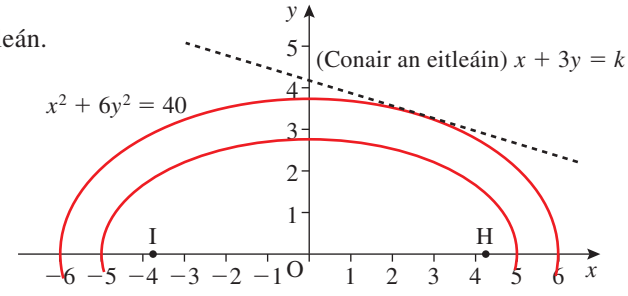
15. Cruth cuair atá ar rampa clárscátála. Seo an chothromóid atá ag an gcuar:
$h = 0.1x^2 - x + 2.5$.
Is dhá ardán iad an pointe imeachta agus an ceann scríbe, mar atá le feiceáil.



Má tá an pointe imeachta C ag airde 3 m agus má tá an ceann scríbe G ag airde 1.5 m, ríomh an fad slí idir bhoinn an dá ardán, ceart go dtí dhá ionad de dheachúlacha.

16. Is í an chothromóid $3t - s = 4$ a thugann an chonair a ghabhann roicéad, áit a seasann t don am agus s don fhad slí ón talamh.
Is í an chothromóid $2t^2 + s^2 = 43$ a thugann an chonair a ghabhann cóiméad.
Déan amach cá bhfuil an pointe ina dtrasnaíonn an dá chonair a chéile.
Tabhair fáth nach bhfuil ach aon réiteach amháin ann, i.e. aon phointe trasnaithe amháin.

17. Is í an chothromóid $x + 3y = 5$ a thugann an chonair a ghabhann eitleán. Tuairiscítear go bhfuil fronta aimsire i gconair an eitleáin. Má úsáidtear an chothromóid $x^2 + 6y^2 = 40$ chun an fronta a shamhaltú, déan amach an dtrasnóidh an t-eitleán an fronta seo. Má thugann $x + 3y = k$ conair an eitleáin, faigh an t-íosluach ar k a fhágfaidh go seachnóidh an t-eitleán an fronta aimsire.



Mír 2.5 Na fréamhacha a úsáid chun cothromóidí cearnacha a cheapadh

Má bhíonn fréamhacha cothromóide ar eolas againn, is féidir linn an chothromóid a fháil ach

(i) fachtóirí na cothromóide a fháil
(ii) na fachtóirí a iolrú chun an chothromóid a fháil.

An cás ginearálta: más iad $x = r_1$ agus $x = r_2$ na fréamhacha le cothromóid chearnach,

is iad $(x - r_1)$ agus $(x - r_2)$ na fachtóirí
agus is é $(x - r_1)(x - r_2) = 0$ an chothromóid.

i.e. $x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1r_2 = 0$
$x^2 - x(r_2 + r_1) + r_1r_2 = 0.$

Más iad r_1 , r_2 na fréamhacha le cothromóid, is é an chothromóid ná
$x^2 - x(r_1 + r_2) + r_1r_2 = 0,$
i.e. $x^2 - x$ (suim na bhfréamhacha) + toradh na bhfréamhacha = 0.

Sampla 1

Scríobh an chothromóid atá ag cuar arb iad 7 agus −5 a chuid fréamhacha.

Ós rud é nach bhfuil ach dhá fhréamh leis an gcothromóid, caithfidh sé gur cothromóid chearnach atá ann.

$\therefore$ $x^2 - x$ (suim na bhfréamhacha) + toradh na bhfréamhacha = 0
$\therefore$ is é $x^2 - x\,[7 + (-5)] + [(7)(-5)] = 0$ an chothromóid.
$\therefore$ $x^2 - x(2) - 35 = 0$

Is é an chothromóid ná $x^2 - 2x - 35 = 0$.

Sampla 2

Más iad $x = \sqrt{3}$ agus $x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ na fréamhacha le cothromóid chearnach $ax^2 + bx + c = 0$, faigh a, b agus c.

Tá a fhios againn go bhfuil $x^2 - x$ (suim na bhfréamhacha) + toradh na bhfréamhacha = 0.

$\Rightarrow$ is é $x^2 - x\left(\sqrt{3} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ an chothromóid.

$\Rightarrow x^2 - x\left(\frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{2} = 0$

$2x^2 - \sqrt{3}x - 3 = 0$ … dhá thaobh na cothromóide a iolrú faoi 2

$\therefore \quad a = 2, b = -\sqrt{3}$ agus $c = -3$.

Cleachtadh 2.5

1. Luaigh (i) suim agus (ii) toradh na bhfréamhacha le gach ceann de na cothromóidí cearnacha seo a leanas.

(a) $x^2 + 9x + 4 = 0$
(b) $x^2 - 2x - 5 = 0$
(c) $x^2 - 7x + 2 = 0$
(d) $x^2 - 9x - 3 = 0$
(e) $2x^2 - 7x + 1 = 0$
(f) $7x^2 + x - 1 = 0$
(g) $3x^2 + 10x - 2 = 0$
(h) $5x^2 + 10x + 1 = 0$
(i) $3 - 2x - x^2 = 0$
(j) $-5 + 3x - 4x^2 = 0$

2. Sa tábla seo a leanas, tugtar duit suim agus toradh na bhfréamhacha le cothromóidí cearnacha. I ngach cás, faigh an chothromóid chearnach san fhoirm $ax^2 + bx + c = 0$. Bíodh a, b agus c ina slánuimhreacha.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
Suim	-3	6	7	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-1\frac{2}{3}$
Toradh	-1	-4	-5	$-\frac{7}{3}$	-2	-5	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

3. Faigh na cothromóidí cearnacha a bhfuil na péirí fréamhacha seo a leanas leo (r_1, r_2).

(i) $(4, 6)$
(ii) $(2, -3)$
(iii) $(-5, -1)$
(iv) $(\sqrt{5}, 4)$
(v) $(a, 3a)$
(vi) $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$
(vii) $\left(\frac{2}{b}, \frac{3}{b}\right)$
(viii) $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{5}\right)$

Mír 2.6 Uasphointe agus íosphointe graf cearnach —

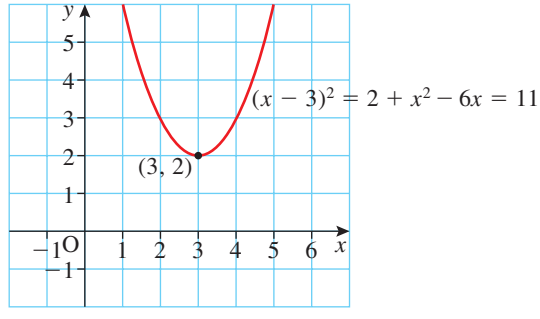
Is féidir an slonn cearnach $x^2 - 6x + 11$ a athscríobh mar seo:

$$x^2 - 6x \mathbf{+ 9 - 9} + 11$$
$$= (x - 3)(x - 3) - 9 + 11 = (x - 3)^2 + 2.$$
$$\therefore \quad x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2.$$

An chearnóg a shlánú a thugtar air sin.

Is féidir linn eolas an-úsáideach maidir leis an bhfeidhm chearnach a fháil ón bhfoirm seo de chothromóid chearnach.

(i) **Uasphointí nó íosphointí.**
Ag $x = 3$, $(x - 3) = 0$.
$\therefore$ is é $(x - 3)^2 + 2 = 2$ íosluach an tsloinn seo.



(ii) **Fréamhacha réadacha nó samhailteacha.**
Bíodh $(x - 3)^2 + 2 = 0$ chun na fréamhacha a fháil. Mar sin $(x - 3)^2 = -2$
$x - 3 = \pm\sqrt{-2}$
$x = 3 \pm \sqrt{-2} \Rightarrow$ Fréamhacha samhailteacha.

(iii) **Luachanna ar *x* a fhágann gur deimhneach nó diúltach atá an fheidhm.**
Bíonn $(x - 3)^2$ deimhneach i gcás gach $x \in \mathbb{R}$.
$\therefore$ bíonn $(x - 3)^2 + 3$ deimhneach i gcás gach $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Bíonn pointe casaidh ag gach graf, ar a dtugtar **rinn**.
Is é an rinn seo uasphointe nó íosphointe an ghraif.

(v) Bíonn **ais siméadrachta** i ngach graf, a bhíonn comhthreomhar leis an y-ais agus ag dul tríd an rinn.

(vi) **Parabóil** a thugtar ar ghraf feidhme cearnaí.

Sampla 1

Slánaigh an chearnóg sna sloinn chearnacha seo a leanas.
Uaidh sin, faigh íosluach gach sloinn.

(i) $x^2 - 8x + 10$ (ii) $4x^2 + 4x + 2$

(i) $x^2 - 8x + 10$
$= x^2 - 8x \mathbf{+ 16 - 16} + 10$
$= (x - 4)(x - 4) - 6$
$= (x - 4)^2 - 6$
Íosluach $= -6$

(ii) $4x^2 + 4x + 2$
$= 4(x^2 + x + \frac{1}{2})$
$= 4(x^2 + x \mathbf{+ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2})$
$= 4[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]$
$= 4(x + \frac{1}{2})^2 + 1$
Íosluach $= +1$

Mar riail ghinearálta, chun an chearnóg a shlánú i gcás cothromóidí san fhoirm $x^2 + bx + c = 0$, **suimigh leath chomhéifeacht x^2 leis an slonn agus dealaigh an rud céanna ón slonn**. Ansin tabhair cuid na slánchearnóige i leataobh léi féin.

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$\text{i.e. } x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0.$$

Nóta: Murab é 1 comhéifeacht x^2, ní mór comhéifeacht x^2 a fhachtóiriú amach sular féidir leanúint ar aghaidh, m.sh.,

(i) $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x \mathbf{+ 1 - 1} + 5$
$= (x + 1)^2 + 4$

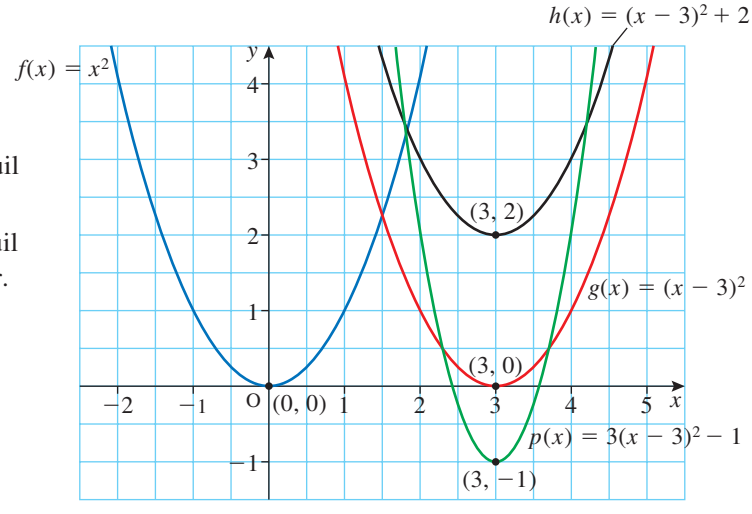
(ii) $4 - 2x - x^2 = 4 - (x^2 + 2x) = 4 - (x^2 + 2x \mathbf{+ 1 - 1}) = 4 - [(x + 1)^2 - 1]$
$= 5 - (x + 1)^2$

(iii) $3x^2 - 3x + 2 = 3(x^2 - x + \frac{2}{3}) = 3(x^2 - x \mathbf{+ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} + \frac{2}{3})$
$= 3[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{12}] = 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$

Is féidir gach cothromóid chearnach ($ax^2 + bx + c$) a scríobh san fhoirm

$a(x - p)^2 + q$, graf a bhfuil cruth ∪ air

nó $q - a(x - p)^2$, graf a bhfuil cruth ∩ air.



Teicneolaíocht Faisnéise agus Cumarsáide (TFC): Ach úsáid a bhaint as áireamhán grafaicí nó as bogearraí ríomhaireachta (m.sh. GeoGebra), is féidir sceitsí de na cuair seo a leanas a chur i gcomparáid lena chéile, agus an t-íosphointe agus ais na siméadrachta a fháil i gcás gach ceann díobh.

	Íosphointe
$f(x) = x^2 = (x - 0)^2 + 0$	(0, 0)
$g(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 + 0$	(3, 0)
$h(x) = x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2$	(3, 2)
$p(x) = 3x^2 - 18x + 26 = 3(x - 3)^2 - 1$	(3, −1)

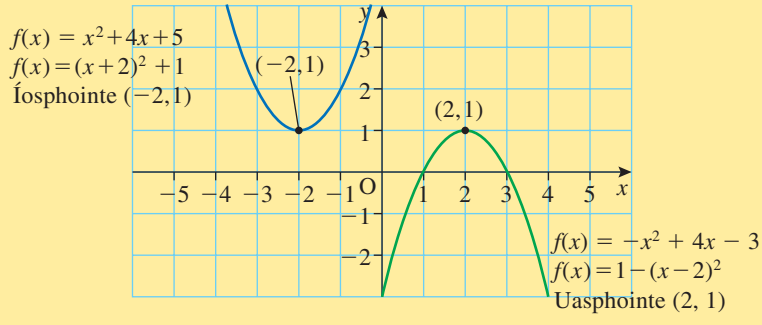
Is é an pointe (p, q) **íosphointe** an chuair $a(x - p)^2 + q$.

Ag $x = p, (x - p) = 0$.

$\Rightarrow a(x - p)^2 + q = 0 + q = q$, an t-íosluach.

Ar an gcaoi chéanna, bíonn **uasphointe** (p, q) ag cothromóid chearnach san fhoirm $q - a(x - p)^2$ agus bíonn uasluach q aici ag an bpointe $x = p$.

Nuair is féidir sloinn chearnacha a scríobh san fhoirm $a(x - p)^2 + q$, bíonn **íosphointe** (p, q) ann. Nuair is féidir sloinn chearnacha a scríobh san fhoirm $q - a(x - p)^2$, bíonn **uasphointe** (p, q) ann.



Sampla 2

Scríobh an chothromóid chearnach $x^2 + 4x + 1$ san fhoirm $(x - p)^2 + q$ agus, uaidh sin,

(i) faigh íosphointe agus íosluach $x^2 + 4x + 1$

(ii) réitigh an chothromóid $x^2 + 4x + 1 = 0$. Fág an freagra i bhfoirm surda.

(i) $x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x \mathbf{+ 4 - 4} + 1$

$= (x + 2)^2 - 3$

$\Rightarrow$ is é $(-2, -3)$ an t-íosphointe

$\Rightarrow$ is é -3 íosluach an tsloinn.

(ii) Ag réiteach $x^2 + 4x + 1 = 0$,

$\Rightarrow (x+2)^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow (x+2)^2 = 3$

$\Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$.

(**Nóta:** Ba chóir a fhíorú go bhfaightear an toradh céanna nuair a bhaintear úsáid as foirmle na cothromóide cearnaí.)

Sampla 3

(i) Scríobh cothromóid an ghraif thíos san fhoirm $y = q - a(x - p)^2$. Is é (p, q) uasphointe an chuair agus is tairiseach é a.

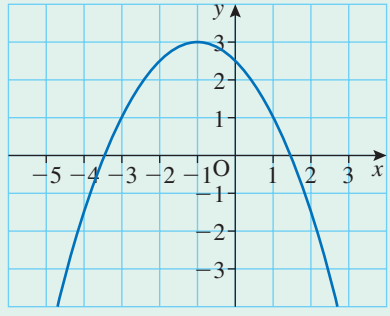
(ii) Roghnaigh pointe oiriúnach ar bith ar an gcuar agus, ar an gcaoi sin, faigh a.

(iii) Uaidh sin scríobh an chothromóid san fhoirm $y = ax^2 + bx + c$.

(i) An t-uasphointe $= (-1, 3) = (p, q)$.

$$y = q - a(x - p)^2$$

$$\therefore \quad y = 3 - a(x + 1)^2$$



(ii) Roghnaímis $(x, y) = (1, 1)$,

$$\Rightarrow 1 = 3 - a(1 + 1)^2$$

$$= 3 - 4a$$

$$\Rightarrow a = \tfrac{1}{2}$$

(iii) $\therefore \quad y = 3 - (\tfrac{1}{2})(x + 1)^2$

$$\therefore \quad y = 3 - \frac{x^2}{2} - x - \tfrac{1}{2}$$

$$= -\frac{x^2}{2} - x + 2\tfrac{1}{2}$$

Cleachtadh 2.6

1. Faigh an luach ar c a shlánaíonn an chearnóg i ngach ceann díobh seo a leanas:

(i) $a^2 + 28a + c$ (ii) $x^2 - 6x + c$ (iii) $y^2 - 5y + c$

2. Slánaigh an chearnóg i ngach ceann díobh seo a leanas:

(i) $x^2 - 8x - 3 = 0$ (ii) $x^2 - 2x - 5 = 0$ (iii) $x^2 - 2x + 1 = 0$

3. Scríobh gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm $(x - p)^2 + q = 0$.

(i) $x^2 + 4x - 6 = 0$ (ii) $x^2 + 9x + 4 = 0$ (iii) $x^2 - 7x - 3 = 0$

4. Tá íosphointe (p, q) ag graf $y = a(x - p)^2 + q$.
Tríd an gcearnóg a shlánú, faigh íosphointe gach ceann de na cothromóidí cearnacha seo a leanas:

(i) $2x^2 + 4x - 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 6x - 1 = 0$ (iii) $4x^2 + x + 3 = 0$

5. Slánaigh an chearnóg i gcás an tsloinn $x^2 - 6x + k$.
Faigh an t-íosluach ar k sa chaoi is go bhfuil $x^2 - 6x + k$ deimhneach i gcás gach luacha ar x.

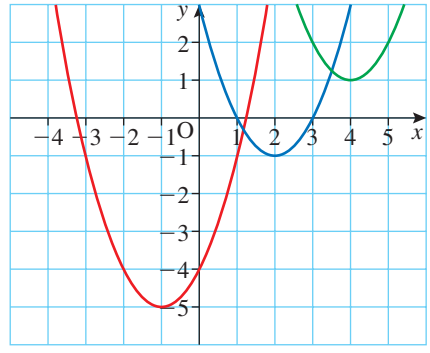
6. Sloinn $2x^2 + 2x + 7$ san fhoirm $a(x - b)^2 + c$.

7. Má tá $g(x) = x^2 + 8x + 20$, taispeáin go bhfuil $g(x) \geq 4$ i gcás gach luacha ar x.

8. (i) Maidir le gach ceann de na graif seo, scríobh síos comhordanáidí an gíosphointe (p, q).

(ii) Scríobh cothromóid gach graif san fhoirm
(a) $y = (x - p)^2 + q$
(b) $y = ax^2 + bx + c$.

(iii) Roghnaigh pointe oiriúnach ar gach graf (nach é an t-íosphointe é) agus, ar an gcaoi sin, fíoraigh gach cothromóid.



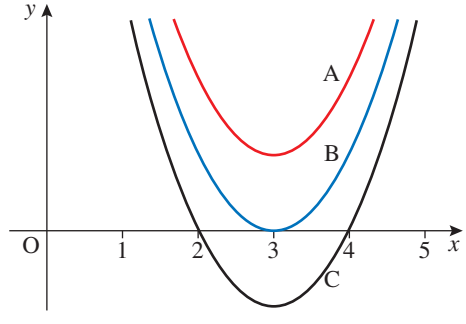
9. Má tá $f(x) = x^2 + 4x + 7$, faigh
(i) an luach is lú a d'fhéadfadh a bheith ar $f(x)$
(ii) an luach ar x ag a dtarlaíonn an luach is lú sin
(iii) an luach is mó a d'fhéadfadh a bheith ar $\dfrac{1}{(x^2 + 4x + 7)}$.

10. An chothromóid $y = 2x^2 + 6x$ a thugann an chonair a ghabhann liathróid ghailf. Tríd an gcearnóg a shlánú, faigh uasphointe na conaire agus, uaidh sin, an airde is mó a baineadh amach. Sceitseáil an cuar san fhearann $0 < x < 6$ le dearbhú go bhfuil an freagra a fuair tú bailí.

11. I gcás gach ceann de na cothromóidí seo, scríobh síos cé acu graf lena mbaineann sé.

(i) $y = x^2 - 6x + 8$
(ii) $y = x^2 - 6x + 9$
(iii) $y = x^2 - 6x + 10$.

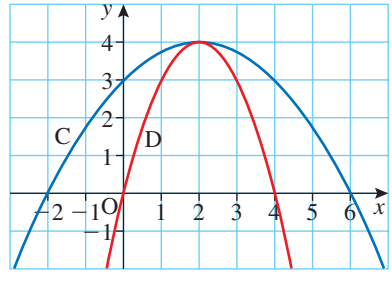
Sloinn gach cothromóid san fhoirm
$y = a(x - p)^2 + q$.



12. Is féidir na cuair C agus D a léiriú le cothromóidí san fhoirm

$$p - a(x - q)^2.$$

Faigh luach p, a agus q i gcás gach cuair.



13. Trasnaíonn parabóil an x-ais ag 6 agus -3 agus gabhann sí tríd an bpointe $(1, 10)$. Faigh cothromóid na parabóile.

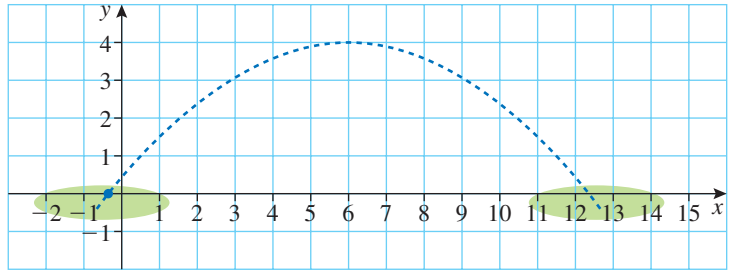
14. $(-1, 3)$ na comhordanáidí atá ag íosrinn parabóile agus trasnaíonn sí an y-ais ag 4. Faigh cothromóid na parabóile.

15. Tugtar thíos an chonair a ghabhann liathróid ghailf.

(i) Agus tú ag úsáid uasphointe (p, q) na conaire, críochnaigh an chothromóid $f(x) = q - 0.1(x - p)^2$ don chuar seo.

(ii) Réitigh an chothromóid $f(x) = 0$ chun an pointe ónar thosaigh an liathróid a fháil, agus chun an pointe ag ar chríochnaigh an liathróid ar thalamh chothrom a fháil (fág do fhreagra i bhfoirm fréamh chearnach).

(iii) Uaidh sin faigh an fad cothrománach a thaistil an liathróid. Tabhair do fhreagra san fhoirm $a\sqrt{b}$.



Mír 2.7 Surdaí

Is éard atá i surda ná **fréamh chearnach** nach féidir a shloinneadh ina slánuimhir, m.sh. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$

Má tá $x^2 = 2$, tá $x = \sqrt{2} \cong \pm 1.414213562\ldots$ **Uimhir éagóimheasta** atá i surda dá bhrí sin, uimhir nach féidir a shloinneadh ina codán.

Ní surdaí iad $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}$, mar gur slánchearnóga iad 1, 4, 9, 16 srl agus go bhfuil fréamhacha cearnacha leo.

Nóta: Is freagra cruinn é $x = \pm\sqrt{2}$.

Is garfhreagra nó freagra ceartaithe é $x = \pm 1.414\ 213\ 562$ agus ní cóir é a thabhairt ach amháin má iarrtar a leithéid.

1. Surdaí a laghdú go dtí an fhoirm is simplí

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Ní féidir $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$ a shimpliú a thuilleadh,

ach $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,

ós rud é go bhfuil fachtóir ag 8 atá ina shlánchearnóg.

2. Líonta i bhfoirm surda a shimpliú

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{50}{64}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{25} \times \sqrt{2}}{8} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

3. Surdaí a shuimiú nó a dhealú

$$a\sqrt{b} \pm c\sqrt{b} = (a \pm c)\sqrt{b}$$

$2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

$\sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

4. Surdaí a iolrú faoi chéile

$\sqrt{4} \times \sqrt{4} = (\sqrt{4})^2 = 4.$

$\sqrt{5} \times \sqrt{6} = \sqrt{30}.$

$(7 - \sqrt{2})(7 + \sqrt{2}) = 49 + 7\sqrt{2} - 7\sqrt{2} - 2 = 47.$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

5. Roinnt ar shurdaí

Is gnách gan surda (uimhir éagóimheasta) a fhágáil in ainmneoir lín agus is dá bhrí sin a dhéanaimid **an t-ainmneoir a chóimheas**.

$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ (**Nóta:** Is ionann iolrú faoi $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ agus iolrú faoi 1.)

$$\frac{1}{7 - \sqrt{2}} = \frac{1}{7 - \sqrt{2}} \cdot \frac{7 + \sqrt{2}}{7 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{7 + \sqrt{2}}{7^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{7 + \sqrt{2}}{47}$$

An t-ainmneoir a chóimheas:

$$\frac{1}{a - \sqrt{b}} = \frac{1}{a - \sqrt{b}} \cdot \frac{a + \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}$$

Sampla 1

(i) Sloinn $\sqrt{80}$ san fhoirm $a\sqrt{5}$, áit a bhfuil a ina shlánuimhir.

(ii) Sloinn $(4 - \sqrt{5})^2$ san fhoirm $b + c\sqrt{5}$, áit a bhfuil b agus c ina slánuimhreacha.

(i) $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$

(ii) $(4 - \sqrt{5})^2 = (4 - \sqrt{5})(4 - \sqrt{5}) = 16 - 8\sqrt{5} + 25 = 41 - 8\sqrt{5}$

Sampla 2

Simpligh (i) $\frac{\sqrt{12}}{5\sqrt{3} - \sqrt{27}}$ (ii) $\frac{7}{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$

(i) $\frac{\sqrt{12}}{5\sqrt{3} - \sqrt{27}} = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{5\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$

(ii) $\frac{7}{\sqrt{13} - \sqrt{11}} = \frac{7}{\sqrt{13} - \sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{13} + \sqrt{11}}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} = \frac{7(\sqrt{13} + \sqrt{11})}{13 - 11} = \frac{7(\sqrt{13} + \sqrt{11})}{2}$

Cleachtadh 2.7

1. Simpligh gach ceann díobh seo:

(i) $\sqrt{8}$ (ii) $\sqrt{27}$ (iii) $\sqrt{45}$ (iv) $\sqrt{200}$ (v) $3\sqrt{18}$

2. Scríobh gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm is simplí:

(i) $2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ (ii) $2\sqrt{2} + \sqrt{18}$ (iii) $\sqrt{32} + \sqrt{18}$

(iv) $\sqrt{27} + \sqrt{48} - 2\sqrt{3}$ (v) $\sqrt{8} + \sqrt{200} - \sqrt{18}$ (vi) $7\sqrt{5} + 2\sqrt{20} - \sqrt{80}$

3. I gcás gach ceann de na líonta seo, déan an t-ainmneoir a chóimheas.

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$ (iii) $\dfrac{2}{5\sqrt{2}}$ (iv) $\dfrac{20}{\sqrt{50}}$ (v) $\dfrac{8}{\sqrt{128}}$

4. Simpligh gach ceann díobh seo:

(i) $\sqrt{8} \times \sqrt{12}$ (ii) $3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{2}(\sqrt{6} + 3\sqrt{2})$

(iv) $(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})$ (v) $(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$ (vi) $(a + 2\sqrt{b})(a - 2\sqrt{b})$

5. Tríd an ainmneoir a chóimheas, scríobh gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm is simplí.

(i) $\dfrac{4}{\sqrt{5} + 1}$ (ii) $\dfrac{12}{3 - \sqrt{2}}$ (iii) $\dfrac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{2}}$

6. Simpligh gach ceann díobh seo:

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$ (ii) $\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} + \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$

7. Simpligh

(i) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$ (ii) $\dfrac{4}{2 - \sqrt{5}} + \dfrac{2}{2 + \sqrt{5}}$

8. Bíodh $X = \dfrac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ agus $Y = \dfrac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Faigh, san fhoirm is simplí,

(i) $X + Y$ (ii) $X - Y$ (iii) XY (iv) $\dfrac{X}{Y}$

9. Taispeáin go bhfuil $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) = 2$.

10. Simpligh $\dfrac{9}{9 + \sqrt{9}}$.

11. Simpligh $\dfrac{(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} - 1)(1 + \sqrt{2})}$.

Mír 2.8 Cothromóidí ailgéabracha ina bhfuil surdaí

Is minic sloinn ar nós $\sqrt{2x+1}$ le feiceáil san ailgéabar.

Chun an chothromóid $\sqrt{2x+1} = 5$ a réiteach, tugaimid faoi ar an gcaoi seo:

$$(\sqrt{2x+1})^2 = 5^2 \quad \text{... cearnaímid an dá thaobh chun an fhréamh chearnach a bhaint}$$
$$2x + 1 = 25$$
$$2x = 24$$
$$\Rightarrow \quad x = 12$$

Nóta: Agus muid ag plé le surdaí, tá sé tábhachtach gach réiteach a sheiceáil sa bhunchothromóid mar go bhféadfadh cuid de na réitigh a bheith samhailteach.

Ag $x = 12$, $\sqrt{2x+1} = \sqrt{2.12+1} = \sqrt{25} = 5$, atá ceart.

Sampla 1

Réitigh $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{4x+8}} = 2.$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{4x+8}} = 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{4(x+2)}} = 2 \quad \text{... simplímid an t-ainmneoir sula bhfaighimid comhainmneoir.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = 2$$

$$\frac{2}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = 2$$

$$\frac{2-1}{2\sqrt{x+2}} = 2 \quad \text{... faighimid comhainmneoir}$$

$$1 = 4(\sqrt{x+2}) \quad \text{... iolraímid an dá thaobh faoi } 2\sqrt{x+2}$$
$$1 = 16(x+2) \quad \text{... cearnaímid an dá thaobh}$$
$$1 = 16x + 32$$
$$16x = -31 \qquad \therefore \quad x = \frac{-31}{16}$$

Anois seiceálaimid an freagra. Is éard a fhaighimid:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{-31}{16}+2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{4(-31)+8}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2 \text{ (\textbf{fíor})}.$$

- Mura mbíonn ach **aon surda amháin** ann, tabhair i leataobh leis féin é.
  Ansin cearnaigh an dá thaobh agus réitigh.
- Má bhíonn **dhá shurda** ann, bíodh ceann amháin ar gach taobh den chothromóid.
  Cearnaigh an dá thaobh agus, má bhíonn surda ar bith fágtha, tabhair i leataobh leis féin é.
  Cearnaigh an dá thaobh arís chun surda ar bith atá fágtha a bhaint.
- Réitigh an chothromóid a thagann as sin.
- Seiceáil do chuid freagraí.

Sampla 2

Réitigh $\sqrt{5x+6} - \sqrt{2x} = 2$.

$$\sqrt{5x+6} - \sqrt{2x} = 2$$

$$\sqrt{5x+6} = \sqrt{2x} + 2$$ … bíodh surda amháin ar gach taobh

$$(\sqrt{5x+6})^2 = (\sqrt{2x} + 2)^2$$ … cearnaigh an dá thaobh

$$5x + 6 = 2x + 4\sqrt{2x} + 4$$

$$3x + 2 = 4\sqrt{2x}$$ … fág an surda as féin ar thaobh amháin den chothromóid

$$(3x + 2)^2 = (4\sqrt{2x})^2$$ … cearnaigh an dá thaobh arís

$$9x^2 + 12x + 4 = (16)2x$$

$$9x^2 - 20x + 4 = 0$$

$$(9x - 2)(x - 2) = 0.$$

$$\therefore \quad x = 2 \text{ nó } x = \tfrac{2}{9}$$

Nóta: Tá sé tábhachtach an dá réiteach a thástáil sa bhunchothromóid lena chinntiú go bhfuil siad bailí,

i.e. $\sqrt{5.2+6} = \sqrt{2.2} + 2$ agus $\sqrt{5.\frac{2}{9}+6} = \sqrt{2.\frac{2}{9}} + 2$

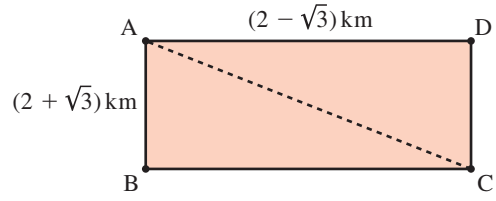
$4 = 4$ **(fíor)** $\qquad \sqrt{\frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} + 2$

$\frac{8}{3} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$ **(fíor)**

Cleachtadh 2.8

1. $(x + 2)$ m ar fad atá taobh amháin de pháirc dhronuilleogach agus $(x - 2)$ m ar leithead atá an taobh eile. Faigh slonn d'fhad an trasnáin. Fág an freagra agat i bhfoirm surda.

2. (a) Faigh fad an trasnáin [AC] sa pháirc dhronuilleogach ABCD.

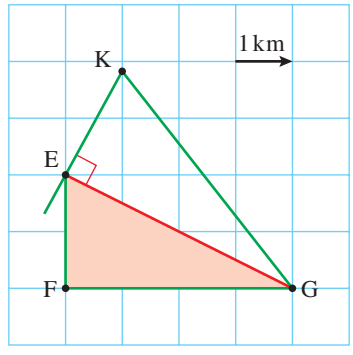


(b) Déanann reathaí amháin cuaird iomlán ABCDA ar chosán, ag ráta 1.5 ms^{-1}.
Ritheann reathaí eile ó A go *C* agus ansin ar ais go A trasna na páirce ag ráta 1.4 ms^{-1}.

(i) Sloinn, i bhfoirm surda, an difríocht idir na faid slí a thaistil an bheirt reathaithe.

(ii) Ríomh an difríocht ama idir an bheirt reathaithe, ceart go dtí an soicind is gaire.

3. Tosaíonn Máirtín ag G agus siúlann ar chosán i dtreo an phointe F. Ag F, tógann sé an cosán ingearach go dtí E. Ansin tógann sé an cosán EK, atá ar comhfhad le [EF] agus ag dronuillinneacha le [EG]. Ó K, filleann sé go díreach ar *G*.
Faigh an fad cruinn, i bhfoirm surda, a thaistil Máirtín.



4. Taispeáin go bhfuil $\dfrac{-1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

5. Sloinn $\dfrac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ina chodán aonair. Ansin déan an t-ainmneoir a chóimheas agus simpligh.

6. Má tá $x = \sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ agus $y = \sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ agus $a > 0$, faigh (i) $x + y$ (ii) $x - y$.

Uaidh sin faigh luach $\sqrt{x^2 - y^2}$.

7. Réitigh na cothromóidí seo a leanas agus seiceáil an réiteach i ngach cás:

(i) $\sqrt{2x + 1} = 3$ (ii) $\sqrt{3x + 10} = x$ (iii) $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{x + 8}$

(iv) $\sqrt{3x - 5} = x - 1$ (v) $\sqrt{2x + 5} = x + 1$ (vi) $\sqrt{2x^2 - 7} = x + 3$

8. Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo agus seiceáil gach réiteach.

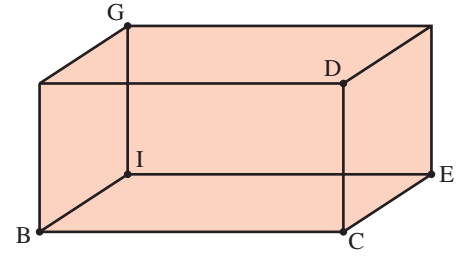
(i) $\sqrt{x + 5} = 5 - \sqrt{x}$ (ii) $\sqrt{5x + 6} = \sqrt{2x} + 2$

(iii) $\sqrt{x + 7} + \sqrt{x} = 7$ (iv) $\sqrt{3x - 2} = \sqrt{x - 2} + 2$

9. Má tá $x = \sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} + 1$ áit a bhfuil $a > 0$, sloinn $x^2 - 2x$ i dtéarmaí a.

10. Má tá $(a + \sqrt{3})(b - \sqrt{3}) = 7 + 3\sqrt{3}$, agus más slánuimhreacha deimhneacha iad a agus b, faigh luach a agus luach b.

11. Cruth dronuilleoige atá ar bhosca oscailte.
Is mó de 2 m a fhad ná a airde.
Is giorra de 2 m a leithead ná a airde.
Tabhair x ar an airde ina méadair agus faigh slonn
(i) don trasnán [IC]
(ii) don trasnán [ID].
Má tá $|ID| = \sqrt{56}$, faigh x.



Mír 2.9 Teoirim na bhfachtóirí

I gCaibidil 1 chaitheamar súil siar ar theicnící chun sloinn ailgéabracha a fhachtóiriú. Is teicníc níos ginearálta í teoirim na bhfachtóirí, ar féidir í a chur i bhfeidhm le sloinn i gcumhachtaí níos airde. Agus muid ag úsáid roinnt fhada, is féidir linn $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ a roinnt ar $x + 3$ mar a rinneamar cheana.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4 \\
\hline
x + 3 & x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \\
 & \underline{x^3 + 3x^2} \\
 & \qquad -4x - 12 \\
 & \qquad \underline{-4x - 12} \\
 & \qquad \text{gan fuílleach}
\end{array}
$$

$\therefore \quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x^2 - 4)(x + 3).$

$\therefore$ is iad fachtóirí $f(x)$ ná $(x^2 - 4)$ agus $(x + 3)$.

$\therefore$ is iad fréamhacha $f(x)$ ná $(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3$ agus $(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.

Luach na feidhme a fháil ag $x = -3, +2, -2$;

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 4(-3) - 12 = 0$$
$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4(-2) - 12 = 0$$
$$f(2) = (2)^3 + 3(2)^2 - 4(2) - 12 = 0$$, mar a bhíonn i gcás gach fréimhe.

Déanfaimid é sin a ghinearálú do gach iltéarmach $f(x)$: má tá $f(k) = 0$, is fachtóir é $x - k$.

A choinbhéarta sin: más fachtóir é $x - k$, tá $f(k) = 0$.

Teoirim na bhFachtóirí:

Má tá $f(k) = 0$, is fachtóir é $(x - k)$.

A choinbhéarta sin: más fachtóir é $(x - k)$, tá $f(k) = 0$.

Freisin, más fachtóir é $(ax - k)$, tá $f\left(\frac{k}{a}\right) = 0$.

Sampla 1

Taispeáin gur fachtóir de $2x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ é $(2x - 3)$.

Más fachtóir é $(2x - 3)$, is fréamh é $(2x - 3) = 0$, i.e. is fréamh é $x = \frac{3}{2}$.
Más fachtóir é $(2x - 3)$, caithfidh sé go bhfuil $f(\frac{3}{2})$ cothrom le 0.

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x + 3$$

$$f(\tfrac{3}{2}) = 2(\tfrac{3}{2})^3 - 5(\tfrac{3}{2})^2 + 5(\tfrac{3}{2}) + 3 = (\tfrac{27}{4}) - (\tfrac{45}{4}) + (\tfrac{15}{2}) + 3 = 0.$$

$\therefore$ is fachtóir de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ é $(2x - 3)$.

Sampla 2

Más fachtóirí de $ax^3 + 3x^2 - 9x + b$ iad $(x - 2)$ agus $(x + 1)$, faigh na luachanna a agus b.

Más fachtóir é $(x - 2)$, tá $f(2) = 0$.

Más fachtóir é $(x + 1)$, tá $f(-1) = 0$.

(i) $f(2) = a(2)^3 + 3(2)^2 - 9(2) + b = 0$

$\Rightarrow a.8 + 3.4 - 18 + b = 0$

$\Rightarrow 8a + 12 - 18 + b = 0$

$\Rightarrow 8a + b = 6$

(ii) $f(-1) = a(-1)^3 + 3(-1)^2 - 9(-1) + b = 0$

$\Rightarrow a(-1) + 3.1 + 9 + b = 0$

$\Rightarrow -a + 3 + 9 + b = 0$

$\Rightarrow -a + b = -12$

$\Rightarrow a - b = 12$

Úsáidfimid cothromóidí comhuaineacha:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 8a + b &= 6 \\ a - b &= 12 \\ \hline 9a &= 18 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

$\therefore \quad a = 2$ and $b = -10$.

1. Sloinn chiúbacha a fhachtóiriú

Is féidir linn úsáid a bhaint as **teoirim na bhfachtóirí** anois chun iltéarmaigh i gcumhachtaí níos airde a fhachtóiriú, m.sh. iltéarmaigh chiúbacha san fhoirm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ a bhfuil fréamh amháin ar a laghad leo atá ina slánuimhir.

Agus muid ag úsáid 'triail agus earráid', faighimid luach $f(0), f(1), f(-1), f(2), f(-2), f(3)$ … etc., go bhfaighimid nialas.
Anois tá an fhréamh atá ina slánuimhir faighte againn.

Má tá $f(-2) = 0$, is fachtóir é $(x + 2)$.
Má tá $f(3) = 0$, is fachtóir é $(x - 3)$.

Nuair a roinnimid ar an bhfachtóir sin faighimid slonn cearnach. Is féidir é sin a fhachtóiriú leis féin ach úsáid a bhaint as péirí fachtóirí nó as foirmle na cothromóide cearnaí.

Sampla 3

Fachtóirigh $f(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$

$f(0) = 0 + 0 - 0 + 6 = 6 \neq 0$

$f(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4 \neq 0$

$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6$

$= +18 \neq 0$

$f(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0$

$\therefore$ is fachtóir é (x − 2).

Roinnimid $2x^3 + x^2 - 13x + 6$ ar (x − 2):

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 5x - 3 \\
\hline
x - 2 & 2x^3 + x^2 - 13x + 6 \\
 & \underline{2x^3 - 4x^2} \\
 & \quad 5x^2 - 13x + 6 \\
 & \quad \underline{5x^2 - 10x} \\
 & \qquad -3x + 6 \\
 & \qquad \underline{-3x + 6} \\
 & \qquad\quad 0 + 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ is iad $(x - 2)(2x^2 + 5x - 3)$ fachtóirí $f(x)$

$\Rightarrow$ is iad $(x - 2)(x + 3)(2x - 1)$ fachtóirí $f(x)$.

2. Cothromóidí ciúbacha a réiteach

Is é an bealach le cothromóidí ciúbacha san fhoirm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a réiteach,

le nialas ansin chun na fréamhacha (réitigh) a fháil.

Sampla 4

Réitigh an chothromóid $2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 = 0$.

Bíodh $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$

$\Rightarrow f(0) = 2(0)^3 - 4(0)^2 - 22(0) + 24 = 24$

$\Rightarrow f(1) = 2(1)^3 - 4(1)^2 - 22(1) + 24 = 0$

$\Rightarrow$ is fachtóir é $(x - 1)$.

Is iad $(x - 1)(2x^2 - 2x - 24)$ na fachtóirí

Déanaimid é sin a fhachtóiriú a thuilleadh:

$(x - 1)(2x + 6)(x - 4)$

$\therefore\ f(x) = 0 \Rightarrow (x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1.$

Freisin, $(2x + 6) = 0 \Rightarrow x = -3$

agus $(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 4.$

Ach an roinnt a dhéanamh, faighimid

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 2x - 24 \\
\hline
x - 1 & 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 \\
 & \underline{2x^3 - 2x^2} \\
 & \quad -2x^2 - 22x + 24 \\
 & \quad \underline{-2x^2 + 2x} \\
 & \qquad -24x + 24 \\
 & \qquad \underline{-24x + 24}
\end{array}
$$

Is iad $x = (1, -3, 4)$ na réitigh

Cleachtadh 2.9

1. Taispeáin gur fachtóir de $x^2 - 8x + 15$ é $(x - 3)$.

2. Taispeáin gur fachtóir de $x^3 - x^2 - 9x + 9$ é $(x - 1)$.

3. Taispeáin gur fachtóir de $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ é $(x + 2)$.

4. Taispeáin gur fachtóir de $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ é $(x - 2)$.

5. Féach an fachtóir de $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ é $(x - 2)$.

6. Taispeáin gur fachtóir de $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ é $(2x - 1)$.

7. Féach an fachtóir de $2x^3 - x^2 - 5x - 2$ é $(2x + 1)$.

8. Más fachtóir de $x^3 + kx^2 - x - 8$ é $(x - 1)$, faigh luach k.

9. Faigh p más fachtóir de $x^3 + 6x^2 + px + 6$ é $(x + 2)$.

10. Taispeáin gur fachtóir de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ é $(x - 3)$ agus faigh an dá fhachtóir eile.

11. Taispeáin gur fachtóir de $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ é $(x + 3)$ agus faigh an dá fhachtóir eile.

12. Bain úsáid as *teoirim na bhfachtóirí* chun gach ceann díobh seo a leanas a fhachtóiriú go hiomlán:

    (i) $x^3 - 4x^2 - x + 4$ (ii) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$
    (iii) $x^3 + 6x^2 - x - 30$ (iv) $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$
    (v) $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ (vi) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$.

13. Tá $f(x) = 2x^3 + 13x^2 + 13x - 10$.
    Taispeáin go bhfuil $f(-2) = 0$ agus faigh uaidh sin trí fhachtóir $f(x)$.

14. Más fachtóir de $x^3 + ax^2 - x - 2$ é $(x + 2)$, faigh a agus faigh uaidh sin an dá fhachtóir eile.

15. Fachtóirigh $x^3 - x^2 - 14x + 24$ go hiomlán.
    Réitigh uaidh sin an chothromóid $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$.

16. Taispeáin gur fréamh leis an gcothromóid $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$ é $x = 1$ agus faigh an dá fhréamh eile.

17. Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo a leanas

    (i) $x^3 - 4x^2 - x + 4$ (ii) $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$
    (iii) $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$ (iv) $x^3 - 7x - 6$.

18. Más fachtóirí de $2x^3 + ax^2 + bx - 3$ iad $(x + 1)$ agus $(x + 3)$ araon, faigh luach a agus luach b.
    Faigh an tríú fachtóir agus réitigh uaidh sin an chothromóid $2x^3 + ax^2 + bx - 3 = 0$.

19. Más fachtóir de $x^3 + 5x^2 + kx - 12$ é $(x + 1)$, faigh luach k agus an dá fhachtóir eile den slonn ciúbach.

20. Más fachtóirí de $2x^3 + ax^2 - 17x + b$ iad $(x + 2)$ agus $(x - 3)$ araon, faigh luach a agus luach b.

Faigh uathu sin an tríú fachtóir.

21. Má tá an slonn $ax^3 + 8x^2 + bx + 6$ inroinnte go cothrom ar $x^2 - 2x - 3$, faigh luach a agus luach b.

Réitigh uaidh sin an chothromóid $ax^3 + 8x^2 + bx + 6 = 0$.

22. Faigh luach x sna cothromóidí seo a leanas:

(i) $ax^3 - b = c$ (ii) $a(x + b)^3 = c$

Mír 2.10 Graif d'iltéarmaigh chiúbacha

Maidir le hiltéarmach ciúbach $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, is iad na comhéifeachtaí a chinneann cruth deireanach gach graif. Ní mór roinnt gnéithe tábhachtacha a thabhairt faoi deara agus béim a leagan orthu.

TFC: Cuir isteach gach ceann de na feidhmeanna seo a leanas agus tú ag úsáid áireamhán grafaicí nó bogearraí ríomhaireachta (m.sh. GeoGebra). Athraigh na comhéifeachtaí agus scrúdaigh cén éifeacht atá aige sin ar chruth gach graif.

Nóta: Tá foirm na bhfachtóirí de gach feidhm an-oiriúnach i gcásanna áirithe.

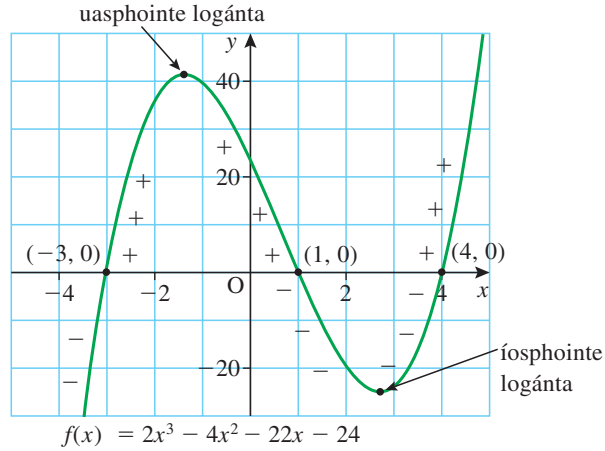
1. Trí fhréamh réadacha

$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$
$f(x) = (x - 1)(2x + 6)(x - 4)$

Trí fhréamh réadacha atá leis an ngraf seo, -3, 1, 4.

Agus an graf ag dul trí fhréamh, athraíonn luach na feidhme ó $(-)$ go $(+)$ nó ó $(+)$ go $(-)$.

Tá dhá phointe casaidh ag an ngraf, uasphointe logánta agus íosphointe logánta.



$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x - 24$
$= (2x - 6)(x - 1)(x - 4)$

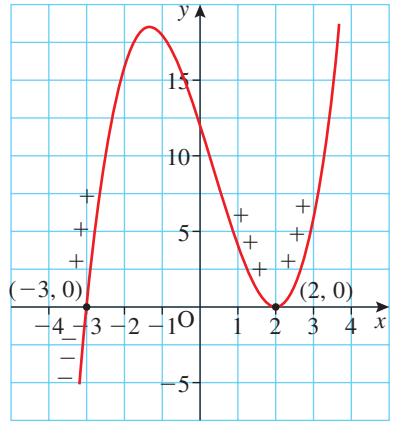
2. Trí fhréamh réadacha, ar ilfhréamh iad dhá cheann díobh

$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$
$\quad = (x + 3)(x - 2)^2$

Trí fhréamh atá leis an ngraf seo freisin, -3, 2, 2, ach is ilfhréamh ceann amháin de na fréamhacha.

Ní thrasnaíonn an graf seo an x-ais ach aon uair amháin mar gheall ar an ilfhréamh.

Dhá phointe casaidh atá ag an ngraf.



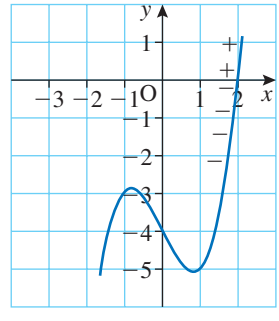
$f(x) = x^3 - x^2 - 8x - 12$
$\quad = (x - 3)(x - 2)(x - 2)$
$\quad = (x - 3)(x - 2)^2$

3. Fréamh réadach amháin, dhá fhréamh shamhailteacha

$f(x) = x^3 - 2x - 4$
$\quad = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$
$\quad = (x - 2)(x + 1 - \sqrt{-1})(x + 1 + \sqrt{-1})$ … foirmle na cothromóide cearnaí

Fréamh réadach amháin agus dhá fhréamh shamhailteacha atá leis an iltéarmach seo.

Trasnaíonn sé an x-ais uair amháin agus dhá phointe casaidh atá aige.

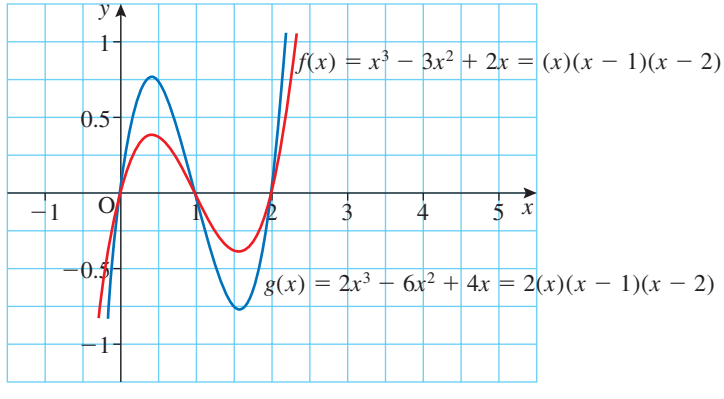


$f(x) = x^3 + 2x + 4$
$\quad = (x + 2)(x^2 - 2x - 2)$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ agus $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x = 2f(x)$ a chur i gcomparáid lena chéile

Is iad na fréamhacha céanna atá leis an dá iltéarmach, $x = 0, 1, 2$.
$\therefore$ tá na fachtóirí (x), $(x - 1)$ agus $(x - 2)$ i bpáirt ag na hiltéarmaigh.

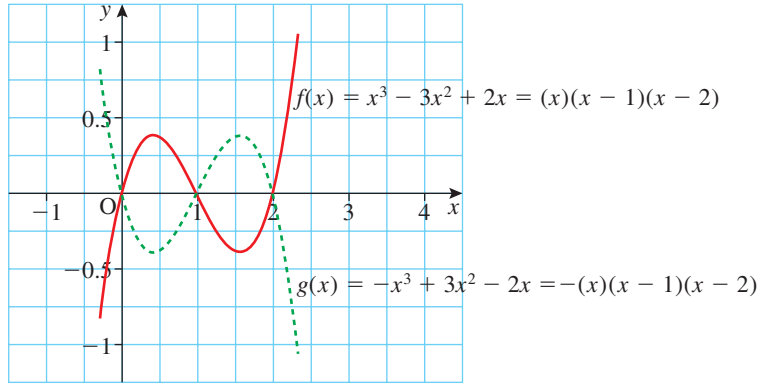
Ach tá fachtóir 2, ar slánuimhir é, ag $g(x)$ freisin, rud a iolraíonn gach luach den chuar, ach amháin nuair is ionann an luach agus nialas, i.e. ag na fréamhacha.



Feidhmíonn an fachtóir seo, ar slánuimhir é, mar fhachtóir aimpliúcháin.

5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ agus $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x = -f(x)$ a chur i gcomparáid lena chéile

Sa chás seo freisin, is iad na fréamhacha céanna atá leis an dá iltéarmach agus, mar sin, tá fachtóirí i bpáirt acu. Tá na graif siméadrach trasna na x-aise.



$g(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x = -(x^3 - 3x^2 + 2x) = -f(x)$.

Nuair a iolraítear faoi mhíneas, iompaíonn sé sin an graf bunoscionn.

6. Graif $f(x) = ax^3$

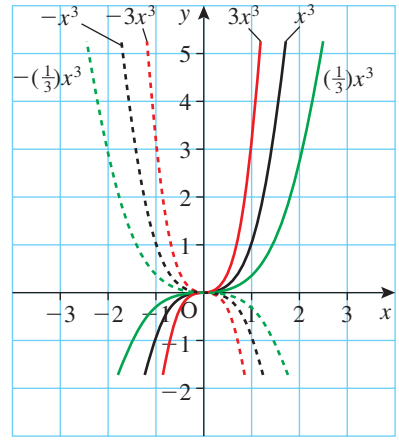
Gabhann na graif go léir trí (0, 0).
I gcás $a > 0$, tá na graif go léir ag méadú agus, de réir mar a théann a i méid, is géire a ardaíonn na graif.
I gcás $a < 0$, tá na graif ag laghdú.

Nóta:

(i) Má tá $f(x) = 3x^3$ agus $g(x) = -3x^3$,
$\Rightarrow f(x) = -g(x)$, i.e. is é $f(x)$ frithchaitheamh $g(x)$ san x-ais.

(ii) $f(-x) = g(x)$, i.e. frithchaitheann $f(x)$ agus $g(x)$ a chéile sa y-ais.

Nóta: Níl aon uasphointe logánta ná íosphointe logánta anseo mar a bhí sna graif roimhe seo.



Achoimre:

(i) Trasnaíonn gach iltéarmach ciúbach an x-ais uair amháin ar a laghad, i.e. tá fréamh réadach amháin léi.

(ii) As gach fréamh tagann fachtóir den iltéarmach.

(iii) Tá ilfhréamhacha ag roinnt iltéarmach.
Teagmhaíonn an graf leis an x-ais sa phointe seo ach ní thrasnaíonn sé í.

(iv) Má bhíonn comhéifeacht x^3 deimhneach, tosaíonn an graf faoi bhun na x-aise, i.e. tosaíonn sé le y-luach diúltach agus méadaíonn sé de réir mar a mhéadaíonn na x-luachanna.

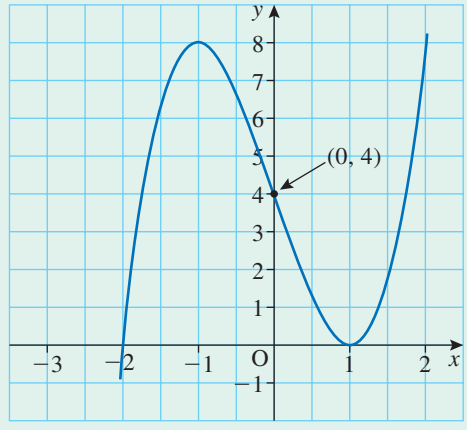
(v) Má bhíonn comhéifeacht x^3 diúltach, tosaíonn an graf os cionn na x-aise, i.e. tosaíonn sé le y-luach deimhneach agus laghdaíonn sé de réir mar a mhéadaíonn na x-luachanna.

(vi) Tá uasphointí casaidh logánta agus íosphointí casaidh logánta ag roinnt graif chiúbacha.

(vii) Agus tú ag ceapadh iltéarmaigh óna chuid fréamhacha, féach an bhfuil fachtóir ann atá ina shlánuimhir.

Sampla 1

Scrúdaigh an graf agus faigh slonn don iltéarmach ciúbach seo.



(i) Trasnaíonn an graf an x-ais ag $x = -2$.

(ii) $\Rightarrow$ is fréamh é $x = -2$
$\Rightarrow$ is fachtóir é $(x + 2)$.

(iii) Teagmhaíonn an graf leis an x-ais ag $x = 1$.
$\Rightarrow$ is ilfhréamh é $x = 1$
$\Rightarrow$ is fachtóir é $(x - 1)^2$.

(iv) B'fhéidir go mbeadh fachtóir sa ghraf atá ina shlánuimhir, i.e. $f(x) = a(x + 2)(x - 1)^2$.

Ón sceitse den ghraf seo, nuair atá $x = 0$, tá $f(x) = 4$.

$\therefore \quad 4 = a(2)(1)^2 = 2a$

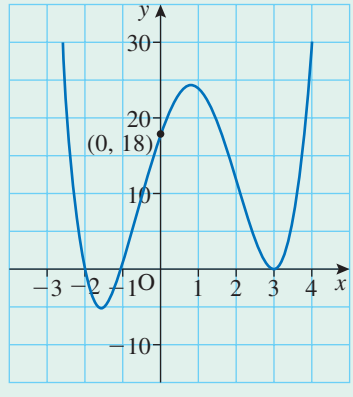
$\therefore \quad a = 2.$

$\therefore \quad f(x) = 2(x + 2)(x - 1)^2 = 2x^3 - 6x + 4.$

7. Iltéarmaigh i gcumhachtaí níos airde

Sampla 2

Tugtar graf an iltéarmaigh $f(x) = a(x + b)(x + c)(x + d)(x + d)$ sa léaráid. Faigh luach a, b, c agus d.



Ón léaráid, is iad $x = -2, -1, 3$ na fréamhacha.

Tá fréamh dhúbailte ag $x = 3$.
Mar sin is iad $(x + 2)$, $(x + 1)$, $(x - 3)$ agus $(x - 3)$ na fachtóirí.

$\therefore \quad f(x) = a(x + 2)(x + 1)(x - 3)(x - 3).$

Ag $x = 0$, $f(x) = 18$.

$\therefore \quad 18 = a(0 + 2)(0 + 1)(0 - 3)(0 - 3) = 18a$

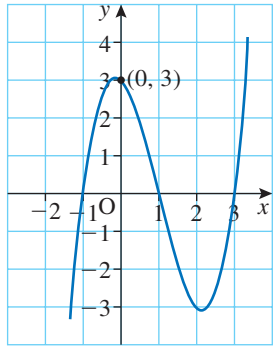
$\therefore \quad a = 1$

$\therefore \quad a = 1, b = 2, c = 1, d = -3.$

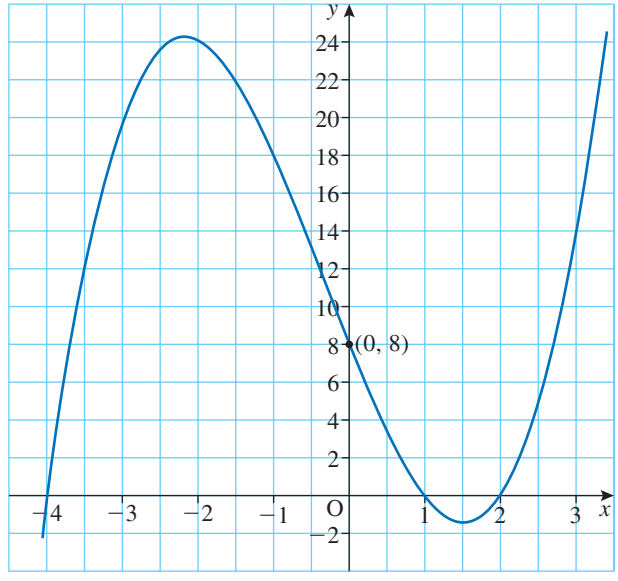
Cleachtadh 2.10

1. Faigh slonn ciúbach do gach ceann de na graif seo a leanas. Tabhair do chuid freagraí san fhoirm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

(i)

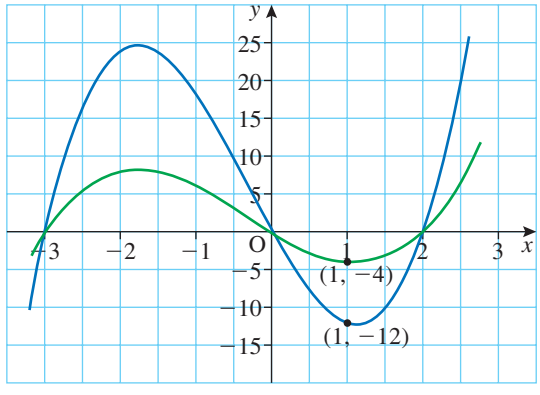


(ii)

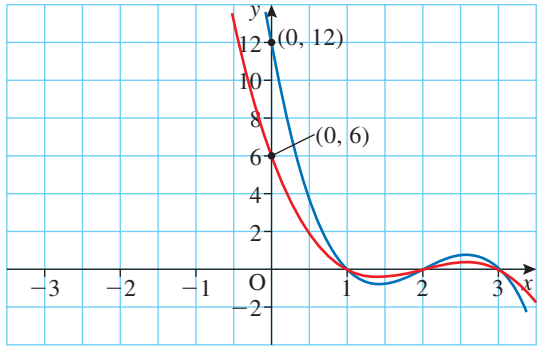


2. Scríobh slonn iltéarmach do gach ceann de na graif chiúbacha seo a leanas.

(i)



(ii)



3. Trasnaíonn graf $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ an x-ais ag $x = 1$, $x = -2$ agus $x = \frac{1}{2}$. Trasnaíonn sé an y-ais freisin sa phointe (0, 6).

Faigh na comhéifeachtaí a, b, c agus d.

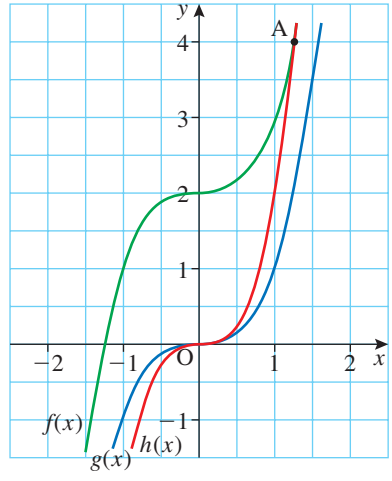
4. Is iad $(x - 3)$, $(x + 1)$ agus $(x + 2)$ na fachtóirí atá ag an iltéarmach $f(x)$.

Má tá $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, faigh luach a, b agus c.

5. Féach ar an léaráid seo. I gcás gach ceann de na trí shlonn iltéarmacha, scríobh síos cé acu graf lena mbaineann sé:

(i) $x^3 + 2$
(ii) x^3
(iii) $2x^3$,

Faigh comhordanáidí an phointe A.



TFC: Tabhair faoi deara gur féidir cuid mhaith freagraí sa chleachtadh seo a fhíorú ach úsáid a bhaint as áireamhán grafaicí nó as bogearraí ríomhaireachta (m.sh. GeoGebra).

6. Má tá $f(x) = (x)(x - 4)(x - 6)$, faigh luach $f(2)$ agus luach $f(5)$.

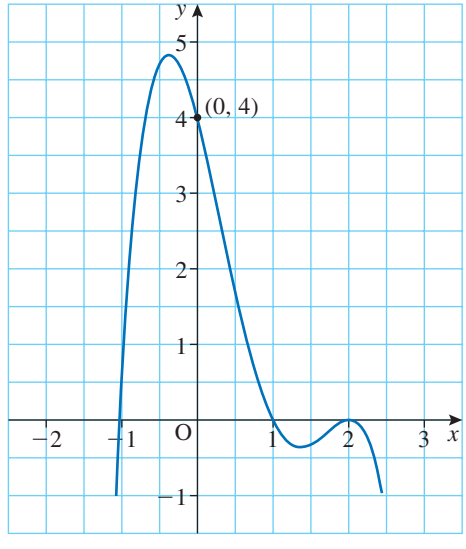
Uaidh sin tarraing sceitse garbh den chuar.

7. Má tá $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$, faigh luach $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ agus $f(2)$.

Uaidh sin tarraing sceitse garbh den chuar.

8. Tugtar sa léaráid graf an iltéarmaigh $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

(i) Faigh fachtóirí an tsloinn.
(ii) Uaidh sin faigh luach a, b, c, d agus e.

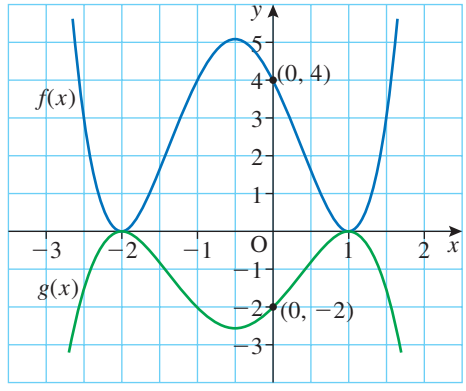


9. Tá graif dhá fheidhm $f(x)$ agus $g(x)$ le feiceáil sa léaráid ar dheis.

Má tá $f(x) = \text{ag}(x)$,

(i) faigh luach a

(ii) faigh cothromóidí le haghaidh $f(x)$ agus $g(x)$.

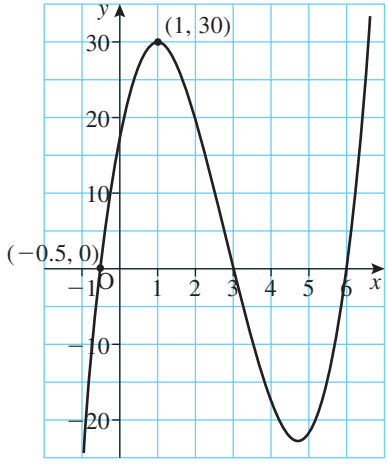


10. Scríobh, san fhoirm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, cothromóid chiúbach leis na fréamhacha seo a leanas:

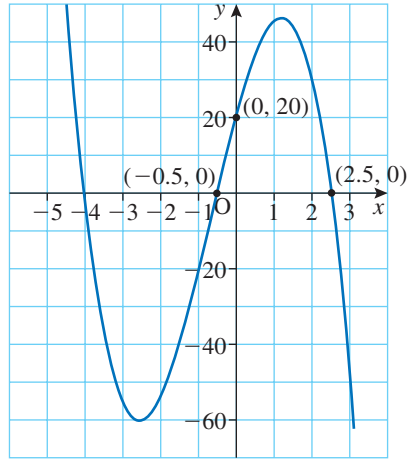
(i) $-1, 2, 5$ (ii) $-3, -1, 0$ (iii) $-2, \frac{1}{4}, 3$ (iv) $\frac{1}{2}, 2, 4$.

11. Faigh slonn ciúbach do gach ceann de na cuair seo a leanas.

(i)



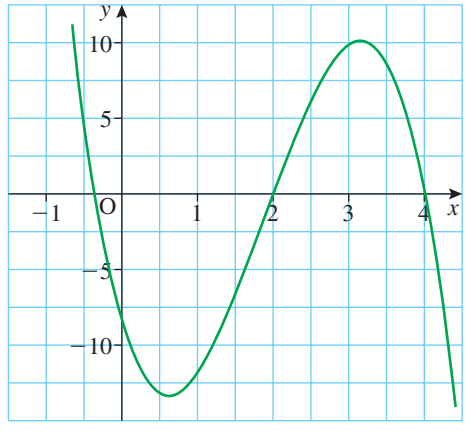
(ii)



12. Sa léaráid taispeántar graf den fheidhm $f(x) = -3x^3 + 17x^2 + bx - 8$.

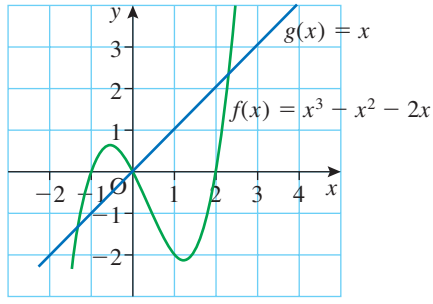
Trasnaíonn an graf an x-ais sna pointí a, 2 agus 4.

Faigh luach a agus luach b.



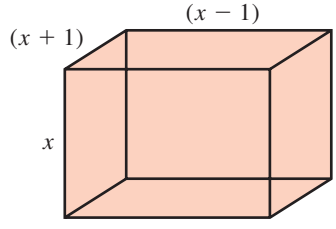
13. Taispeántar sa léaráid graf de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ agus $g(x) = x$.
Bain úsáid as an ngraf chun iad seo a réiteach:

(i) $f(x) = 0$
(ii) $f(x) = g(x)$.
(iii) Trí na cothromóidí a réiteach, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha, seiceáil cé chomh cruinn is atá do chuid freagraí.



14. Toisí x cm, $(x + 1)$ cm agus $(x - 1)$ cm atá ag bosca, mar a thaispeántar.

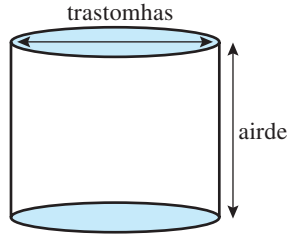
(i) Faigh toirt an bhosca i dtéarmaí x.
(ii) Más ionann toirt an bhosca agus 24 cm^3, bain úsáid as teoirim na bhfachtóirí chun luach x a fháil.



15. $V = \pi r^2 h$ a thugann toirt sorcóra, áit arb é r an ga agus h an airde.
Má tá an trastomhas cothrom leis an airde, taispeáin gur féidir an toirt a scríobh mar seo:

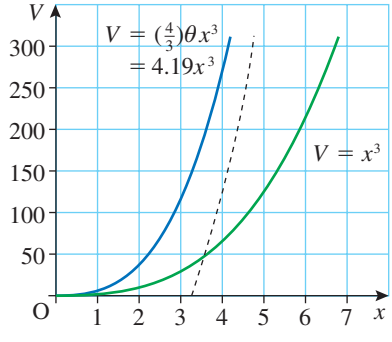
$$V = ah^3.$$

Agus tú ag glacadh leis go bhfuil $\pi = 3.14$, faigh luach a ceart go dtí dhá ionad de dheachúlacha.
Agus tú ag úsáid na feidhme seo, ríomh toirt sorcóra ar trastomhas dó 11 cm.
Faigh trastomhas sorcóra ar toirt dó 215.58 cm^3, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.



16. Ga 3 cm atá ag soitheach i bhfoirm sféir. A bhfuil sa soitheach sin, líonann siad go hiomlán ciúb ar fad sleasa dó x cm.

Má thugann an fhoirmle $V = \frac{4}{3}\pi x^3 \cong 4.19x^3$ toirt sféir, áit arb é x an ga, bain úsáid as na graif chiúbacha chun garluach ar x, fad shlios an chiúib, a fháil.
Cén garluach ar x a d'fhágfadh go mbeadh toirt sféir 150 cm^3 níos mó ná toirt an chiúib, má sheasann an líne bhriste do (V − 150) cm^3 ?
[i.e. $(4.19x^3 - 150)$ cm^3]



Súil Siar (Croícheisteanna)

1. Réitigh an chothromóid $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Uaidh sin, réitigh go hiomlán an chothromóid

$$\left(t - \frac{6}{t}\right)^2 - 6\left(t - \frac{6}{t}\right) + 5 = 0.$$

2. Faigh fréamhacha na cothromóide $2(x + 1)(x - 4) - (x - 2)^2 = 0$. Fág do chuid freagraí i bhfoirm surda.

3. Faigh an raon luachanna ar p a fhágann nach bhfuil réiteach ar bith ar $px^2 + 2x + 1 = 0$.

4. Taispeáin gur réadach atá fréamhacha na cothromóide $x^2 - (a + d)x + (ad - b^2) = 0$.

5. Más fachtóirí de $6x^4 - x^3 + ax^2 - 6x + b$ iad $(x + 1)$ agus $(x - 2)$, faigh luach a agus luach b.

6. Bain úsáid as 'triail agus earráid' chun iad seo a fháil:

(i) fréamh leis an iltéarmach $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$
(ii) fachtóirí $f(x)$, agus
(iii) réitigh uaidh sin an chothromóid $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$.

7. Bain úsáid as an idirdhealaí le déanamh amach cén cineál fréamhacha atá le gach ceann díobh seo:

(i) $x^2 - 2x - 5 = 0$ (ii) $x^2 - 4x + 6 = 0$ (iii) $-6 + 4x - x^2 = 0$

8. Bain úsáid as an ionadú $y = 3^x$ chun an chothromóid $3^{2x} - 12(3^x) + 27 = 0$ a scríobh i dtéarmaí y. Uaidh sin, réitigh an chothromóid chun x a fháil.

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. Sloinn $2x^2 - 4x - 5$ san fhoirm $a(x + h)^2 + k$ agus, uaidh sin,

(i) réitigh an chothromóid $2x^2 - 4x - 5 = 0$
(ii) faigh íosphointe an chuair seo.

2. Forbair $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$.

3. Simpligh $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{80} + \sqrt{5}}$ agus ansin déan an t-ainmneoir a chóimheas.

4. Réitigh $\sqrt{x + 2} = x - 4$.

5. An chothromóid $8t^2 + 4t = s$ a thugann gluaisne cairr, áit arb é s an fad slí a thaistil an carr ina mhéadair.

(i) Trí iniúchadh, *meas* an t-am, t, a thóg sé ar an gcarr dul thar phointe 10 méadar ar shiúl.
(ii) Faigh, ceart go dtí dhá ionad de dheachúlacha, an t-am a tógadh agus mínigh cén fáth nach bhfuil ach aon am amháin den sórt sin ann.
(iii) Ríomh an earráid chéatadánach a bhí ann nuair a ceartaíodh an freagra go dtí dhá ionad de dheachúlacha.

6. Is í an fhoirmle $\sigma = \dfrac{\sqrt{p(1+p)}}{n}$ a thugann earráid chaighdeánach, σ , na comhréire p de shampla, áit arb é p an chomhréir agus n an líon sa sampla.
Agus tú ag úsáid fhoirmle na cothromóide cearnaí, faigh p, an chomhréir, i dtéarmaí σ agus n.

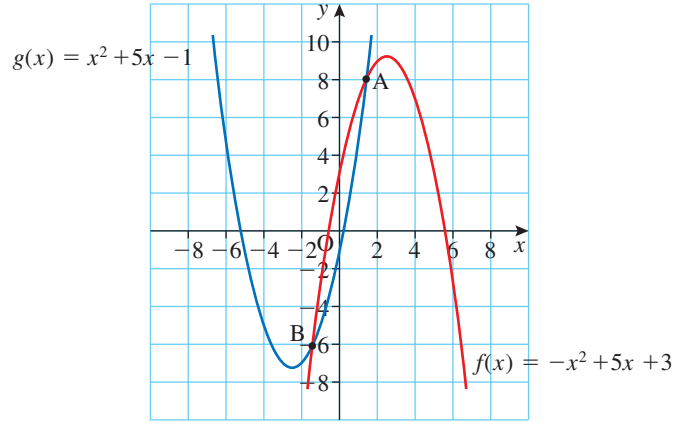
7. Líon isteach an tábla thíos. I ngach spás, scríobh síos cé acu deimhneach (+) nó diúltach (−) atá an chainníocht.

	$k < 0$	$0 < k < \frac{1}{4}$	$k > \frac{1}{4}$
k	*Diúltach*		*Deimhneach*
$4k$			
$4k - 1$			
$k(4k - 1)$			

Agus tú ag úsáid an tábla atá líonta isteach agat, faigh an raon luachanna ar k a fhágann go bhfuil an slonn cearnach $x^2 + 4kx + k$ deimhneach i gcás gach luacha ar x.

8. Is tairisigh dheimhneacha iad a, b agus c agus is réadach agus neamhchothrom (uathúil) atá fréamhacha uile $ax^2 + 2bx + c$ agus $bx^2 + 2cx + a$. Taispeáin nach bhfuil fréamhacha $cx^2 + 2ax + b = 0$ réadach.

9. Tá $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ agus $g(x) = x^2 + 5x - 1$.
Faigh comhordanáidí na bpointí A agus B. Fág do chuid freagraí i bhfoirm surda.



10. Faigh an raon luachanna ar k a fhágann gur fréamhacha réadacha atá le $kx^2 - 2kx - 3k - 12 = 0$.

11. Más iad r_1 agus r_2 fréamhacha na cothromóide $x^2 - \sqrt{3}x - 6 = 0$, faigh luach r_1r_2.

12. Réitigh na cothromóidí comhuaineacha $3x + y = -1$ agus $x^2 + y^2 = 53$.

13. Más ionann fad cistine dronuilleogaí agus leath na cearnóige ar a leithead agus más é 48 m a himlíne, faigh toisí na cistine.

14. Má tá x réadach, faigh tacar na luachanna féideartha ar an bhfeidhm $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

15. Faigh cothromóid an chuair chearnaigh a ghabhann trí na pointí

$(-2, -1), (1, 2), (3, -16)$.

16. (i) Luaigh cén tuiscint atá agat ar *theoirim na bhfachtóirí* agus ar a coinbhéarta.

(ii) Má tá $f(x) = x_3 - 6x^2 + 11x - 6$, faigh luach $f(0), f(1), f(2), f(3)$ agus $f(4)$ agus, uathu sin, réitigh an chothromóid $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

(iii) Sceitseáil an cuar.

17. Tá cuid de ghraf an iltéarmaigh

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tarraingthe sa léaráid seo.

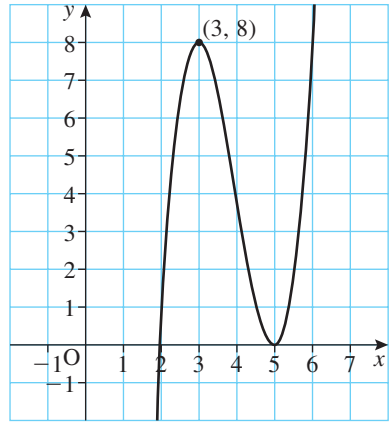
(i) Faigh fréamhacha an iltéarmaigh seo.

(ii) Scríobh slonn le haghaidh $f(x)$ i dtéarmaí fhachtóirí an iltéarmaigh seo.

(iii) Faigh luach a, b, c agus d.

(iv) Faigh slonn le haghaidh íomhá an chuair seo agus é frithchaite san x-ais.

(v) Faigh slonn le haghaidh íomhá an chuair seo agus é frithchaite sa y-ais.



Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. Teastaíonn cóir leighis le druga ar leith ó dhuine a dtagann galar áirithe air. Is í an chothromóid $C(t) = 0.02t - at^3$ a thugann tiúchan C an druga sin i sruth na fola, t uair an chloig tar éis dáileog den druga a thógáil. Tomhaistear an tiúchan C cúig huaire an chloig tar éis an chéad dáileog a thógáil, agus 0.075 a fhaightear.

(i) Faigh luach an tairisigh a.

(ii) Ar feadh cé mhéad uair an chloig atá cuid den druga fós i sruth na fola?

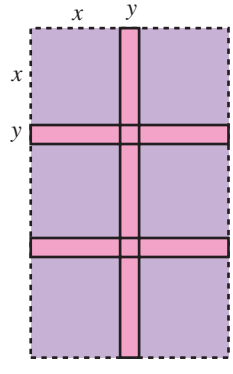
(iii) Mínigh an fáth a bhfuil graf $C(t)$ líneach a bheag nó a mhór go dtí $t = 10$ n-uaire an chloig.

2. Déantar póstaer mór dronuilleogach a fhoroinnt ina 6 chearnóg chorcra. x m ar fad atá sleasa na gcearnóg sin. y m ar leithead atá na stiallacha a roinneann na cearnóga, mar a thaispeántar.

(i) Faigh achar an phóstaeir iomláin i dtéarmaí x agus y.

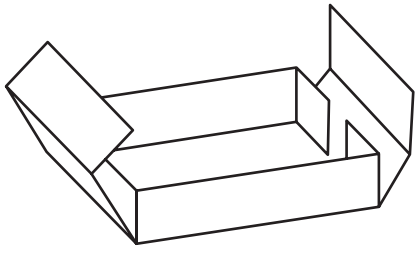
(ii) Más féidir achar na stiallacha a roinneann na cearnóga a scríobh san fhoirm $kxy + 2y^2$, faigh k.

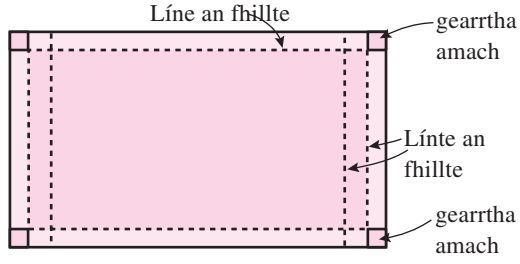
(iii) Más é 1.5 m² achar iomlán an chorcra, agus más é 1 m² achar na stiallacha a roinneann na cearnóga, faigh x agus, uaidh sin, faigh cothromóid le haghaidh x agus réitigh í.



3. Is éard atá le déanamh le haghaidh tionscadal idirbhliana ná bosca treisithe a dhéanamh, mar a thaispeántar sa léaráid. Seo mar atá an plean don bhosca:

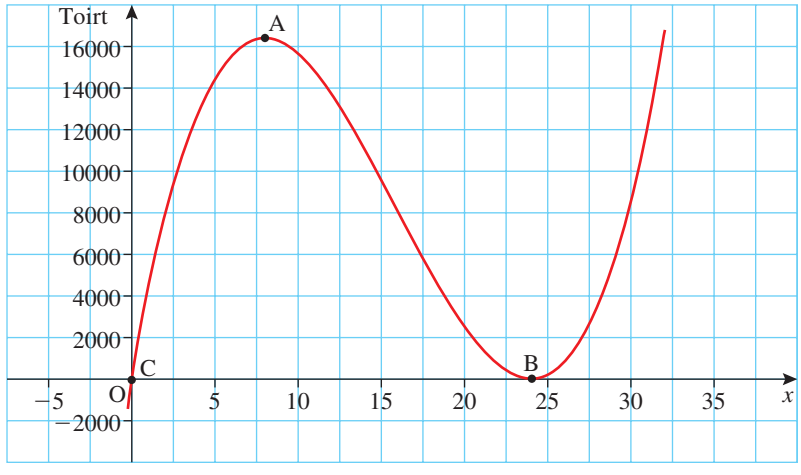
- Gearrtar cearnóga dar slios x cm de na ceithre chúinne de phíosa dronuilleogach cairtchláir atá 48 cm faoi 96 cm.
- Tá línte an fhillte léirithe le línte briste.
- Déantar liopa a fhilleadh ansin ag a, le cairtchlár atá dhá oiread chomh tiubh.





(a) Faigh slonn do thoirt V an bhosca oscailte.

(b) Tugtar cuid de ghraf an tsloinn seo sa léaráid thíos.



(i) Cén tacar fearainn de luachanna ar x atá bailí le haghaidh an bosca seo a dhéanamh?

(ii) Mínigh cén fáth a bhfuil na pointí A, B agus C suntasach.

(iii) Déan meastachán ón ngraf ar uastoirt an bhosca agus ar an luach ar x ag a dtarlaíonn sé sin.

(iv) Faigh toirt an bhosca nuair atá $x = 10$ cm.

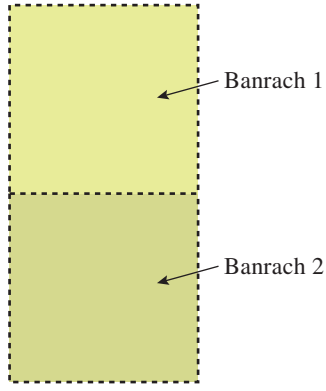
(v) Cinntear go bhfuil $0 < x < 5$ cm. Faigh an toirt is mó a d'fhéadfadh a bheith ann.

(vi) Má tá $5 \leq x \leq 15$ cm, céard é íostoirt an bhosca?

(c) Is féidir achar an dromchla sheachtraigh ar an mbosca a fháil ach úsáid a bhaint as an bhfoirmle

$A = a(b - x)(c + x)$. Faigh luach a, b agus c.

4. Ní mór banracha breise sealadacha a chur le stáblaí marcaíochta le haghaidh seó capall a bheidh ar siúl go luath. Tá dóthain airgid ar fáil chun 120 m d'fhálú slabhrach a fháil ar cíos. Is é an plean ná dhá bhanrach a dhéanamh le fál sa lár a bheidh i bpáirt ag an dá bhanrach.



(i) Taispeáin gur féidir achar na mbanrach a léiriú leis an gcothromóid chearnach
$A = -\frac{3}{2}w^2 + 60w$, áit a seasann A don achar agus w do leithead na banraí.

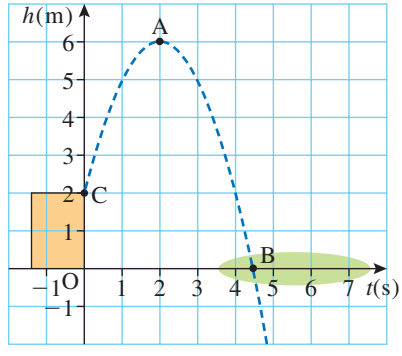
(ii) Faigh fréamhacha na cothromóide seo agus, uaidh sin, tarraing sceitse garbh den chuar.

(iii) Tríd an gcearnóg a shlánú sa chothromóid don achar A, faigh uasachar na banraí, agus

(iv) an luach ar w ag a dtarlaíonn an t-uasachar seo.

(v) Uaidh sin faigh toisí an dá bhanrach.

5. Buailtear liathróid ghailf ó bharr tí (*tee*) atá 2 m ar airde. Más í an chothromóid $h = 2 + 4t - t^2$ a thugann airde (h) na liathróide os cionn leibhéal na talún, áit arb é t an t-am agus é tomhaiste ina shoicindí,



(a) déan meastachán ón ngraf

(i) ar na hamanna, t, ag a bhfuil an liathróid 5 m os cionn leibhéal na talún,

(ii) ar an am a thógann sé ar an liathróid titim ar an talamh.

(b) Faigh an t-am a thógann sé ar an liathróid an talamh a shroicheadh, ceart go dtí dhá ionad de dheachúlacha.

(c) Is féidir an chothromóid $h = 2 + 4t - t^2$ a scríobh san fhoirm $q - (t - p)^2$ i gcás gach luacha ar t, áit arb é q an pointe is airde os cionn talún a shoicheann an liathróid, ag am p. Faigh (p, q).

6. Bhí tú i do bhainisteoir ar scéim chíosa rothar in ionad saoire cois farraige ar feadh an tsamhraidh. Nuair a ghearr tú €12.00 sa rothar sa lá, lig tú 36 rothar ar cíos sa lá, ar meán. Le haghadh gach méadaithe de 50 cent ar an bpraghas cíosa, tháinig laghdú de 2 rothar ar meán ar an líon rothar a ligeadh ar cíos sa lá.
Líon isteach an tábla seo a leanas.

Líon na méaduithe	Praghas sa rothar	Líon na rothar	Ioncam iomlán (*I*)
	€12	36	
Méadú amháin			
2 mhéadú			
3 mhéadú			
x méadú ar an bpraghas			

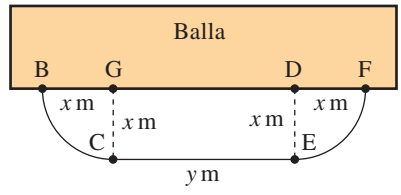
(i) Scríobh cothromóid i dtéarmaí x don ioncam I.

(ii) Scríobh an chothromóid seo san fhoirm $q - (x - p)^2$, áit arb é (p, q) uasphointe an chuair.

(iii) Úsáid an fhaisnéis sin chun an t-uasioncam a fháil.

(iv) Céard ba chóir duit a athrú chun an t-ioncam a mhéadú?

7. Tá plean gairdín in aghaidh balla le feiceáil ar dheis. y m ar fad agus x m ar leithead atá an dronuilleog GCED. Tá imeall le bheith ag an ngairdín ag an dá thaobh. Ceathrú ciorcail a bheidh sa dá imeall. x m ar fad atá ga an chiorcail. Tá claí le tógáil feadh BCEF.



(a) Scríobh slonn d'achar A an ghairdín i dtéarmaí x agus y.

(b) Má tá an claí le bheith 100 m ar fad, faigh

(i) y i dtéarmaí x

(ii) A i dtéarmaí x

(iii) an t-uasfhearann do luachanna x don achar A in (ii).

(c) Faigh na luachanna ar x i gcás gairdín ar achar dó 1000 m^2, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

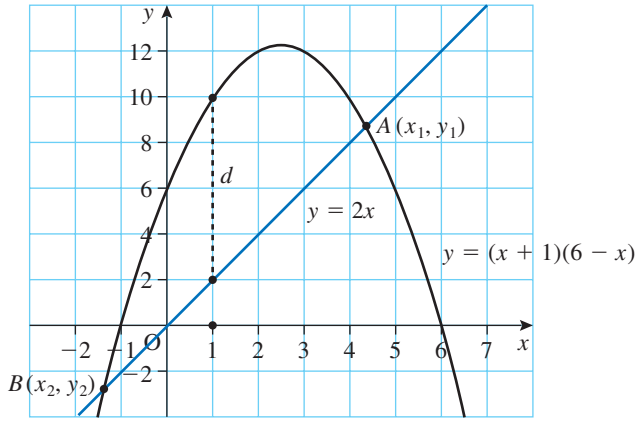
(d) Déantar cinneadh an gairdín a thógáil suas go hairde $\frac{x}{50}$ m. Más é 100 m fad an chlaí, faigh, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha,

(i) an toirt V m^3 d'ithir a theastaíonn, i dtéarmaí x,

(ii) an toirt d'ithir a theastaíonn le haghaidh gairdín ar achar dó 1000 m^2,

(iii) an luach/na luachanna ar x a dteastaíonn 500 m^3 d'ithir lena (n-)aghaidh.

8. Scrúdaigh an graf ar dheis.



(a) Bain úsáid as an bhfaisnéis sa ghraf chun comhordanáidí na bpointí $A(x_1, y_1)$ agus $B(x_2, y_2)$ a fháil. Tabhair do chuid freagraí i bhfoirm surda.

(b) Scríobh slonn don "fhad ceartingearach", d, idir na graif, i dtéarmaí x.

(c) Ar aiseanna ar leith, tarraing sceitse den fhad $d(x)$ idir an dá ghraf.

(d) Scríobh an chothromóid do $d(x)$ san fhoirm $y = q - a(x - p)^2$ tríd an gcearnóg a shlánú.

(e) Scríobh síos comhordanáidí uasphointe (p, q) an ghraif seo agus tabhair léirmhíniú ar chiall na gcomhordanáidí (p, q).

(f) Faigh raon na luachanna ar $d(x)$.

9. Scrúdaigh an cuar $y = \sqrt{x - b} + c$.

(i) Má thrasnaíonn an líne $y = x$ an cuar seo sa phointe (a, a), taispeáin go bhfuil $a^2 - a(2c + 1) + c^2 + b = 0$.

(ii) Más tadhlaí leis an gcuar í an líne, taispeáin go bhfuil $c = \dfrac{4b - 1}{4}$.

(iii) Sceitseáil an graf $y = \sqrt{x} - \frac{1}{4}$ i gcás an fhearainn $0 \leq x \leq 4$. Léirigh an x-idirlíne agus an y-idirlíne.

(iv) Faigh na comhordanáidí ag a bhfuil an líne $y = x$ ina tadhlaí le $y = \sqrt{x} - \frac{1}{4}$.

(v) Maidir le $y = x + k$ a bheith ag bualadh leis an gcuar $y = \sqrt{x} - \frac{1}{4}$ luachanna ar k

(a) ag a dtarlaíonn sé faoi dhó

(b) ag a dtarlaíonn sé uair amháin

(c) nach dtarlaíonn sé ar chor ar bith.

Uimhreacha Coimpléascacha

caibidil 3

Focail thábhachtacha

uimhir éagóimheasta **slánuimhir chóimheasta** **neamh-athfhillteach**
neamhchríochta **surdaí** **uimhir choimpléascach**
comhchuingeach coimpléascach **foirm pholach** **réadach** **samhailteach**
foirm dhronuilleogach **foirm mhodail-argóna** **teoirim de Moivre** **léaráid Argand**

Mír 3.1 Uimhreacha éagóimheasta

Sa staidéar a rinne tú ar an matamaitic go dtí seo, tá na córais uimhreacha seo feicthe agat:

(i) Uimhreacha aiceanta: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\}$ … slánuimhreacha deimhneacha.

(ii) Slánuimhreacha: $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ … slánuimhreacha, uimhreacha deimhneacha agus uimhreacha diúltacha, lena n-áirítear nialas.

(iii) Uimhreacha cóimheasta: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, i.e. codáin, m.sh. $\frac{1}{2}, \frac{7}{3}, \frac{-3}{5}, \frac{6}{1}, \frac{10}{9}, \frac{-4}{2}$ srl.

Nóta: Áirítear i dtacar $\mathbb{Q}$ deachúlacha is féidir a scríobh mar chodáin.

Má dhéanaimid iarracht an chothromóid $x^2 + 2 = 7$, a réiteach, gheobhaimid

$$x^2 = 7 - 2 = 5$$
$$x = \sqrt{5}$$

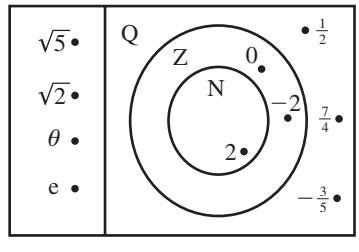
Uimhir é $\sqrt{5}$ nach bhfuil san áireamh in aon cheann de na tacair uimhreacha thuas.

Má úsáidtear áireamhán, feicfimid go bhfuil $\sqrt{5} = 2.236067978\ldots$ …, deachúil neamh-athfhillteach, neamhchríochta.

Toisc nach féidir $\sqrt{5}$ a scríobh mar chóimheas (codán), deirtear gur **uimhir éagóimheasta** é.

Samplaí d'uimhreacha éagóimheasta iad $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}\ldots$

Réadach



Nóta: Tá cur síos déanta againn ar na huimhreacha seo mar **shurdaí** cheana.

Tá π ar cheann de na huimhreacha éagóimheasta is cáiliúla, is é sin cóimheas imlíne ciorcail lena thrastomhas.

$$\pi = 3.141592654\ldots\ldots\ldots$$

Ceann eile is ea uimhir Euler, ***e***, bonnuimhir na logartam aiceanta.

$$e = 2.71828182845\ldots\ldots\ldots$$

De nition: Sainmhíniú: Is ionann uimhir éagóimheasta agus aon réaduimhir **nach féidir** a shloinneadh san fhoirm $\frac{a}{b}$, mar ar slánuimhreacha iad a agus b, agus nach nialas é b.

Ó tharla nach féidir le haon uimhir a bheith sa tacar cóimheasta agus sa tacar éagóimheasta araon, i dteannta a chéile is iad tacar na n-uimhreacha aiceanta, tacar na slánuimhreacha, tacar na n-uimhreacha cóimheasta agus tacar na n-uimhreacha éagóimheasta tacar **rannach** na Réaduimhreacha ($\mathbb{R}$).

Is léir go bhfuil $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Chomh maith leis sin, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = an tacar uimhreacha éagóimheasta.

Nóta: Ní uimhreacha éagóimheasta iad na fréamhacha cearnacha ar fad, m.sh. $\sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3$ srl.

Mar a léiríodh sa mhír ar shurdaí, is féidir uimhreacha éagóimheasta a shimpliú ach péire fachtóirí a fháil, agus fachtóir amháin ina shlánchearnóg.

M.sh. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Sampla 1

Simpligh gach ceann díobh seo a leanas, ag tabhairt do fhreagraí san fhoirm $a\sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

(i) $\sqrt{48} + \sqrt{75}$ (ii) $\sqrt{180} - \sqrt{20}$

(i)
$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$
$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$
$$\therefore \sqrt{48} + \sqrt{75} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

(ii)
$$\sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$$
$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$
$$\therefore \sqrt{180} - \sqrt{20} = 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Líne atá $\sqrt{2}$ ar fad a thógáil

Cé gur deachúil neamhchríochta é $\sqrt{2} = 1.414214...$ is féidir líne atá $\sqrt{2}$ ar fad a thógáil ar an uimhirlíne mar a thaispeántar sa sampla seo a leanas.

Sampla 2

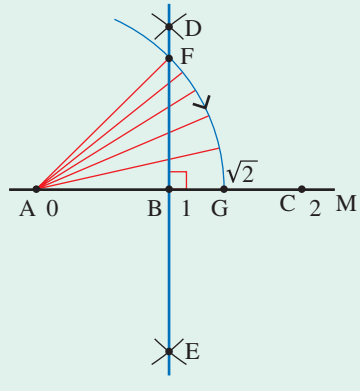
Gan ach compás agus corr dhíreach a úsáid, tóg mírlíne atá $\sqrt{2}$ ar fad agus uaidh sin marcáil $\sqrt{2}$ ar an uimhirlíne.

(i) Úsáid corr dhíreach chun mírlíne [AM] a tharraingt.

(ii) Ag tosú ag A, marcáil spásanna cothroma 0, 1, 2… (A, B, C) le compás.

(iii) Úsáid compás chun déroinnteoir ingearach a thógáil trí [AC], is é sin, tarraing líne ingearach trí B.

(iv) Ceangail D agus E.



(v) Marcáil an pointe F ar [DE] ionas go bhfuil |AB| = |BF|.

(vi) Úsáid A mar an lárphointe agus |AF| mar gha agus tarraing an stua FG chuig an uimhirlíne.

(vii) Marcáil G ar an uimhirlíne, $\sqrt{2}$.

Cruthúnas: Féach ar an triantán *ABF*:

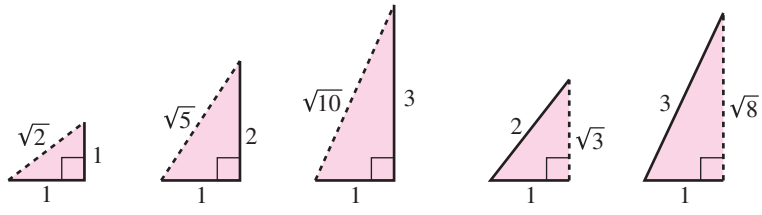
$|AB| = 1, |BF| = 1, ABF = 90^\circ$

Ag úsáid theoirim Phíotagarás: $|AF|^2 = |AB|^2 + |FB|^2$

$\therefore\ |AF|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\therefore\ |AF| = \sqrt{2} \Rightarrow |AG| = \sqrt{2}$

Nóta: Ach tógálacha den sórt céanna a úsáid, is féidir uimhreacha éagóimheasta eile a bhreacadh ar an uimhirlíne.



Sampla 3

Tóg mírline atá $\sqrt{3}$ ar fad ar an uimhirline.

(i) Marcáil pointe A ar líne dhíreach AB.

(ii) Úsáid compás chun spásanna cothroma |AJ| agus |JC| (atá 1 aonad araon) a mharcáil feadh AB.

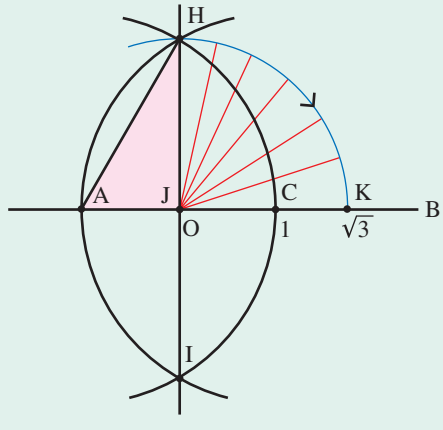
(iii) Úsáid A mar an lárphointe agus |AC| mar gha agus tarraing stua.

(iv) Úsáid C mar an lárphointe agus |CA| mar gha agus tarraing stua.

(v) Ceangail pointí trasnaithe na stuanna HI.

(vi) Ónár dteoirimí céimseatan, tá a fhios againn go bhfuil HI ingearach le AB agus go ndéroinneann sé [AC] ag J.

Féach ar an triantán AJH.



$|AJ| = 1, |AH| = 2, \angle AJH = 90^\circ$

$\therefore \quad |AH|^2 = |AJ|^2 + |JH|^2$ …ag úsáid theoirim Phíotagarás

$\therefore \quad 2^2 = 1^2 + |JH|^2$

$\therefore \quad 4 = 1 + |JH|^2$

$\therefore \quad 3 = |JH|^2 = >JH = \sqrt{3}$

Úsáid J mar an lárphointe agus $|JH|$ mar gha agus tarraing stua HK a dhéroinneann an líne chothrománach ag K. $|JK| = \sqrt{3}$

Cleachtadh 3.1

1. Trí fhachtóirí a fháil, agus ceann amháin ina shlánchearnóg, scríobh iad seo a leanas san fhoirm is simplí:

(i) $\sqrt{18}$ (ii) $\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt{45}$ (iv) $\sqrt{28}$

2. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas, ag tabhairt do fhreagraí san fhoirm $a\sqrt{b}, a, b \in \mathbb{Z}$.

(i) $\sqrt{18} + \sqrt{50}$ (ii) $\sqrt{48} + \sqrt{147}$

3. Más rud é gur tacar uimhreacha aiceanta é $\mathbb{N}$,
gur tacar slánuimhreacha é $\mathbb{Z}$,
gur tacar uimhreacha cóimheasta é $\mathbb{Q}$,
agus gur tacar réaduimhreacha é $\mathbb{R}$ tabhair dhá bhall de gach ceann de na tacair seo a leanas:

(i) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (ii) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ (iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4. Déan cur síos i bhfocail ar na tacair seo a leanas:

(i) $\mathbb{Z}$ (ii) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ (iii) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ (iv) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (v) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

5. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas, ag fágáil do fhreagraí san fhoirm $a\sqrt{b}, a, b \in \mathbb{Z}$:

(i) $\sqrt{125} - \sqrt{20}$ (ii) $\sqrt{32} - \sqrt{18} - \sqrt{8}$

(iii) $3\sqrt{8} + 5\sqrt{2}$ (iv) $4\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{3} - \sqrt{288}$

6. Úsáid compás agus corr dhíreach chun dhá mhírlíne atá 12 cm ar fad a thógáil. Marcáil gach mírlíne in *aonaid de 4 cm* (0, 1, 2, 3).

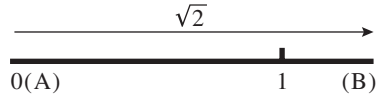
Ar na huimhirlínte sin, marcáil pointe

(i) $\sqrt{3}$ aonad ó 0 (ii) $\sqrt{2}$ aonad ó 0.

7. Scríobh $\sqrt{18}$ san fhoirm $a\sqrt{2}$ agus uaidh sin tarraing líne atá $\sqrt{18}$ ar fad.

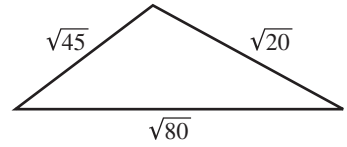
8. Scríobh $\sqrt{12}$ san fhoirm $a\sqrt{3}$ agus uaidh sin tarraing líne atá $\sqrt{12}$ ar fad.

9. Má thugtar mírlíne [AB] atá $\sqrt{2}$, ar fad, déan cur síos ar an gcaoi le mírlíne atá $\sqrt{3}$ar fad a thógáil gan ach compás agus corr dhíreach a úsáid.



10. Faigh fad imlíne an triantáin seo.

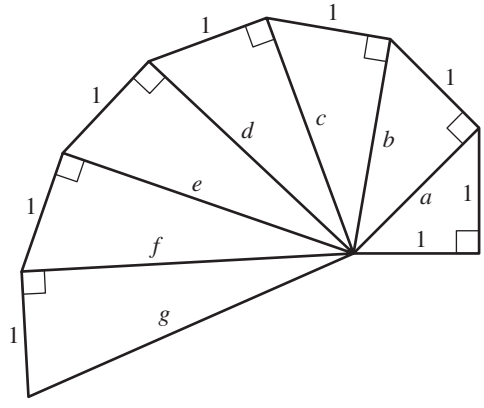
Bíodh do fhreagra san fhoirm $a\sqrt{b}, a, b \in \mathbb{N}$.



11. Cé acu díobh seo a leanas ar uimhreacha éagóimheasta iad:

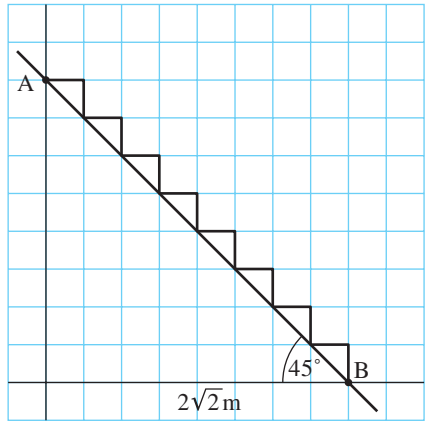
$\sqrt{3}$, π , $\frac{1}{3}$, e , 0 , $\sqrt[5]{2}$, $\frac{22}{7}$, $\sqrt{36}$

12. Faigh fad na sleasa a, b, c, d, e, f agus g.



Cé acu de na faid seo nach uimhir éagóimheasta é?

13. Tá uillinn 45° leis an gcothromán ag staighre.



Má tá bonn an staighre $2\sqrt{2}$ m, ar fad, mar a thaispeántar, faigh fad an chairpéid a theastaíonn chun an staighre a chlúdach ó A go B. Tabhair do fhreagra san fhoirm $a\sqrt{2}$.
Dá méadófaí uillinn an staighre go 60°, faigh amach cé mhéad cairpéad breise a theastódh.
Tabhair do fhreagra san fhoirm $2(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

14. (i) Scríobh síos luach amháin do x a d'fhágfadh an slonn $\sqrt{3 - x}$ cóimheasta.

(ii) Déan cur síos i bhfocail ar an tacar luachanna do x a d'fhágfadh an slonn $\sqrt{3 - x}$ cóimheasta.

Mír 3.2 Uimhreacha coimpléascacha

Chun cothromóid ar nós $x^2 - 9 = 0$ a réiteach, d'fhéadfaimis tabhairt faoi mar seo:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \sqrt{9} = \pm 3 \end{aligned}$$

Ach má tá $x^2 + 9 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 &= -9 \\ x &= \sqrt{-9} \end{aligned}$$

agus toisc nach bhfuil -9 ina thoradh ar aon réaduimhir atá iolraithe fúithi féin, ní féidir le haon réaduimhir an chothromóid seo a shásamh.

Chun déileáil le fréamh chearnach uimhreach diúltaí, cruthaítear uimhir nua $\sqrt{-1}$.
i a thugtar ar an uimhir sin.

Uaidh sin, $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times -1} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = \pm 3i.$

Ar an gcaoi chéanna, $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \times -1} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = \pm 4i$

agus $\sqrt{-5} = \sqrt{5 \times -1} = \sqrt{5} \times \sqrt{-1} = \pm\sqrt{5}i.$

$$i = \sqrt{-1}$$
$$\Rightarrow i^2 = -1$$

Uimhreacha samhailteacha a thugtar ar na fréamhacha cearnacha atá ag uimhreacha diúltacha agus scríobhtar san fhoirm bi iad, mar ar réaduimhir é b, m.sh. $3i$.

Sampla 1

Réitigh an chothromóid $x^2 + 25 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + 25 &= 0 \\ x^2 &= -25 \\ x &= \sqrt{-25} = \sqrt{25 \times -1} = \sqrt{25} \times \sqrt{-1} \\ x &= \pm 5i \end{aligned}$$

Sampla 2

Réitigh an chothromóid $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Nuair a úsáidtear foirmle na cothromóide cearnaí, tá $a = 1, b = 2, c = 2$.

Uaidh sin, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times -1}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$x = -1 \pm i$$

Dá bhrí sin, $x = -1 + i, -1 - i.$

Uimhreacha coimpléascacha a thugtar ar uimhreacha ar nós $-1 + i$ agus léirítear iad leis an litir z de ghnáth.

Tá dhá chuid (thoise) ag uimhir choimpléascach ar nós $z = 3 + 6i$: **cuid réadach** agus **cuid shamhailteach**.

Is é an chéad chuid den uimhir choimpléascach seo ná an tairiseach réadach 3.

Tá an dara cuid den uimhir choimpléascach seo samhailteach; an tairiseach réadach 6 iolraithe faoi i.

Tagraítear do 3 mar an chuid réadach agus scríobhtar mar **$\mathrm{Re}(z) = 3$** é.

Tagraítear do 6 mar an chuid shamhailteach agus scríobhtar mar **$\mathrm{Im}(z) = 6$** é.

Uimhir choimpléascach (z):
$z = x + iy$
$\mathrm{Re}(z) = x$ agus $\mathrm{Im}(z) = y$

Cuireann $\mathbb{C}$ an tacar uimhreacha coimpléascacha in iúl.

Uimhir choimpléascach (z)	Cuid réadach, $\mathrm{Re}(z)$	Cuid shamhailteach, $\mathrm{Im}(z)$
$4 + 3i$	4	3
$3 - i$	3	-1
-5	-5	0
$2i$	0	2
$3 - \sqrt{5}i$	3	$-\sqrt{5}$

Uimhreacha coimpléascacha a shuimiú agus a dhealú

Nuair atá uimhreacha coimpléascacha á suimiú nó á ndealú, suimímid (nó dealaímid) na codanna réadacha agus samhailteacha leo féin.

Mar shampla: (i)
$$\begin{aligned}(4 + 3i) + (3 - 2i) &= 4 + 3i + 3 - 2i \\ &= (4 + 3) + (3i - 2i) \\ &= 7 + i\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}(3 + 7i) - (4 - 5i) &= 3 + 7i - 4 + 5i \\ &= 3 - 4 + 7i + 5i \\ &= -1 + 12i\end{aligned}$$

Uimhreacha coimpléascacha a iolrú

Mar shampla: (i)
$$\begin{aligned}(3 + 5i)(4 - 3i) &= 3(4 - 3i) + 5i(4 - 3i) \\ &= 12 - 9i + 20i - 15i^2 \\ &= 12 - 9i + 20i - 15(-1) \\ &= 12 - 9i + 20i + 15 \\ &= 12 + 15 - 9i + 20i \\ &= 27 + 11i\end{aligned}$$

$i^2 = -1$

(ii)
$$\begin{aligned}(2 + 4i)(2 - 4i) &= 2(2 - 4i) + 4i(2 - 4i) \\ &= 4 - \cancel{8i} + \cancel{8i} - 16i^2 \\ &= 4 - 16(-1) \\ &= 20\end{aligned}$$

Sampla 3

Má tá $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$ agus $z_3 = 1 + 5i$, sloinn gach ceann de na huimhreacha coimpléascacha seo a leanas san fhoirm $a + bi$.

(i) $z_1 + z_3$ (ii) $z_2.z_3$ (iii) $z_1(z_2 + z_3)$

(i) $z_1 + z_3 = 2 + 3i + 1 + 5i$
$= 2 + 1 + 3i + 5i = 3 + 8i$

(ii) $z_2.z_3 = (3 - 4i)(1 + 5i)$
$= 3 + 15i - 4i - 20i^2$
$= 3 + 20 + 15i - 4i = 23 + 11i$

(iii) $z_1(z_2 + z_3) = (2 + 3i)(3 - 4i + 1 + 5i)$
$= (2 + 3i)(4 + i)$
$= 8 + 2i + 12i + 3i^2$
$= 8 - 3 + 2i + 12i$ $\quad \ldots + 3i^2 = -3$
$= 5 + 14i$

Cleachtadh 3.2

1. Scríobh gach ceann de na huimhreacha seo a leanas i dtéarmaí i:

(i) $\sqrt{-4}$ (ii) $\sqrt{-36}$ (iii) $\sqrt{-27}$ (iv) $\sqrt{-20}$

2. Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo a leanas, ag tabhairt do fhreagraí san fhoirm bi, mar ar réaduimhir é b.

(i) $x^2 + 9 = 0$ (ii) $x^2 + 12 = 0$

3. Sloinn gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm $a + bi$:

(i) $(3 + 2i) + (5 - i)$ (ii) $(7 - 2i) + (3 - 4i)$ (iii) $(-3 + 4i) + (6 - 4i)$
(iv) $(-3 - i) + (-2 + 6i)$ (v) $(5 - 3i) + (-5 + 6i)$ (vi) $(1 + i) + (2 - 3i)$

4. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $(2 + 6i) - (1 + 4i)$ (ii) $(3 - 5i) - (2 + 4i)$ (iii) $(4 - 7i) - (-1 + 3i)$
(iv) $3 - (1 + 4i)$ (v) $(3 - 6i) - 4i$ (vi) $(-3 - 2i) - (4 - 7i)$

5. Iolraigh gach ceann de na huimhreacha coimpléascacha seo a leanas agus tabhair do fhreagraí san fhoirm $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $(3 + 2i)(2 + 3i)$ (ii) $(4 + i)(3 - 5i)$ (iii) $(5 - 2i)(3 - 5i)$
(iv) $(3 + 4i)(3 - 4i)$ (v) $(5 - i)(5 + i)$ (vi) $(3 - 2i)^2$

6. Má tá $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = 3 - i$ agus $z_3 = 4 - 2i$, sloinn gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) $3z_1$ (ii) $z_2 + z_3$ (iii) $2z_1 + z_2$ (iv) $-3z_2$
(v) $z_1.z_2$ (vi) $z_2.z_3$ (vii) $i(z_3)$ (viii) $z_2(z_1 - z_2)$

7. Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo a leanas le foirmle na cothromóide cearnaí agus tabhair do fhreagraí san fhoirm $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(i) $x^2 - 2x + 17 = 0$ (ii) $x^2 - 4x + 13 = 0$
(iii) $x^2 - 10x + 26 = 0$ (iv) $x^2 - 8x + 52 = 0$

8. Réitigh an chothromóid $2z^2 - 8z + 9 = 0$.

9. Críochnaigh an tábla, má tá $i = \sqrt{-1}$ agus $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned}
i &= i^1 = i \\
i \times i &= i^2 = -1 \\
i \times i \times i &= i^3 = \\
i \times i \times i \times i &= i^4 = \\
i \times i \times i \times i \times i &= i^5 = \\
i \times i \times i \times i \times i \times i &= i^6 =
\end{aligned}$$

Déan cur síos ar an bpatrún a chruthaíonn an seicheamh seo.

Cén straitéis a d'fhéadfaí a úsáid chun i^n, $n \in \mathbb{N}$? [m.sh., i^{32}.]

10. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas:

(i) i^{30} (ii) i^{11} (iii) i^{19} (iv) i^{21} (v) i^{-4}

11. Simpligh iad seo a leanas:

(i) $i^{16} + i^{10} + i^6 - i^{12}$ (ii) $i^3 - i^{11} + i^{17} - i^{29}$

12. Simpligh iad seo a leanas:

(i) $i^2.i^6.i^5$ (ii) $3i^3.2i^5.4i^2$ (iii) $(2i^7)^3$

13. Scríobh $4i^3 + 7i^9$ san fhoirm bi mar a bhfuil $b \in \mathbb{Z}$.

Mír 3.3 Uimhreacha coimpléascacha a roinnt

Is féidir uimhreacha coimpléascacha a roinnt ar réaduimhir mar seo a leanas.

$$\frac{2 + 5i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{5}{2}i = 1 + \frac{5}{2}i$$

Chun uimhir choimpléascach a roinnt ar uimhir choimpléascach eile, caithfimid an t-ainmneoir a athrú go réaduimhir trí **chomhchuingeach coimpléascach** a úsáid.

Comhchuingeach coimpléascach

Má thógtar aon uimhir choimpléascach $z = a + bi$, ansin is é comhchuingeach coimpléascach z ná $a - bi$. Is mar seo a scríobhtar an comhchuingeach coimpléascach: $\overline{z}$

Mar shampla, má tá $z = 3 + 4i$,

ansin tá $\overline{z} = 3 - 4i$, mar ar comhchuingeach coimpléascach z é $\overline{z}$.

Toradh $z.\bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i)$

$= 9 - \cancel{12}i + \cancel{12}i - 16i^2$

$= 9 + 16$

$= 25$, réaduimhir

Comhchuingeach coimpléascach: Má tá $z = a + bi$,

ansin tá $\bar{z} = a - ib$ agus $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi)$

$= a^2 + b^2$

Nóta:

z	$\bar{z}$
$3 + 7i$	$3 - 7i$
$2 - 4i$	$2 + 4i$
$-3 + i$	$-3 - i$
$+4i$	$-4i$

Tríd an gcomhchuingeach coimpléascach a úsáid, féadaimid uimhreacha coimpléascacha a roinnt mar a thaispeántar sa sampla seo a leanas.

Sampla 1

Sloinn $\dfrac{3 + 4i}{2 - 5i}$ san fhoirm $a + bi$.

$$\frac{3 + 4i}{2 - 5i} = \frac{3 + 4i}{2 - 5i} \times \frac{2 + 5i}{2 + 5i}$$

$$= \frac{6 + 15i + 8i + 20i^2}{4 + \cancel{10}i - \cancel{10}i - 25i^2}$$

$$= \frac{6 + 23i - 20}{4 + 25} \quad \text{...ó tharla go bhfuil } i^2 = -1$$

$$= \frac{-14 + 23i}{29} = -\frac{14}{29} + \frac{23i}{29}$$

Uimhreacha coimpléascacha a bheith cothrom

Má tá dhá uimhir choimpléascacha le bheith cothrom, caithfidh a gcodanna réadacha a bheith cothrom agus caithfidh a gcodanna samhailteacha a bheith cothrom.

Má tá $(x + 2) + 4i = 6 + (y - 2)i$,

tá $x + 2 = 6$ agus $4 = y - 2$

$\Rightarrow x = 4$ agus $6 = y$

Má tá $a + bi = x + yi$,

tá $a = x$ agus $b = y$

Sampla 2

Faigh x agus y má tá $x + 2i + 2(3 - 5yi) = 8 - 13i$.

$$x + 2i + 2(3 - 5yi) = 8 - 13i$$
$$\Rightarrow \quad x + 2i + 6 - 10yi = 8 - 13i$$
$$\Rightarrow \quad x + 6 + (2 - 10y)i = 8 - 13i$$

Cothromaímid na codanna réadacha:

$$x + 6 = 8$$
$$x = 2$$

Cothromaímid na codanna samhailteacha:

$$2 - 10y = -13$$
$$-10y = -15$$
$$10y = 15$$
$$y = \tfrac{15}{10} = \tfrac{3}{2}$$

Sampla 3

Má tá $(z + 1)(2 - i) = 3 - 4i$, faigh z san fhoirm $x + yi$, mar a bhfuil $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(z + 1)(2 - i) = 3 - 4i$$
$$\Rightarrow \quad z + 1 = \frac{3 - 4i}{2 - i} \times \frac{2 + i}{2 + i}$$
$$= \frac{3 - 4i}{2 - i} \times \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{6 + 3i - 8i - 4i^2}{4 + \cancel{2i} - \cancel{2i} - i^2}$$
$$= \frac{10 - 5i}{5}$$
$$z + 1 = 2 - i$$
$$\therefore \quad z = 2 - i - 1$$
$$= 1 - i$$

Sampla 4

Sloinn $\sqrt{5 + 12i}$ san fhoirm $a + bi$, mar a bhfuil $a, b \in \mathbb{R}$.

Bíodh $a + bi = \sqrt{5 + 12i}$

$$(a + bi)^2 = 5 + 12i$$
$$\Rightarrow a^2 + 2abi + b^2i^2 = 5 + 12i$$
$$\Rightarrow \quad a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$$

$\therefore \quad a^2 - b^2 = 5$ agus $2ab = 12$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{12}{2b} = \frac{6}{b}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{6}{b}\right)^2 - b^2 = 5$$

$$6^2 - b^4 = 5b^2$$

$$\Rightarrow \quad b^4 + 5b^2 - 36 = 0$$

$$(b^2 + 9)(b^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 = -9 \quad \text{nó} \quad b^2 = 4$$

$$b = \sqrt{-9} \qquad b = \pm 2$$

$$b = \pm 3i$$

Ó tharla go bhfuil $a = \frac{6}{b}$, nuair atá $b = +2, a = \frac{6}{2} = 3$

[Nóta: $b \neq 3i$ ó tharla go bhfuil $b \in \mathbb{R}$]

nuair atá $b = -2, a = \frac{6}{-2} = -3$

$$\therefore \quad \sqrt{5 + 12i} = (3 + 2i) \quad \text{nó} \quad (-3 - 2i)$$

Cleachtadh 3.3

1. Scríobh síos comhchuingeach coimpléascach na n-uimhreacha coimpléascacha seo a leanas.

(i) $3 + 4i$ (ii) $2 - 6i$ (iii) $-5 - 2i$ (iv) $-8 + 3i$

2. Tugtar z, mar sin faigh $\overline{z}$ sna cásanna seo a leanas.

(i) $z = 2 + 5i$ (ii) $z = -3 - 4i$ (iii) $z = 1 + 7i$ (iv) $z = -5 + i$

3. Sloinn gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm $a + bi$, mar a bhfuil $a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $\frac{2 + 3i}{4 - i}$ (ii) $\frac{4 + 3i}{5 + i}$ (iii) $\frac{8 - i}{2 + 3i}$ (iv) $\frac{2 + 5i}{-3 + 2i}$

4. Má tá $z = 2 + 6i$, sloinn gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm $a + bi$, mar a bhfuil $a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $z.\overline{z}$ (ii) $z + \overline{z}$ (iii) $z - \overline{z}$ (iv) z^2

5. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas.

(i) $\frac{(3 + 4i) + (2 + i)}{4 - i}$ (ii) $\frac{(2 - 6i) - (3 + 2i)}{2 + 2i}$

(iii) $\frac{3(2 + 4i)}{5i}$ (iv) $\frac{(2 + i) + (3 - 2i)}{(4 + i) - (3 + 2i)}$

(v) $\frac{(3 + 2i)(1 - i)}{2 + 4i}$ (vi) $\frac{(3 + i)(2 - i)}{(4 + i)(2 + i)}$

6. Faigh luach x agus luach y i ngach ceann díobh seo a leanas:

(i) $x + yi = 4 - 2i$ (ii) $x + yi = (2 + i)(3 - 2i)$

(iii) $x + yi = \frac{7 + i}{2 - i}$ (iv) $x + yi = (2 - 3i)^2$

7. Faigh luach a agus luach b i ngach ceann díobh seo a leanas:

(i) $a + bi + 3 - 2i = 4(-2 + 5i)$

(ii) $a(1 + 2i) - b(3 + 4i) = 5$

8. Má tá $z = x + yi$ agus $3(z - 1) = i(3 + \mathrm{i})$, faigh luach x agus luach y.

9. Más dhá uimhir choimpléascacha iad $z_1 = -3 + 4i$ agus $z_2 = 1 + 2i$ agus má tá $z_1 + (p + iq)z_2 = 0$ mar a bhfuil $p, q \in \mathbb{R}$, faigh luach p agus luach q.

Nod: $0 = 0 + 0i$

10. Má tá $z = \sqrt{3 + 4i}$, faigh z san fhoirm $a \pm bi$, mar a bhfuil $a, b \in \mathbb{R}$.

11. Má tá $(x + iy)^2 = 8 - 6i$, faigh luach x agus luach y, $x, y \in \mathbb{R}$.

12. Sloinn gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $\sqrt{-12 - 16i}$ (ii) $\sqrt{-15 + 8i}$ (iii) $\sqrt{9 - 40i}$

13. Má tá $z_1 = 2 + 3i$ agus $z_2 = -1 + 5i$, faigh

(i) $\overline{z_1 + z_2}$ (ii) $\overline{z_1 z_2}$

Mír 3.4 Léaráid Argand – Modal

Tugann an **léaráid Argand** léiriú céimseatúil d'uimhir choimpléascach mar phointe ar an bplána coimpléascach.

Is féidir réaduimhreacha a bhreacadh ar uimhirlíne amháin ach i gcás uimhreacha coimpléascacha, a bhfuil dhá chuid - cuid réadach agus cuid shamhailteach - acu, teastaíonn plána pointí chun iad a léiriú.

Tá an plána coimpléascach cosúil leis an bplána Cairtéiseach, leis an gcuid réadach $\mathrm{Re}(z)$ den uimhir choimpléascach á léiriú ag an x-ais agus an chuid shamhailteach $\mathrm{Im}(z)$ á léiriú ag an y-ais.

Sa léaráid seo tá na huimhreacha coimpléascacha a leanas breactha againn:

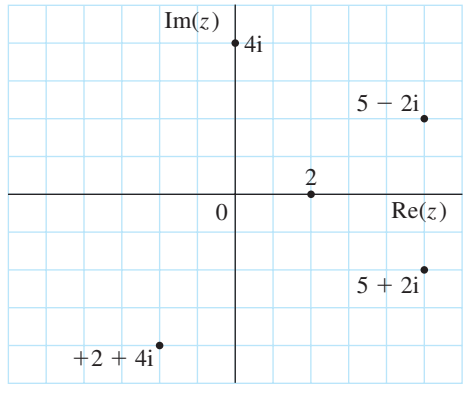
(i) $z_1 = 5 + 2i$

(ii) $z_2 = 0 + 4i = 4i$

(iii) $z_3 = 2 + 0i = 2$

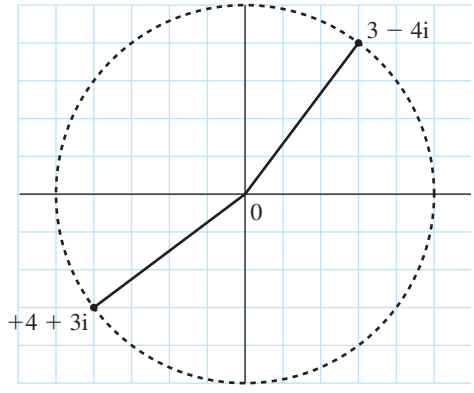
(iv) $z_4 = -2 - 4i$

(v) $\overline{z}_1 = 5 - 2i$



Modal uimhreach coimpléascaí

Ciallaíonn **modal** uimhreach coimpléascaí an fad ón mbunphointe go dtí an pointe ar an bplána a léiríonn an uimhir.



Tugtar modal $z_1 = 3 + 4i$ mar seo:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

Tabhair faoi deara gurb é modal $z_2 = -4 - 3i$:

$$|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 9}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

Má tá $z = a + bi$, is mar seo a scríobhtar modal z $(= |z|)$:

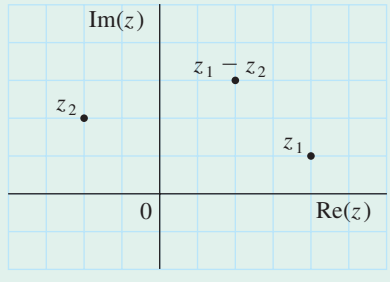
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Taispeánann sé seo go bhfuil modail chothroma ag $3 + 4i$ agus $-4 - 3i$ agus uaidh sin go bhfuil siad ar imlíne an chiorcail chéanna.

Sampla 1

Má tá $z_1 = 4 + i$ agus $z_2 = -2 + 2i$, breac iad seo a leanas ar léaráid Argand:

$$0, z_1, z_2 \text{ agus } (z_1 + z_2).$$



Chomh maith leis sin, ríomh $|z_1|$, $|z_2|$ agus $|z_1 + z_2|$.

An bhfuil $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$?

$$z_1 = 4 + i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{4^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{17}$$

$$z_2 = -2 + 2i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 4}$$
$$= \sqrt{8}$$

$$z_1 + z_2 = 4 + i + (-2 + 2i)$$
$$= 2 + 3i$$
$$|z_1 + z_2| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow |z_1| + |z_2| = \sqrt{17} + \sqrt{8}$$
$$|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow |z_1| + |z_2| \neq |z_1 + z_2|.$$

Cleachtadh 3.4

1. Breac gach ceann de na huimhreacha coimpléascacha seo a leanas ar léaráid Argand:

(i) $z_1 = 3 + 5i$ (ii) $z_2 = -3 + i$ (iii) $z_3 = 5i$ (iv) $z_4 = -1 - 3i$

2. Má tá $z_1 = 2 + \text{i}$ agus $z_2 = -4 + 3i$, breac na huimhreacha seo a leanas ar léaráid Argand:

(i) z_1 (ii) z_2 (iii) $\overline{z}_1$ (iv) $\overline{z}_2$

(v) $z_1 + z_2$ (vi) $z_1 - z_2$ (vii) $z_1 z_2$ (viii) $\dfrac{z_1}{z_2}$

3. Má tá $z_1 = 3 - \text{i}$ agus $z_2 = 2 + 4i$, breac na huimhreacha seo a leanas ar léaráid Argand:

(i) $z_1.\overline{z}_1$ (ii) $z_1 + \overline{z}_1$ (iii) $\dfrac{1}{z_1}$ (iv) $z_1 z_2$

4. (a) Má tá $z_1 = 3 + \text{i}$ agus $z_2 = -1 + 3i$, breac na huimhreacha z_1, z_2 agus $z_1 + z_2$ ar léaráid Argand. Ceangail na pointí 0, z_1, z_2, agus $z_1 + z_2$.

(b) Má tá $z_3 = 2 - 2i$ agus $z_4 = -1 - 4i$, breac na huimhreacha z_3, z_4 agus $z_3 + z_4$ ar léaráid Argand. Ceangail na pointí 0, z_3, z_4, agus $z_3 + z_4$.

(c) Cén tuairim chéimseatúil is féidir leat a thabhairt faoin ngaol idir 0, z_1, z_2, agus $z_1 + z_2$?

5. Má tá $z = 1 + 3i$, breac gach ceann de na huimhreacha coimpléascacha seo a leanas ar léaráid Argand:

(i) 2 (ii) $2 + z$ (iii) $3i$ (iv) $3i + z$

(v) $1 + i$ (vi) $1 + i + z$ (vii) $3i + z$ (viii) $-2 - i + z$

Cén tuairim chéimseatúil is féidir a thabhairt faoin uimhir choimpléascach chéanna z a shuimiú le huimhreacha coimpléascacha eile?

6. Má tá $z = 3 + 2i$, faigh gach ceann de na huimhreacha coimpléascacha seo a leanas san fhoirm $a + bi$:

(i) iz (ii) $i^2 z$ (iii) $i^3 z$

Breac na huimhreacha coimpléascacha z, iz, $i^2 z$, $i^3 z$.

7. Faigh modal na n-uimhreacha coimpléascacha seo a leanas:

(i) $5 + 2i$ (ii) $4 - 2i$ (iii) $-2 - 4i$ (iv) $-3 + i$

8. Breac an uimhir $z_1 = 2 + 5i$.

Scríobh síos trí uimhir choimpléascacha dhifriúla a bhfuil an modal céanna le z_1 acu.

9. Faigh luach gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\left|\dfrac{3 + i}{-2 - 3i}\right|$ (ii) $|(4 + 2i)(3 - i)|$ (iii) $\left|\dfrac{1}{3 + 5i}\right|$

10. Má tá $z_1 = -2 - 3i$ agus $z_2 = 3 + \text{i}$, faigh an uimhir choimpléascach $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Imscrúdaigh an bhfuil $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

11. Tá na huimhreacha coimpléascacha u, v agus w gaolta mar gheall ar an gcothromóid

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}.$$

Má tá $v = 3 + 4i$ agus $w = 4 - 3i$, faigh u san fhoirm $x + yi$.

12. Má tá $z = 4 - 2i$, faigh $|z|$, $|2z|$ agus $|3z|$. An bhfuil $2|z| = |2z|$?
Mínigh do fhreagra.

13. Imscrúdaigh an bhfuil $|z| = |\overline{z}|$ i gcás gach $z \in \mathbb{C}$.

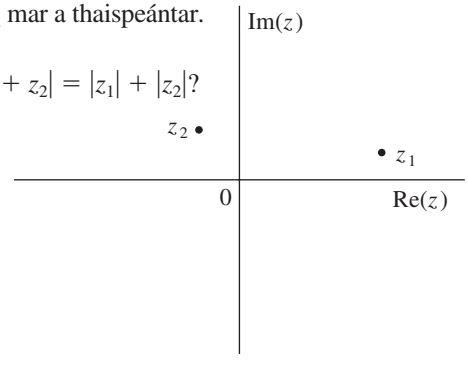
14. Bíodh $z_1 = s + 8i$ agus $z_2 = t + 8i$, mar a bhfuil $s, t \in \mathbb{R}$ agus $i^2 = -1$.

(i) Má tá $|z_1| = 10$, faigh luach s.
(ii) Má tá $|z_2| = 2|z_1|$, faigh luach t.

15. Faigh modal $\dfrac{i}{1 - i}$.

16. Déan cur síos ar an tacar réiteach do $|z - 1||z - 1| = 1$.

17. Tugtar dhá uimhir choimpléascacha ar bith z_1 agus z_2 mar a thaispeántar.
Léirigh z_1, z_2 agus $(z_1 + z_2)$ ar léaráid Argand.
Cé na coinníollacha a theastódh ionas go mbeadh $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?



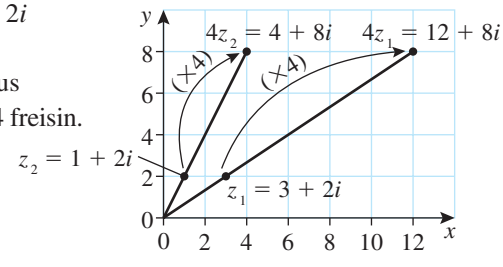
TFC: Úsáid bogearraí ríomhaireachta ar nós GeoGebra chun ceist 17 a imscrúdú. Tóg an y-ais mar an ais shamhailteach. Úsáid feidhm an pholagáin chun 0, z_1, z_2 agus $(z_1 + z_2)$ a bhreacadh mar chomhthreomharán. Trí $(z_1 + z_2)$ a bhogadh, imscrúdaigh na coinníollacha a theastódh ionas go mbeadh $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

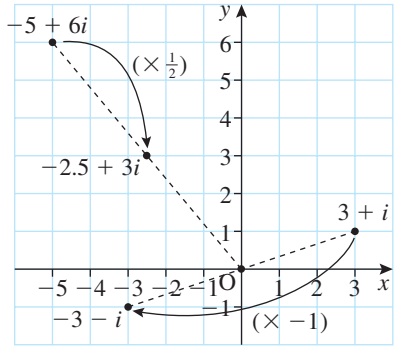
Mír 3.5 Claochluithe uimhreacha coimpléascacha

1. Uimhir choimpléascach a iolrú faoi réaduimhir

Má iolraítear an uimhir choimpléascach $z_1 = 3 + 2i$ faoi 4, faighimid $4z_1 = 4(3 + 2i) = 12 + 8i$.
Méadaítear an chuid réadach de réir fachtóir 4 agus méadaítear an chuid shamhailteach de réir fachtóir 4 freisin.

Is cosúil go bhfuil an uimhir choimpléascach **rite** feadh líne ón mbunphointe de réir fachtóir 4.
Mar shampla, mapáiltear $3 + 2i$ ar $12 + 8i$.





Má iolraítear an uimhir choimpléascach faoi $\frac{1}{2}$, tarlaíonn **crapadh**.
Mar shampla, mapáiltear (-5 + 6i) ar $-2.5 + 3i$.

Má iolraítear faoi (-1) **athraítear an treo**, is é sin, frithchaitear an uimhir tríd an mbunphointe. Mar shampla, mapáiltear $(3 + i)\ x\ (-1)$ ar $-3 - i$.

Má tá $z = x + iy$, tá na torthaí seo a leanas ag an gclaochlú az:

(i) $|a| > 1$, ríochan ón mbunphointe mar thoradh air
(ii) $0 < |a| < 1$, crapadh i dtreo an bhunphointe mar thoradh air
(iii) $a < 0$, frithchaitear az sa bhunphointe agus rítear nó craptar é mar atá in (i) nó in (ii)

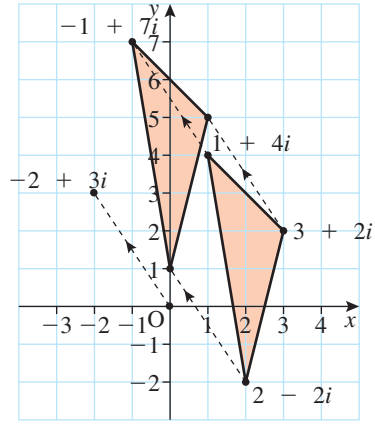
2. Uimhreacha coimpléascacha a shuimiú

(i) Nuair a shuimítear uimhir choimpléascach z ar leithligh le huimhreacha coimpléascacha eile $-\ z_1, z_2, z_3\ -$ cruthaíonn sé **aistriú de chuid an phlána**.

Bíodh $z = -2 + 3i$
agus $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = 1 + 4i,\ z_3 = 2 - 2i.$

Ansin $z + z_1 = -2 + 3i + 3 + 2i = 1 + 5i$
$z + z_2 = -2 + 3i + 1 + 4i = -1 + 7i$
$z + z_3 = -2 + 3i + 2 - 2i = i$

Tabhair faoi deara go n-aistríonn an uimhir choimpléascach z_1 go $z_1 + z$.



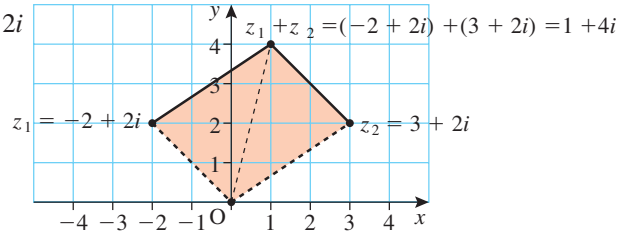
Aistriú a mhapálann $z_1 \longrightarrow z_1 + z$

(ii) Nuair a shuimítear z_1 le z_2 chun an uimhir choimpléascach nua $(z_1 + z_2)$ a chruthú, cruthaíonn na trí uimhir choimpléascacha comhthreomharán leis an mbunphointe $(0 + 0i)$.

Bíodh $z_1 = -2 + 2i$ agus $z_2 = 3 + 2i$,

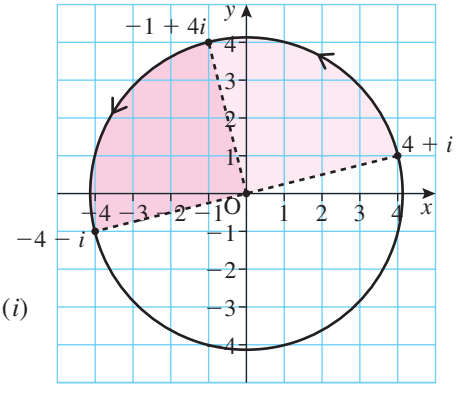
ansin $z_1 + z_2 = -2 + 2i + 3 + 2i$
$= 1 + 4i$.

Cruthaíonn $0 + 0i$, $-2 + 2i$, $3 + 2i$ agus $1 + 4i$ comhthreomharán, mar a thaispeántar.



3. Uimhreacha coimpléascacha a iolrú

(i) Nuair a iolraítear uimhir choimpléascach ar nós $4 + i$ faoi i, déantar an uimhir choimpléascach a **rothlú ceathrú casaidh tuathal thart ar an mbunphointe**.



Mar shampla, $(4 + i).i = 4i + i^2$
$= 4i - 1$
$= -1 + 4i$
… rothlú 90°

Chomh maith leis sin, $(4 + i)(i^2) = (4 + i)(i)(i)$
$(-1 + 4i)(i) = -i + 4i^2$
$= -i - 4$
$= -4 - i$
… rothlú 180°

Nóta: $(-4 - i)(-i) = +4i + i^2$
$= +4i - 1$
$= -1 + 4i$
… rothlú $-90°$

$z \times i$, rothlaíonn z 90°
$z \times (i)^2$, rothlaíonn z 180°
$z \times (i)^3$, rothlaíonn z 270°
$z \times (i)^4$, rothlaíonn z 360°
$z \times (-i)$, rothlaíonn z (-90°)

(ii) Nuair a iolraítear $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ faoi $z_2 = 3 + \mathrm{i}$, is féidir an toradh a fheiceáil mar chumasc de chlaochlú rite agus de chlaochlú rothlaithe mar seo a leanas:

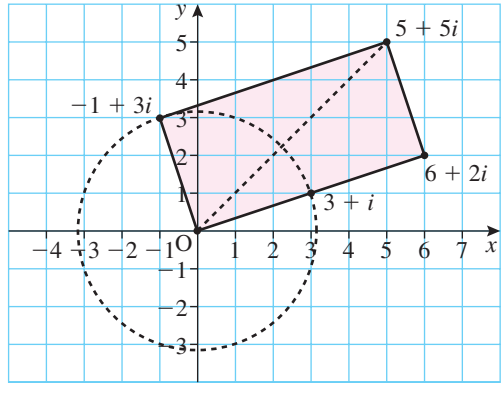
$z_1 z_2 = (2 + i)(3 + i)$
$= 2(3 + i) + i(3 + i)$

Cruthaíonn $2(3 + i)$ **éifeacht rite** ó $(3 + i)$ go $6 + 2i$.

Cruthaíonn $i(3 + i)$ **rothlú** 90° ó $(3 + i)$ go $-1 + 3i$.

$2(3 + i) + i(3 + i) = 6 + 2i + 3i - 1$
$= 5 + 5i$

Cumasc den dá chlaochlú é seo.



Sampla 1

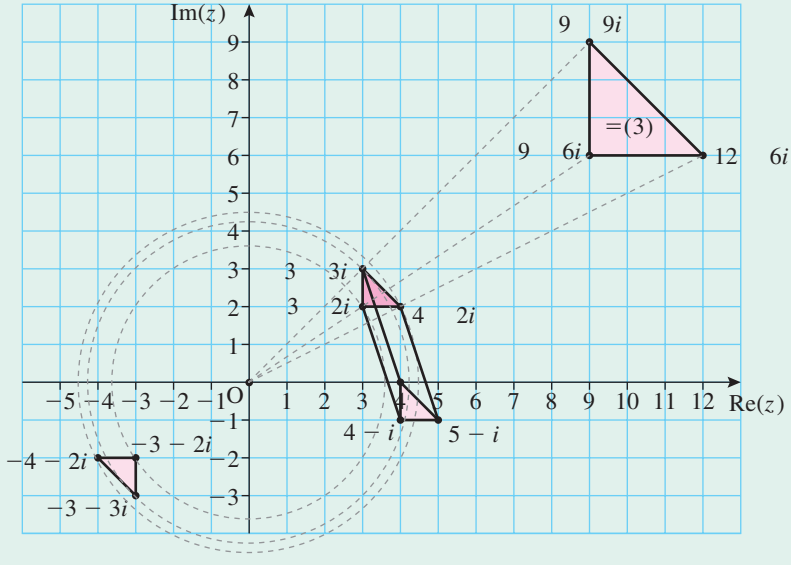
(i) Breac na huimhreacha coimpléascacha $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 + 3i$, $z_3 = 4 + 2i$ ar an léaráid Argand.

(ii) Úsáid na haiseanna céanna chun na huimhreacha coimpléascacha $3z_1$, $3z_2$ agus $3z_3$ a bhreacadh.

(iii) Breac an rothlú $z_1(i)^2, z_2(i)^2$ agus $z_3(i)^2$.

(iv) Íomhánna de z_1, z_2, z_3 tríd an aistriú $a + bi$ iad na huimhreacha coimpléascacha $4 - i$, 4, $5 - i$. Faigh luach a agus luach b.

(i)



(ii) Má tá $z_1 = 3 + 2i$, $3z_1 = 9 + 6i$

Má tá $z_2 = 3 + 3i$, $3z_2 = 9 + 9i$

Má tá $z_3 = 4 + 2i$, $3z_3 = 12 + 6i$

(iii) $z_1(i)^2 = (3 + 2i)(-1) = -3 - 2i$

$z_2(i)^2 = (3 + 3i)(-1) = -3 - 3i$

$z_3(i)^2 = (4 + 2i)(-1) = -4 - 2i$

(iv)
$$\begin{aligned} z_1 + a + bi &= 4 - i \\ a + bi &= 4 - i - z_1 \\ a + bi &= 4 - i - (3 + 2i) \\ &= 1 - 3i \\ \Rightarrow \quad a &= 1, b = -3 \end{aligned}$$

[Ag seiceáil $z_3 : 4 + 2i + (1 - 3i) = 5 - i$ … atá ceart.]

Sampla 2

Déan cur síos ar an gclaochlú i ngach ceann díobh seo a leanas:

(i) $z_1, z_2 \longrightarrow z_3, z_4$

(ii) $z_1, z_2 \longrightarrow z_5, z_6$

Réiteach:

(i) $z_1, z_2 \longrightarrow z_3, z_4$

crapadh $\frac{1}{2}$

$\therefore \quad z_3 = \left(\frac{1}{2}\right) z_1$

(ii) $z_1, z_2 \longrightarrow z_5, z_6$

rothlú 90° deiseal

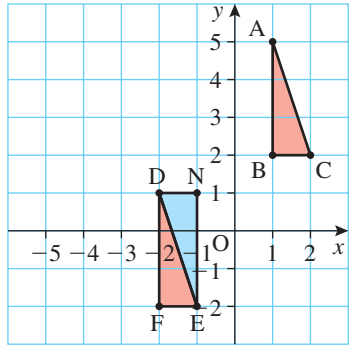
$\therefore \quad z_5 = (-i)\, z_1$

Cleachtadh 3.5

1. Breac na huimhreacha coimpléascacha $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 4 - i$ ar léaráid Argand.
Ar an léaráid chéanna, breac na huimhreacha coimpléascacha $3z_1$, $3z_2$, $3z_3$.

2. Má tá $z_1 = 2 - i$, breac na huimhreacha coimpléascacha $3z_1$, $3z_1$, $4z_1$ agus $-2z_1$ ar an léaráid Argand chéanna.
Sonraigh an ghné atá i bpáirt ag na pointí z_1, $3z_1$, $4z_1$ agus $-2z_1$ ar fad.
Déan cur síos ar an éifeacht atá ag iolrú, faoi réaduimhir, ar na huimhreacha coimpléascacha seo.

3. Scríobh síos na huimhreacha coimpléascacha a léiríonn na litreacha A, B, C, D, E, F, N.



(i) Cén claochlú sa phlána coimpléascach a bhogann an triantán ABC ar DEF?

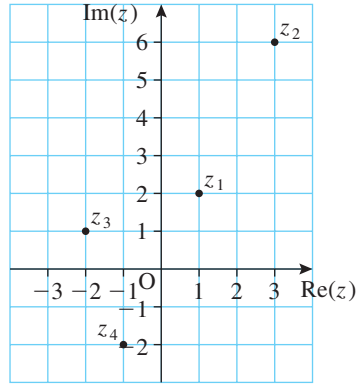
(ii) Déan cóip den léaráid seo agus cuir íomhá ABC faoin gclaochlú (ABC)(i) in iúl.

(iii) Cén rothlú agus claochlú ina dhiaidh a theastaíonn chun ABC a chlaochlú ar DEN?

4. Breac na huimhreacha coimpléascacha $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 7 + 2i$, $z_3 = 5 + 5i$.
Má tá $w = -3 - 4i$, breac na huimhreacha coimpléascacha $z_1 + w$, $z_2 + w$, $z_3 + w$.
Sonraigh an claochlú a chruthaítear anseo.

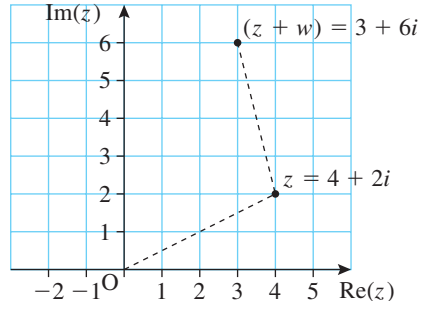
5. Breac na huimhreacha coimpléascacha (i) $z_1 = 6 - 2i$ (ii) $z_2 = (z_1)i$ (iii) $z_3 = (z_1)i^2$.
Cén claochlú a chruthaíonn an t-iolrú seo?

6. Má tá
(i) $z_2 = a\,z_1$, faigh luach a
(ii) $z_3 = b\,z_1$, faigh luach b
(iii) $z_4 = c\,z_1$, faigh luach c.



7. Déan cóip den léaráid seo agus breac an uimhir choimpléascach w.

Breac an uimhir choimpléascach $-w$, agus uaidh sin breac an uimhir choimpléascach $z - w$.

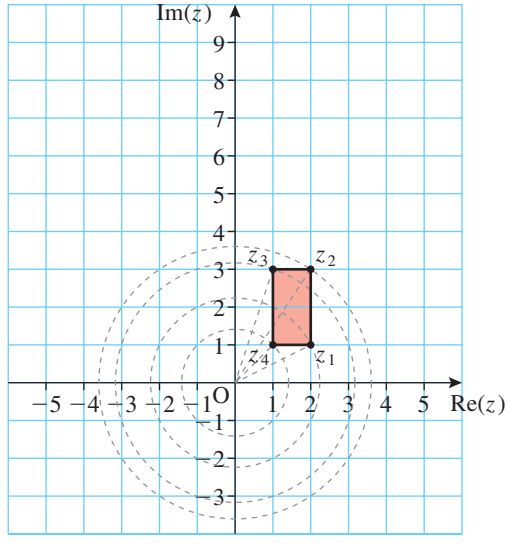


8. Déan cur síos ar gach ceann de na claochluithe seo a leanas ar an bplána coimpléascach.
(i) $z \longrightarrow z + k$, mar a bhfuil $k = a + bi$.
(ii) $z \longrightarrow k\,z$, mar a bhfuil $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.
(iii) $z \longrightarrow k\,z$, mar a bhfuil $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$.

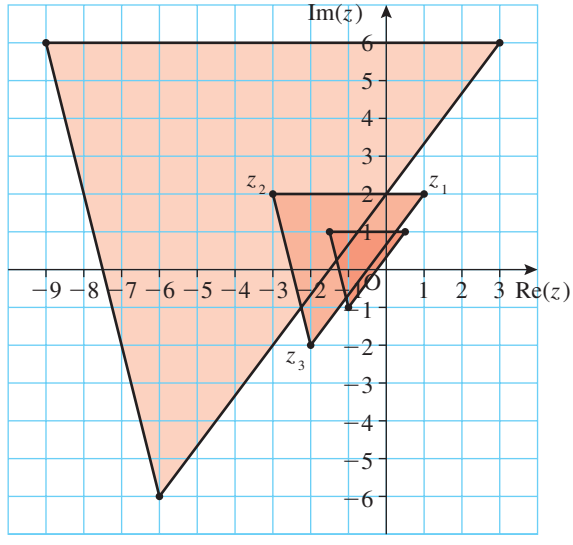
9. Seasann na huimhreacha z_1, z_2, z_3, z_4 do dhronuilleog ar an bplána coimpléascach.

Déan cóip den léaráid seo agus marcáil íomhá na dronuilleoige seo ar an léaráid faoi na claochluithe seo a leanas

(i) $z \longrightarrow 2\,z$,
(ii) $z \longrightarrow (i)\,z$
(iii) $z \longrightarrow (2 + i)\,z$



10. Taispeántar sa léaráid triantán a chruthaíonn na huimhreacha coimpléascacha z_1, z_2, z_3.



Déan cur síos ar na claochluithe a theastaíonn chun na triantáin eile a chruthú.

Mír 3.6 Teoirim na bhfréamhacha comhchuingeacha

Nuair atáthar ag plé le huimhreacha coimpléascacha, úsáidtear z in áit x mar athróg de ghnáth. Ansin bíonn an chothromóid chearnach san fhoirm $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$.

Féach ar an gcothromóid chearnach $z^2 + 2z + 2 = 0$.

Agus foirmle na cothromóide cearnaí in úsáid, tá $a = 1$, $b = 2$ agus $c = 2$.

$$\Rightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Is iad fréamhacha na cothromóide seo $z_1 = -1 + \mathrm{i}$ agus $z_2 = -1 - i$.
Tabhair faoi deara gur comhchuingigh choimpléascacha a chéile iad seo.

Suim na bhfréamhacha $= (-1 + i) + (-1 - i) = -2$ (réaduimhir).

Toradh na bhfréamhacha $= (-1 + i)(-1 - i) = 1 + i - i - i^2$

$= 1 + 1$

$= 2$ (réaduimhir).

$\therefore \quad z^2 -$ (Suim na bhfréamhacha)z + (Toradh na bhfréamhacha) $= z^2 - (-2)z + 2 = 0$

$= z^2 + 2z + 2 = 0.$

Dá bhrí sin, is ina bpéirí comhchuingeacha a bhíonn fréamhacha cothromóide cearnaí a bhfuil comhéifeachtaí réadacha aici.

Sampla 1

Más fréamh de chuid na cothromóide $az_2 + bz + c = 0$ é $z = 1 + 5i$, mar a bhfuil $a, b, c \in \mathbb{R}$, faigh luachanna a, b, c.

Más fréamh amháin é $1 + 5i$ agus ó tharla go bhfuil na comhéifeachtaí réadach, dá bhrí sin bíonn na fréamhacha i bpéirí comhchuingeacha; is é $1 - 5i$ an fhréamh eile.

$\therefore$ is iad $1 + 5i$ agus $1 - 5i$ an dá fhréamh

$\therefore$ $z^2 -$ (Suim na bhfréamhacha)$z +$ Toradh na bhfréamhacha $= 0$

$\Rightarrow$ $z^2 - (1 + 5i + 1 - 5i)z + (1 + 5i)(1 - 5i) = 0$

$\Rightarrow$ $z^2 - 2z + 1 - \cancel{5}i + \cancel{5}i - 25i^2 = 0$

$z^2 - 2z + 26 = 0$

$\therefore$ $a = 1, b = -2$ agus $c = 26$

Sampla 2

Más fréamh de $z^2 - 4z + 5 = 0$ é $z = 2 + i$, taispeáin gur fréamh $\overline{z}$ freisin.

$z = 2 + i \Rightarrow \overline{z} = 2 - i$

Ó tharla go bhfuil $f(z) = z^2 - 4z + 5 = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f(2 - i) &= (2 - i)^2 - 4(2 - i) + 5 \\ &= 4 - \cancel{4}i + i^2 - 8 + \cancel{4}i + 5 \\ &= 4 - 1 - 8 + 5 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ $2 - i$ is fréamh é $2 - i$ de $z^2 - 4z + 5 = 0$ freisin.

Anois déanaimid an toradh seo a ghinearálú chun gach iltéarmach a bhfuil comhéifeacht réadach aige a áireamh agus teoirim na bhfréamhacha comhchuingeacha a lua mar seo a leanas:

Teoirim na bhfréamhacha comhchuingeacha

Más fréamh de chuid na cothromóide $az^n + bz^{n-1} + \ldots. dz + c = 0$ é z, nuair atá $a, b, c, d, \ldots$ uile $\in \mathbb{R}$, ansin is fréamh é $\overline{z}$ freisin den chothromóid seo.

Sampla 3

Más fréamh de $z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$ é $z = 1 + 2i$, taispeáin gur fréamh é $\overline{z}$ freisin. Uaidh sin faigh an tríú fréamh.

Ó tharla go bhfuil na comhéifeachtaí réadach, is fréamh é $z = 1 + 2i$

$\Rightarrow$ is fréamh é $\overline{z} = 1 - 2i$ freisin.

Cruthúnas: $f(z) = z^3 - z^2 - 3z + 5$

$$\begin{aligned} f(1-2i) &= (1-2i)^3 - (1-2i)^2 + 3(1-2i) + 5 \\ &= -11 + 2i - (-3-4i) + 3 - 6i + 5 \\ &= -\cancel{11} + \cancel{2}i + \cancel{3} + \cancel{4}i + \cancel{3} - \cancel{6}i + \cancel{5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ is fréamh é $1 - 2i$ freisin.

Más fréamhacha iad $1 + 2i$ agus $1 - 2i \Rightarrow z^2 - (1 + 2i + 1 - 2i)z + (1 + 2i)(1 - 2i) = 0$

$\Rightarrow$ is cothromóid chearnach é $z^2 - 2z + 5 = 0$
a dhéantar le péire de na fréamhacha.

$\therefore$ Is féidir an tríú fachtóir a fháil tríd an slonn ciúbach a roinnt ar an slonn cearnach.

$$\begin{array}{r|l} & z + 1 \\ \hline z^2 - 2z + 5 & z^3 - z^2 + 3z + 5 \\ & \underline{z^3 - 2z^2 + 5z} \\ & \quad z^2 - 2z + 5 \\ & \quad \underline{z^2 - 2z + 5} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

$\therefore$ $z + 1 = 0$

agus is é $z = -1$ an tríú fréamh.

nó $(z + a)(z^2 - 2z + 5)$
$\equiv z^3 - z^2 + 3z + 5$

$\Rightarrow$ $5a \equiv 5$ …cothromú comhéifeachtaí
$a = 1$

Cleachtadh 3.6

1. Taispeáin gurb é $-2 + 4i$ fréamh na cothromóide $z^2 + 4z + 20 = 0$, agus scríobh síos an dara fréamh.

2. Réitigh na cothromóidí seo, ag tabhairt do fhreagraí san fhoirm $a \pm bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) $z^2 - 2z + 17 = 0$ (ii) $z^2 + 4z + 7 = 0$

3. Déan cothromóid chearnach, nuair atá péire fréamhacha agat do gach cás.

(i) $1 \pm 3i$ (ii) $-2 \pm i$ (iii) $4 \pm 2i$ (iv) $\pm 5i$

4. Más fréamh de $z^2 - 8z + 17 = 0$ é $z = 4 - \mathrm{i}$, taispeáin gur fréamh é $\bar{z}$ freisin.

5. Taispeáin gur fréamh den chothromóid $z^3 + 3z^2 + 4z - 8 = 0$ é $-2 + 2i$, agus faigh na fréamhacha eile.

6. Más fréamh amháin den chothromóid $2z^3 - 9z^2 + 30z - 13 = 0$ é $2 + 3i$, faigh an dá fhréamh eile.

7. Taispeáin gur fréamh den chothromóid $z^2 + (-1 + 5i)z + 14 - 7i = 0$ é $1 + 2i$. Taispeáin freisin nach fréamh den chothromóid seo é an comhchuingeach $1 - 2i$. Mínigh cén fáth.

8. Is fréamh den chothromóid $az^2 + bz + 5 = 0$ é $\dfrac{1+2i}{1-2i}$ mar a bhfuil $a, b \in \mathbb{R}$.
Faigh luach do a agus luach do b.

9. Má tá $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + az + b)$, faigh a agus b agus uaidh sin réitigh an chothromóid $z^3 - 1 = 0$, ag tabhairt na bhfréamhacha coimpléascacha san fhoirm $a + bi$.

10. Déan an chothromóid chearnach arb iad a fréamhacha $-2 \pm i$. Más fréamh den chothromóid $z^3 + z^2 - 7z - 15 = 0$ é $-2 + i$, faigh an dá fhréamh eile.

11. Déan an chothromóid chearnach arb iad a fréamhacha $-3 \pm 2i$.
Uaidh sin déan an chothromóid chearnach arb iad a fréamhacha $-3 \pm 2i$ agus 2.

12. Déan slonn ciúbach le comhéifeachtaí réadacha, a bhfuil na fréamhacha 2 agus $-1 + i$ ag péire díobh.

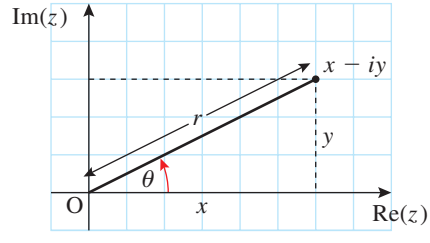
13. Fréamhacha ciúbacha na haontachta a thugtar ar fhréamhacha na cothromóide $z = 1^{\frac{1}{3}}$. Más iad na fréamhacha sin 1, α, β, faigh α agus β agus cruthaigh go bhfuil

(i) $\alpha^2 = \beta$ (ii) $1 + \alpha + \beta = 0$

Nod: féach Ceist 9.

Mír 3.7 Uimhir choimpléascach san fhoirm pholach

Má dhéanaimid staidéar ar an léaráid seo, feicimid go bhfuil dhá bhealach ann chun pointe a aimsiú ar an bplána coimpléascach.



(i) Comhordanáidí Cairtéiseacha (x, y) or (ii) Comhordanáidí polacha (r, θ)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r\cos\theta$$

Dá bhrí sin, is féidir aon uimhir choimpléascach $x + yi$ a scríobh mar $r\cos\theta + ri\sin\theta$.

$$\Rightarrow \quad x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Feicimid ón léaráid freisin go bhfuil

(i) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ = modal na huimhreach

(ii) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, mar a dtugtar **argóint** na huimhreach ar θ.

Foirm dhronuilleogach / Foirm Chairtéiseach: $x + iy$

Foirm pholach / Foirm mhodail-argóna: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Sampla 1

Sloinn na huimhreacha coimpléascacha seo san fhoirm $x + iy$:

(a) $z_1 = 12\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (b) $z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

(a) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ and $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ … (*Foirmlí agus Táblaí*, lch 13)

$$z_1 = 12\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$= 6\sqrt{3} + 6i$$

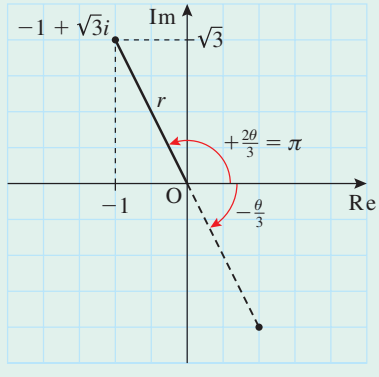
(b) $\sin\frac{\pi}{8} = 0.382$ agus $\cos\frac{\pi}{8} = 0.924$

$$z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$
$$= 5[0.924 + i(0.382)]$$
$$= 4.62 + 1.92i$$

Cuimhnigh go gcaithfear 'rad mode' a úsáid ar an áireamhán nuair atá π á úsáid.

Sampla 2

Sloinn $(-1 + i\sqrt{3})$ san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ or } +\frac{2\pi}{3}$$

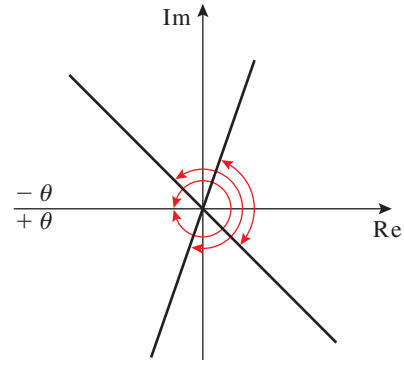
$$\left[\text{Nóta: } \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1.7321\right]$$

Tríd an uimhir choimpléascach a bhreacadh, feicimid gurb é an argóint a theastaíonn $\frac{2\pi}{3}$.

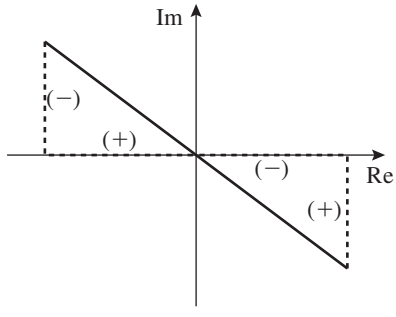
$$\therefore \quad r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Nóta 1: Nuair atá argóint uimhreach coimpléascaí á ríomh, glactar le príomhluach θ mar luach idir $-\pi$ agus $+\pi$, is é sin, $-\pi < \theta < +\pi$.

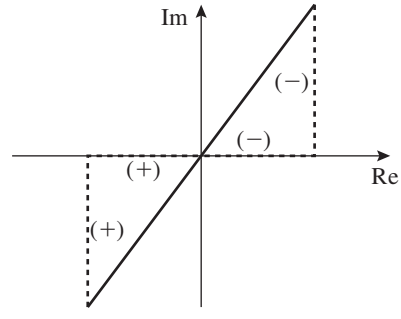
Nóta 2: Nuair atá áireamhán in úsáid chun an argóint (θ) a fháil, tá sé tábhachtach a sheiceáil go n-aimsíonn an uillinn a thugann an t-áireamhán an cheathrú cheart don uimhir choimpléascach áirithe sin.



Tríd an uimhir choimpléascach a bhreacadh ar léaráid Argand ar dtús, cabhraíonn sé leis an bhfadhb seo a réiteach.



Bíonn an cóimheas tan diúltach sa 2ú agus sa 4ú ceathrú.



Bíonn an cóimheas tan deimhneach san 1ú agus sa 3ú ceathrú.

Sampla 3

Scríobh an uimhir choimpléascach $1 - i\sqrt{3}$ san fhoirm mhodail/argóna.

$$x + iy = 1 - i\sqrt{3}$$

Modal $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

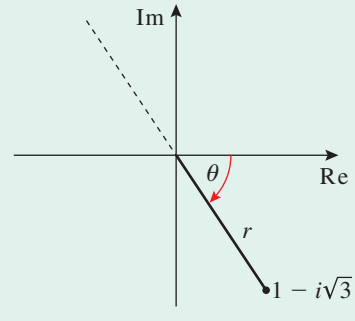
$$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4} = 2$$

Argóint $\quad \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

$$= \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$$

$$= \frac{-\pi}{3}$$



Ó tharla go bhfuil an uimhir choimpléascach sa 4ú ceathrú, is é $\dfrac{-\pi}{3}$ an argóint cheart.

$$\Rightarrow \quad (r, \theta) = \left(2, \frac{-\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \quad 1 - i\sqrt{3} = \left[2\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]$$

Sampla 4

Scríobh $-\sqrt{3} - i$ i san fhoirm pholach.

$$x + iy = -\sqrt{3} - i$$

Modal $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{3 + 1} = 2$$

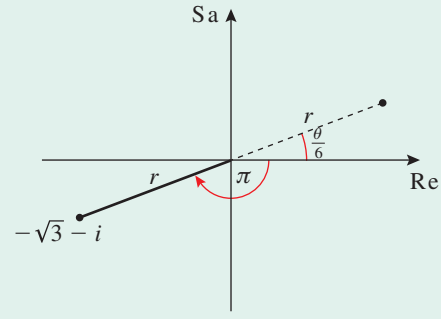
Argóint $\quad \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

$$= \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi}{6}\,(30^\circ) \;\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = \frac{-5\pi}{6}\,(-150^\circ)$$

$$\therefore \quad -\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right]$$



$\left(\text{ó tharla go bhfuil an uimhir sa 3ú ceathrú, } \theta = \dfrac{\pi}{6} - \pi = \dfrac{-5\pi}{6}\right)$

Cleachtadh 3.7

1. Sloinn gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm $a + bi$.

(i) $4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ (ii) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

(iii) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (iv) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2. Breac gach ceann de na huimhreacha coimpléascacha seo a leanas ar léaráid Argand, ag cur mhodal agus argóint gach uimhreach in iúl.

(i) $2 + 2i$ (ii) $-3i$ (iii) 4 (iv) $-\sqrt{3} + i$

3. Sloinn gach ceann de na huimhreacha coimpléascacha seo a leanas san fhoirm pholach.

(i) $1 + i$ (ii) $\sqrt{3} + i$ (iii) $-2 + i\sqrt{2}$ (iv) $-2 - i\sqrt{2}$

(v) $4i$ (vi) -5 (vii) $-3i$ (viii) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas, ag tabhairt do fhreagraí san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

(i) $(1 + i\sqrt{3})^2$ (ii) $\dfrac{-2}{-\sqrt{3} + i}$

5. Má tá $z = 1 + \sqrt{3}i$, faigh na huimhreacha coimpléascacha:

(i) iz (ii) i^2z (iii) i^3z

Breac na huimhreacha z, iz, i^2z agus i^3z ar léaráid Argand.

Faigh argóint (θ) gach uimhreach: (i) z (ii) iz (iii) i^2z (iv) i^3z

Céard is féidir a thabhairt faoi deara ó thaobh na céimseatan de maidir le huimhir choimpléascach a iolrú faoi i?

6. Sloinn gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm pholach:

(i) $2i$ (ii) $-3 - i\sqrt{3}$ (iii) $\dfrac{2}{-1+i}$

7. Réitigh an chothromóid $z^2 - 2z + 2 = 0$ agus bíodh do fhreagra san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

8. Bíodh $z_2 = t + 8i$, $t \in \mathbb{R}$ agus $i^2 = -1$. Má tá $\arg(z_2) = \dfrac{3\pi}{4}$, faigh luach t.

Mír 3.8 Torthaí agus líonta uimhreacha coimpléascacha san fhoirm pholach

Féach ar na huimhreacha coimpléascacha $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ agus $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

Ansin $z_1.z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2]$$
$$= r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$
$$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$ … (*Foirmlí agus Táblaí*, lch 15)

$\Rightarrow$ Modal $z_1.z_2 = r_1.r_2$ agus argóint $z_1.z_2 = \theta_1 + \theta_2$

Chomh maith leis sin, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

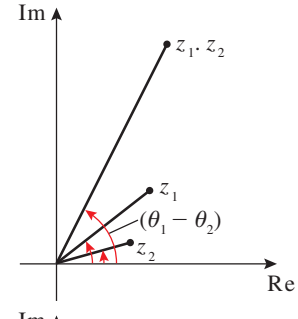
$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \times \frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{[\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2]}{[\cos^2\theta_2 - i\cos\theta_2\sin\theta_2 + i\sin\theta_2\cos\theta_2 - i^2\sin^2\theta_2]}$$

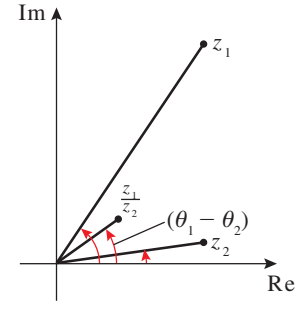
$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)}{1}\right]$$ … (*Foirmlí agus Táblaí*, lch 15)

$\Rightarrow$ Modal $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$ agus argóint $\dfrac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2$.



Má tá $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$
agus $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$,
ansin $z_1.z_2 = r_1.r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
agus $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$.



Nóta: $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1\left(\dfrac{1}{z_2}\right) = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]$$

Má tá $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

Sampla 1

Má tá $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ agus $z_2 = 5\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$, faigh

(i) $z_1 z_2$ (ii) $\frac{z_2}{z_1}$ san fhoirm $a + ib$.

(i) $z_1 z_2 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right].\left[5\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$= (2 \times 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$= 10\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 10\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= -5 + 5\sqrt{3}i$

(ii) $\frac{z_2}{z_1} = \dfrac{5\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \left(\frac{5}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \frac{5}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{4}i$

Cleachtadh 3.8

1. Má tá $z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ agus $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, faigh

   (i) $z_1.z_2$ (ii) $\frac{z_1}{z_2}$, ag tabhairt do fhreagra san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

2. Má tá $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, faigh z^2 ag tabhairt do fhreagra san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

3. Má tá $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ agus $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, faigh modal agus argóint

   (i) z_1 (ii) z_2 (iii) $z_1.z_2$ (iv) $\frac{z_1}{z_2}$

4. Iolraigh $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ faoi $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

5. Roinn $9\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ar $6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

6. Simpligh $2\cos\left(\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right).\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right).6\cos\left(\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$, ag tabhairt do fhreagra san fhoirm $a + bi$.

7. Simpligh $\left(\cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^2$.

8. Simpligh (a) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3$ (b) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4$

9. Má tá $z = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$, sloinn $\frac{1}{z}$ san fhoirm

(i) $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (ii) $a + ib$.

10. Sloinn $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ san fhoirm pholach.
Uaidh sin sloinn (a) z^2 (b) z^3 (i) san fhoirm pholach (ii) san fhoirm Chairtéiseach.

11. Taispeáin má tá $z = \cos\theta + i\sin\theta$, go bhfuil $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

12. Má tá $z.\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1$, faigh z san fhoirm $a + ib$.

13. Má tá $z = \cos\theta + i\sin\theta$, taispeáin go bhfuil $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$.

Mír 3.9 Teoirim de Moivre

Sa mhír roimhe seo, chonaiceamar go bhfuil

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = \cos(\theta_1 + \theta_1) + i\sin(\theta_1 + \theta_1)$$
$$= \cos 2\theta_1 + i\sin 2\theta_1$$

Is é sin go bhfuil $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)^2 = \cos 2\theta_1 + i\sin 2\theta_1$

Chomh maith leis sin, $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)^3 = \cos 3\theta_1 + i\sin 3\theta$

Teoirim de Moivre a thugtar ar chás ginearálta an toraidh seo.

Teoirim de Moivre

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n \equiv \cos n\theta + i\sin n\theta$,
do gach luach réadach ar n.

Cruthúnas theoirim de Moivre trí ionduchtú

A: Nuair is slánuimhir dheimhneach é n, cruthaigh go bhfuil $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$

(i) Bíodh $n = 1 \Rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$ … atá fíor

(ii) Glac leis go bhfuil $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$

(iii) Cruthaigh go bhfuil sé fíor do $n = k + 1$, i.e.,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = [\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta]$$

Cruthúnas: $(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$… glactha leis

$= \cos k\theta\cos\theta + i\cos k\theta\sin\theta + i\sin k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta$

$= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta + i(\cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta)$

$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$

Dá bhrí sin, má tá sé fíor do $n = k$, tá sé fíor do $n = k + 1$.

Ach tá sé fíor do $n = 1$.

Mar sin, tá sé fíor do $n = 1 + 1 = 2$.

Dá bhrí sin, tá an teoirim fíor do $n = 1, 2, 3, \ldots$. i.e. do gach slánuimhir dheimhneach.

B: Nuair is slánuimhir dhiúltach é n,

bíodh $n = -p$ mar ar slánuimhir dheimhneach é p.

Anois cruthaímid go bhfuil $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$$\Rightarrow \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^{-p} = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^p}$$

$$= \frac{1}{\cos p\theta + i\sin p\theta} \quad \text{... ag úsáid theoirim de Moivre}$$

$$= \frac{1}{\cos p\theta + i\sin p\theta} \cdot \frac{\cos p\theta - i\sin p\theta}{\cos p\theta - i\sin p\theta}$$

$$= \frac{\cos p\theta - i\sin p\theta}{\cos^2 p\theta + \sin^2 p\theta}$$

$$= \cos p\theta - i\sin p\theta$$

Ach $p = -n$.

$$\therefore \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(-n\theta) - \sin(-n\theta)$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

(*Foirmlí agus Táblaí*, lch 13)

$\therefore \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ do gach slánuimhir dhiúltach.

Nóta: Do $n = 0$, as $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$

faighimid $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = (\cos 0 + i\sin 0)$

$$1 = 1$$

Dá bhrí sin, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$ do gach luach slánuimhriúil.

Má tá $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, trí theoirim de Moivre a úsáid:

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$$

$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \text{do gach } n \in \mathbb{Z}.$$

Sampla 1

Faigh luach $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$.

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 = \cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}$$

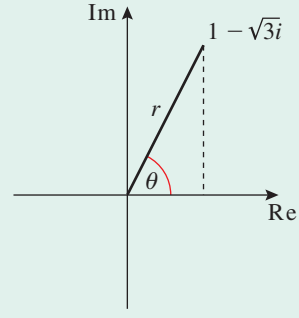
$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= 0 + i = i$$

Sampla 2

Scríobh $1 + \sqrt{3}i$ san fhoirm pholach agus uaidh sin faigh luach $(1 + \sqrt{3}i)^9$.

$$x + iy = 1 + \sqrt{3}i$$



Modal $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Argóint $\quad \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore \quad z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad z^9 = (1 + \sqrt{3}i)^9 &= 2^9\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^9 \\
&= 2^9\left(\cos\frac{9\pi}{3} + i\sin\frac{9\pi}{3}\right) \\
&= 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) \\
&= 2^9(-1 + i.0) \\
&= -2^9
\end{aligned}$$

Cleachtadh 3.9

1. Úsáid teoirim de Moivre chun gach ceann díobh seo a leanas a shimpliú, agus sloinn do fhreagraí san fhoirm $a + bi$:

(i) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4$ (ii) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^7$

(iii) $\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^8$ (iv) $\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3$

(v) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-6}$ (vi) $\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^{10}$

(vii) $\left(\cos\frac{-\pi}{18} + i\sin\frac{-\pi}{18}\right)^9$ (viii) $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-3}$

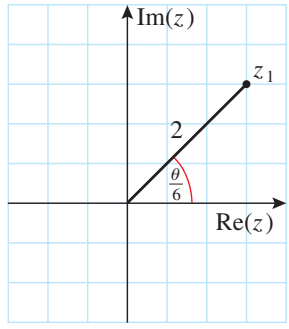
2. Má tá $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, sloinn z^4 san fhoirm $a + bi$.

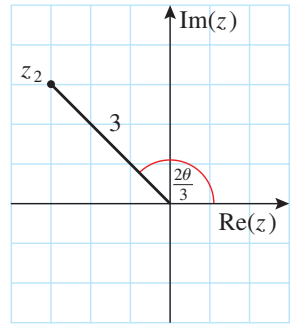
3. Má tá $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$, sloinn z^5 san fhoirm $a + bi$.

4. Sloinn (i) $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$ (ii) $\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^4$ san fhoirm $\cos\theta + i\sin\theta$.

Uaidh sin sloinn $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^4$ san fhoirm $a + bi$.

5.





Úsáid an t-eolas sna léaráidí Argand thuas agus sloinn iad seo a leanas san fhoirm pholach.

(i) z_1 (ii) z_2 (iii) $\overline{z}_1$

(iv) $\overline{z}_2$ (v) $z_1.z_2$ (vi) $\dfrac{z_1}{z_2}$

6. Athraigh gach ceann díobh seo a leanas go dtí an fhoirm pholach agus ansin úsáid teoirim de Moivre chun do fhreagraí a shloinneadh san fhoirm $a + bi$:

(i) $(1 - i)^4$ (ii) $(1 + i\sqrt{3})^3$ (iii) $(-2 - 2i)^4$

7. Faigh luach $(1 + i)^4$.

8. Sloinn $4 - 4i$ san fhoirm pholach.

Uaidh sin faigh luach $\dfrac{1}{(4 - 4i)^3}$.

9. Simpligh (i) $(3 - \sqrt{3}i)^6$ (ii) $(2 + 2i\sqrt{3})^6$.

10. Sloinn $\dfrac{\sqrt{3} + i}{1 + i\sqrt{3}}$ san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Uaidh sin faigh luach $\left(\dfrac{\sqrt{3} + i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^6$.

Mír 3.10 Feidhmeanna theoirim de Moivre

Sloinn san fhoirm $(\cos\theta - i\sin\theta)^n$ a shimpliú

Baineann teoirim de Moivre le $(\cos\theta + i\sin\theta)$ agus ní le $(\cos\theta - i\sin\theta)$.

Ach ó tharla go bhfuil $-\sin\theta = \sin(-\theta)$ agus $\cos\theta = \cos(-\theta)$,

tá $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$.

Uaidh sin, $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$

$= [\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$

Sampla 1

Simpligh $\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$, ag tabhairt do fhreagra san fhoirm dhronuilleogach.

$$\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6 &= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 \\
&= \cos\left(-\frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{6\pi}{3}\right) \\
&= \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) \\
&= 1 + i.0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\cos n\theta$ agus $\sin n\theta$ a shloinneadh i dtéarmaí $\cos\theta$ agus $\sin\theta$

Sampla 2

Sloinn (a) $\cos 2\theta$ i dtéarmaí $\cos\theta$ (b) $\sin 3\theta$ i dtéarmaí $\sin\theta$.

(a) $\cos 2\theta$: $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \cos 2\theta + i\sin 2\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\
&= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + i^2\sin^2\theta \\
\cos 2\theta + i\sin 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\cos\theta\sin\theta)
\end{aligned}$$

Ag cothromú na gcodanna réadacha: $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2\theta - [1 - \cos^2\theta] \quad \ldots [\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1] \\
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1
\end{aligned}$$

(**Nóta:** Má theastaíonn $\sin 2\theta$ uainn, cothromaímid na codanna samhailteacha.)

(b) $\sin 3\theta$: $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \cos 3\theta + i\sin 3\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta \\
&\quad + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\
&\quad + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)
\end{aligned}$$

Ag cothromú na gcodanna samhailteacha:

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \\
&= 3[1 - \sin^2\theta]\sin\theta - \sin^3\theta \quad \ldots [\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta] \\
&= 3\sin\theta - 3\sin^3\theta - \sin^3\theta \\
\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta
\end{aligned}$$

Ag fáil an *n*ú fréamh d'uimhir choimpléascach

Má tá $z^n = a + bi \quad \Rightarrow \quad z = (a + bi)^{\frac{1}{n}}$, an *n*ú fréamh de $a + bi$.

Ansin (i) $z^3 = 1 + i \quad \Rightarrow \quad z = (1 + i)^{\frac{1}{3}}$, fréamh chiúbach $(1 + i)$

(ii) $z^4 = 0 + 8i \quad \Rightarrow \quad z = (0 + 8i)^{\frac{1}{4}}$, ceathrú fréamh $8i$.

Chun teoirim de Moivre a úsáid chun an *n*ú fréamh d'uimhir choimpléascach a fháil, caithfimid an uimhir choimpléascach a shloinneadh i bhfoirm pholach **ghinearálta**.

Toisc gur feidhmeanna peiriadacha iad na feidhmeanna triantánúla comhshíneas agus síneas, le peiriad 2π,

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2n\pi) \text{ agus}$$
$$\sin\theta = \sin(\theta + 2n\pi) \text{ do } n \in \mathbb{N}.$$

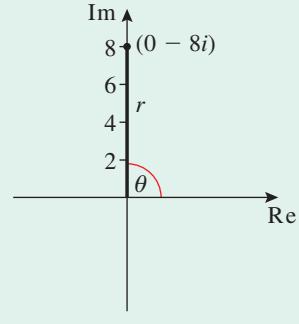
$$\therefore\ a + bi = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)].$$

Má tá $z = a + bi$, is é $z = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)]$ mar a bhfuil $n \in \mathbb{N}$, **foirm ghinearálta pholach** z.

Sampla 3

Réitigh an chothromóid $z^3 = 8i$.

$$z^3 = 8i \quad \Rightarrow \quad z = (8i)^{\frac{1}{3}}$$



Modal $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$= \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$$

Argóint $\quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore\ 0 + 8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{... san fhoirm pholach.}$$

$$8i = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)$$

... san fhoirm ghinearálta pholach.

$$\Rightarrow \quad z = (8i)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right) \quad \text{... ag úsáid theoirim de Moivre}$$

Bíodh $n = 0$: $\quad z = 2\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3} + i$$

Bíodh $n = 1$: $\quad z = 2\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right)$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{3} + i$$

Bíodh $n = 2$: $z = 2\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) + i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right)\right)$

$$= 2\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 2(0 + i(-1))$$

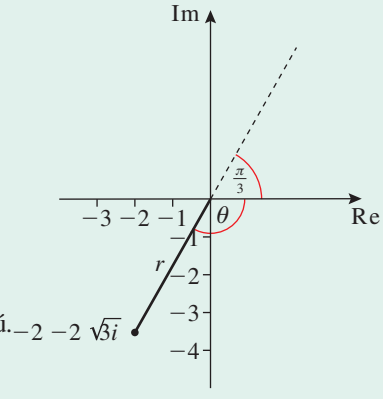
$$= -2i$$

Is iad fréamhacha ciúbacha $8i$

$\sqrt{3} + i$, $\quad -\sqrt{3} + i$, $\quad -2i$.

Sampla 4

Réitigh an chothromóid $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$.



$$z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i \quad \Rightarrow \quad z = (-2 - 2\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$$

Modal $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

Argóint $\quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$= \tan^{-1}\frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Tá tan θ deimhneach sa chéad cheathrú agus sa tríú ceathrú.

$$\Rightarrow \quad \theta = -\frac{2\pi}{3}$$

$$-2 - 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z = (-2 - 2\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(\cos\frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) + i\sin\frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)\right)$$

Bíodh $n = 0$: $\quad z = 2\left(\cos\frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

Bíodh $n = 1$: $\quad z = 2\left(\cos\frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + i\sin\frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)\right)$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$\therefore \quad z = 1 - \sqrt{3}i, \ -1 + \sqrt{3}i$$

Cleachtadh 3.10

1. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm $a + bi$:

(i) $(\cos \pi - i \sin \pi)^5$ (ii) $\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right)^{10}$

(iii) $\dfrac{1}{\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)^3}$ (iv) $\left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}\right)^4$

2. Úsáid teoirim de Moivre agus sloinn

(i) $\sin 2\theta$ i dtéarmaí $\sin \theta$ agus $\cos \theta$ (ii) $\cos 3\theta$ i dtéarmaí $\cos \theta$.

3. Úsáid an t-ionannas $(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^4$ chun iad seo a thaispeáint:

(i) $\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$ (ii) $\sin 4\theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$.

4. Úsáid teoirim de Moivre chun an chothromóid $z^3 = 8$ a réiteach.

5. Faigh luachanna z a bhfuil $z^3 = -8$ dóibh, ag tabhairt do fhreagra san fhoirm $a + bi$:

6. Breac an pointe $2 + 2\sqrt{3}i$ ar léaráid Argand.

Úsáid an léaráid seo chun $2 + 2\sqrt{3}i$ a shloinneadh san fhoirm $r(\cos \theta + i \sin \theta)$

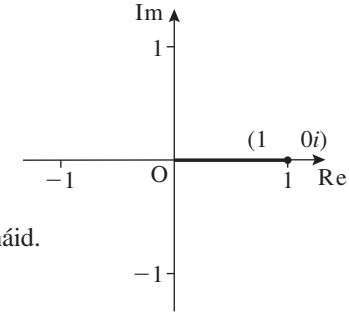
Uaidh sin faigh tacar réitigh $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$.

7. Breacadh an uimhir choimpléascach $z = 1$ ar an léaráid Argand seo.

Scríobh síos modal agus argóint na huimhreach seo.

(a) Sloinn $z = 1$ san fhoirm ghinearálta pholach agus uaidh sin faigh fréamhacha ciúbacha na haontachta, is é sin, faigh luachanna z a bhfuil $z = 1^{\frac{1}{3}}$.

(b) Cruthaigh go bhfuil suim na bhfréamhacha sin cothrom le náid.



8. Faigh fréamhacha ciúbacha $27i$.

9. Úsáid teoirim de Moivre chun iad seo a leanas a réiteach:

(i) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$ (ii) $z^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$ (iii) $z^2 = 4i$.

10. Úsáid teoirim de Moivre chun cúig fhréamh na cothromóide $z^5 = 1$ a fháil san fhoirm pholach.

Roghnaigh ceann de na fréamhacha w, mar a bhfuil $w \neq 1$, agus cruthaigh go bhfuil $w^2 + w^3$ réadach.

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. Simpligh $\sqrt{80} - \sqrt{20}$, ag sloinneadh do fhreagra san fhoirm $a\sqrt{b}$ mar a bhfuil $a, b \in \mathbb{N}$.

2. $(x - 1) + yi = y + 4i$; faigh x agus y.

3. Réitigh an chothromóid $z^2 + 4z + 3 = 0$, ag tabhairt do fhreagra san fhoirm $a + bi$.

4. Má tá $z_1 = 5 + i$ agus $z_2 = -2 + 3i$.

(i) Faigh $(z_1)^2$ (ii) Taispeáin go bhfuil $|z_1|^2 = 2|z_2|^2$

5. Bíodh z ina uimhir choimpléascach $-1 + i\sqrt{3}$.

(i) Sloinn z^2 san fhoirm $a + bi$.

(ii) Faigh luach na huimhreach réadaí p a fhágann go bhfuil $z^2 + pz$ réadach.

6. Sloinn an uimhir choimpléascach $z = 1 + \mathrm{i}$ san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ agus uaidh sin faigh luach do z^4 san fhoirm $p + qi$ mar a bhfuil $p, q \in \mathbb{R}$.

7. Sloinn $-1 + i\sqrt{3}$ san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

8. Taispeáin gur fréamh é $2 + 3i$ de $z^2 - 4z + 13 = 0$.
Uaidh sin faigh an fhréamh eile.

9. Má tá $z_1 = 2 + 3i$ agus $z_2 = 1 - 4i$, imscrúdaigh an bhfuil $|z_1|.|z_2| = |z_1.z_2|$

10. Scríobh $\dfrac{5 - 5i}{2 + i}$ san fhoirm $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

11. Simpligh $4i^{13} + 3i^3$.

12. Má tá fréamhacha $z_1 = 2 + 3i$ agus $z_2 = -1 + 4i$ ag $f(z)$, faigh $f(z)$.

13. Breac na huimhreacha coimpléascacha $a = 3 + 3i$ agus $b = 1 - 2i$ ar léaráid Argand.
Breac an uimhir choimpléascach $a + b$ ar an léaráid chéanna.
Faigh an uimhir choimpléascach c a d'aistreodh

(i) a go $a + b$ (ii) b go $a + b$ (iii) a go b.

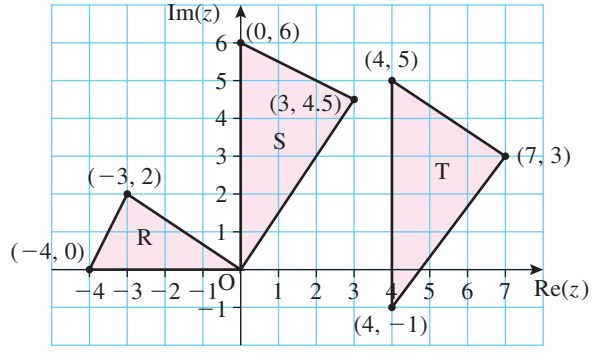
14. Sa léaráid seo, déan cur síos ar na claochluithe a theastódh dóibh seo:

(i) R → S

(ii) S → T

(iii) Má tá $z \in$ R, faigh z_1 le go mbeidh $zz_1 \in$ S.

(iv) Má tá $z \in$ R, faigh z_3 le go mbeidh $zz_1 + z_3 \in$ T.



Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. Má tá $z = x + iy$ agus $3(z - 1) = i(z + 1)$, faigh luach x agus luach y.

2. Má tá $2 + 3i$ ina fhréamh den chothromóid $2z^3 - 9z^2 + 30z - 13 = 0$, faigh an dá fhréamh eile.

3. Sloinn $\sqrt{3} + i$ i san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
Úsáid teoirim de Moivre chun $(\sqrt{3} + i)^{11}$ a shimpliú.

4. Is iad $1 + i$ agus $4 + 3i$ fréamhacha na cothromóide cearnaí $z^2 + pz + q = 0$.
Faigh luach p agus luach q.

5. Má tá $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ agus $w_2 = (w_1)^2$, faigh w_2.
Cruthaigh go bhfuil $w_1 + w_2 = -1$.

6. Má tá $p = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, faigh $\overline{p}$, comhchuingeach coimpléascach p.
Cruthaigh gur réaduimhir é $p\overline{p}$.

7. Sloinn $\dfrac{(1 + 2i)^2}{1 - i}$ san fhoirm $a + bi$.

8. Faigh luach k más é -3 an chuid réadach de $\dfrac{-3 + i}{1 + ki}$, $k \neq 0$.

9. Simpligh $\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2$.

10. Taispeáin gurfréamh leis an gcothromóid $z^2 - (3 + 3i)z + 5i = 0$ é $1 + 2i$ agus faigh an fhréamh eile.

11. Simpligh an slonn seo a leanas agus tabhair do fhreagra san fhoirm $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^4$$

12. Tá $1 - 3i$ ar cheann de fhréamhacha $z^3 + z^2 + 4z + \rho = 0$, agus tá ρ réadach.
Faigh luach ρ agus an dá fhréamh eile.

13. Tá $x + iy = \sqrt{8 - 6i}$.
Trí dhá thaobh na cothromóide a chearnú, úsáid cothromóidí comhuaineacha chun luachanna x agus y a fháil.

14. Faigh luach t a fhágann go bhfuil ti ina réiteach ar an gcothromóid

$$z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 10 = 0.$$

Uaidh sin faigh gach réiteach don chothromóid seo.

15. Más é $\overline{z}$ comhchuingeach z agus má tá $z = a + bi$ nuair atá a agus b réadach, faigh luachanna féideartha z má tá $z\overline{z} - 2iz = 7 - 4i$.

16. Cinn an p agus q réadach a fhágann go bhfuil $(p + iq)^2 = 15 - 8i$.
Uaidh sin réitigh an chothromóid $(1 + i)z^2 + (-2 + 3i)z - 3 + 2i = 0$

Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. Tá $p = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ agus $q = 2 - 2i\sqrt{3}$.

(i) Faigh pq san fhoirm $a + bi$.

(ii) Faigh $|p|$, $|q|$, $|pq|$, $|p + q|$.

2. Tá an uimhir choimpléascach $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$.

(i) Sloinn z san fhoirm $a + bi$.
(ii) Breac z ar léaráid Argand.
(iii) Sloinn z san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
(iv) Taispeáin go bhfuil $z^3 = 1$.

3. Tá an uimhir choimpléascach $z = (1 + 3i)(p + qi)$, mar a bhfuil p agus $q \in \mathbb{R}$ agus $p > 0$.

(i) Scríobh z san fhoirm $a + bi$.
Má thugtar go bhfuil argóint $z = \dfrac{\pi}{4}$, taispeáin go bhfuil $p + 2q = 0$.
(ii) Má thugtar freisin go bhfuil $|z| = 10\sqrt{2}$, faigh luachanna p agus q.

4. $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ agus $z_2 = \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; faigh

(i) $|z_1 z_2|$
(ii) $\arg(z_1 z_2)$
(iii) $|z_1|^2$
(iv) $|z_2|^2$
(v) $\arg(z_1{}^2)$
(vi) $\arg(z_2{}^2)$
(vii) Cinn an bhfuil na ráitis seo a leanas fíor nó bréagach d'aon dá uimhir choimpléascacha $z, w \in \mathbb{C}$.
(a) $|zw| = |z||w|$
(b) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

5. Má tá $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, faigh z^2, z^4 agus z^6.

(i) Breac z^2, z^4, z^6.
(ii) Déan cur síos ar an gclaochlú a tharlaíonn nuair a iolraítear z^2 gach uair.

6. Sloinn $\dfrac{\sqrt{3} + i}{1 + i\sqrt{3}}$ san fhoirm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Uaidh sin faigh luach $\left(\dfrac{\sqrt{3} + i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^6$.

7. Breac aon dá uimhir choimpléascacha z_1, z_2.
Tríd an gcomhthreomharán a chríochnú, faigh an uimhir choimpléascach $z_1 + z_2$.
Úsáid an comhthreomharán seo chun cur síos céimseatúil a dhéanamh ar chruthúnas d'éagothromóid an triantáin $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
Cé na coinníollacha a theastódh ionas go mbeadh $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?

8. Deirtear gurb é z deilín w má tá $zw = 1$.

(i) Bíodh $z = a + bi$ agus $w = c + di$, agus faigh dhá ghaol ailgéabracha idir na codanna réadacha agus na codanna samhailteacha a, b, c agus d.
(ii) Úsáid cothromóidí comhuaineacha chun a agus b a fháil i dtéarmaí c agus d.
(iii) Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{1}{z} = \dfrac{z}{|z|^2}$.
(iv) Breac $z, \dfrac{1}{z}$ agus $\overline{z}$ ar an léaráid Argand chéanna.
(v) Cruthaigh go mbíonn $\dfrac{1}{z}$ agus z comhlíneach le $0 + 0i$ i gcónaí.

9. Cruthaigh go bhfuil

(i) comhchuingeach suim na uimhreacha coimpléascacha cothrom le suim na gcomhchuingeach
(ii) comhchuingeach dhifríocht na n-uimhreacha coimpléascacha cothrom le difríocht na gcomhchuingeach
(iii) comhchuingeach líon na uimhreacha coimpléascacha cothrom le líon na gcomhchuingeach
(iv) comhchuingeach toradh uimhreacha coimpléascacha cothrom le toradh na gcomhchuingeach

10. (a) Tá $w = -1 + \sqrt{3}i$, mar a bhfuil $i^2 = -1$.

(i) Scríobh w san fhoirm pholach.

(ii) Úsáid teoirim de Moivre chun $z^2 = -1 + \sqrt{3}i$ a réiteach, ag tabhairt do fhreagra san fhoirm dhronuilleogach.

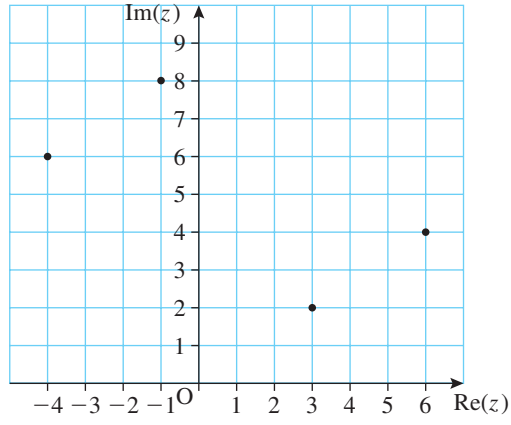
(b) Taispeántar ceithre uimhir choimpléascacha z_1, z_2, z_3 agus z_4 ar léaráid Argand.
Sásaíonn siad na coinníollacha seo a leanas:

$z_2 = i z_1$

$z_3 = k z_1$, mar a bhfuil $k \in \mathbb{R}$

$z_4 = z_2 + z_3$.

(Nóta: úsáideadh an scála céanna ar an dá ais.)



(i) Sainaithin cén uimhir a ghabhann le gach pointe trí lipéad a chur ar gach pointe sa léaráid.

(ii) Scríobh síos luach cuí do k.

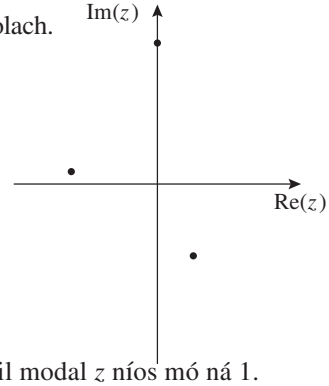
(iii) Sonraigh cén coinníoll a chabhraigh leat na huimhreacha a shainaithint ar dtús. Mínigh do fhreagra.

(In oiriúint as Páipéar Samplach, Tionscadal Mata, Páipéar 1, 2011 ó Choimisiún na Scrúduithe Stáit)

11. (a) (i) Scríobh an uimhir choimpléascach $1 - i$ san fhoirm pholach.

(ii) Bain úsáid as teoirim de Moivre chun luach $(1 - i)^9$ a fháil, agus tabhair do fhreagra i bhfhoirm dhronuilleogach.

(b) Tá modal níos mó ná 1 ag uimhir choimpléascach z.
Taispeántar ar léaráid Argand na trí uimhir z, z^2 agus z^3.
Tá ceann díobh ar an ais shamhailteach, mar a thaispeántar.



(i) Lipéadaigh na pointí chun a thaispeáint cé na huimhreacha a bhfreagraíonn na pointí dóibh.

(ii) Faigh θ, argóint z.

(iii) Mínigh an tábhacht a bhaineann leis an eolas go bhfuil modal z níos mó ná 1.

(c) Féach ar an uimhir choimpléascach $z = a + ai$, $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

(i) Faigh na huimhreacha coimpléascacha z^2, z^4, z^6, srl, agus tabhair do chuid freagraí i bhfoirm dhronuilleogach.

(ii) Déan cur síos céimseatúil ar an bpatrún a chruthaíonn z, z^2, z^4, z^6, …

(In oiriúint as Scrúdú na hArdteistiméireachta, Tionscadal Mata, Páipéar 1, 2011 ó Choimisiún na Scrúduithe Stáit)

12. (i) Má tá $z = \cos\theta + i\sin\theta$, úsáid teoirim de Moivre chun slonn a scríobh do z^k i dtéarmaí θ, nuair is slánuimhir dheimhneach é k.

(ii) Uaidh sin, taispeáin go bhfuil $\dfrac{1}{z^k} = \cos k\theta - i\sin k\theta$.

(iii) Oibrigh amach sloinn do $\cos k\theta$ agus $\sin k\theta$ i dtéarmaí z^k.

(iv) Taispeáin go bhfuil $\cos^2\theta\sin^2\theta = \dfrac{-1}{16}\left(z^2 - \dfrac{1}{z^2}\right)^2$.

(v) Uaidh sin taispeáin go bhfuil $\cos^2\theta\sin^2\theta = a + b\cos 4\theta$, mar ar tairisigh a agus b.

caibidil 4

Seichimh — Sraitheanna — Patrúin

Focail thábhachtacha

seicheamh uimhreacha **seicheamh comhbhreise** **sraith** **sigme (Σ)**
seicheamh iolraíoch **seicheamh easpónantúil** **sraith iolraíoch**
deachúil athfhillteach **difríocht chríochta** **feidhm ilchodach** **feidhm chearnach**

Mír 4.1 Seichimh

Is tacar uimhreacha scríofa in ord cinnte é **seicheamh uimhreacha**.
Bíonn riail áirithe ann a cheanglaíonn gach téarma sa seicheamh.

Scrúdaigh na seichimh seo a leanas agus scríobh síos i bhfocail an riail a cheanglaíonn téarma amháin leis an chéad téarma eile. Uaidh sin faigh an chéad dá théarma eile sa seicheamh.

(i) $1, 3, 5, 7, \ldots$

(ii) $2, 5, 8, 11, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \ldots$

(iv) $1, 2, 4, 8, \ldots$

(v) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

(vi) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

(vii) $1, 4, 9, 16, \ldots$

(viii) $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$

(ix) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

(x) $4, 2, 0, -2, \ldots$

(xi) $1, -1, 1, -1, \ldots$

(xii) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

Is é an seicheamh uimhreacha is bunúsaí ná tacar na n-uimhreacha aiceanta, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots n\}$; is féidir gach seicheamh eile a chur i gcomparáid leis.

Smaoinigh ar na huimhreacha aiceanta	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$5,$	$\ldots\ldots$	n
agus cuir i gcomparáid iad leis an seicheamh $\rightarrow$	$1,$	$3,$	$5,$	$7,$	$9,$	$\ldots\ldots$	$2n - 1$
	$T_1,$	$T_2,$	$T_3,$	$T_4,$	$T_5,$	$\ldots\ldots$	T_n

Is é $\boldsymbol{T_1}$ an chéad téarma; is é $\boldsymbol{T_2}$ an dara téarma.

$\boldsymbol{T_n}$ a thugtar ar an *n*ú téarma agus tugann sé an riail dúinn atá de dhíth chun téarma ar bith sa seicheamh a fháil.

$T_n = 2n - 1$

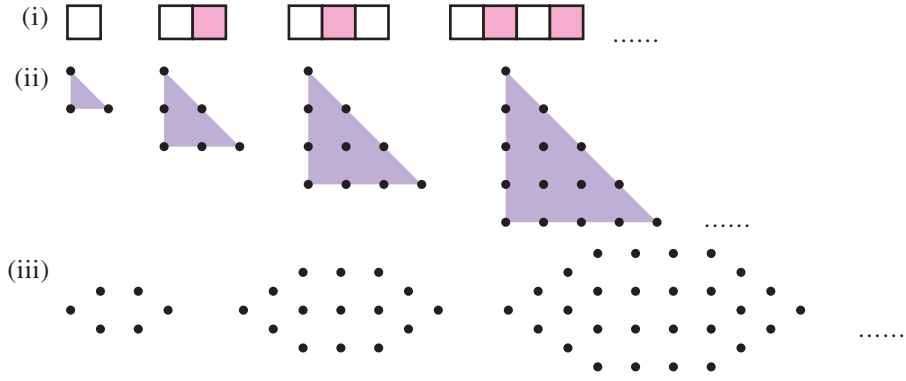
Bíodh $n = 1$, $T_1 = 2(1) - 1 = 1$
Bíodh $n = 2$, $T_2 = 2(2) - 1 = 3$
Bíodh $n = 3$, $T_3 = 2(3) - 1 = 5$
Bíodh $n = 4$, $T_4 = 2(4) - 1 = 7$ etc.

Uaidh sin tugann an riail $T_n = 2n - 1$ an seicheamh $1, 3, 5, 7, \ldots$

Díorthaítear seichimh go minic ó phatrúin a chruthaíodh trí phróisis éagsúla. Sa bhitheolaíocht is féidir cur síos a dhéanamh ar leagan amach na nduilleog ar ghas leis an 'seicheamh Fibonacci' $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Úsáidtear seichimh i mbogearraí ríomhaireachtúla. San fhisic, baineann seichimh le staidéar na dtonnta; rialaíonn patrúin seichimh gluaiseachtaí róbait agus baintear úsáid fhorleathan astu sa teicneolaíocht dhigiteach.

Smaoinigh ar na patrúin seo a leanas agus déan cur síos ar an gcaoi le dhá ghné eile a chur le gach patrún.



Sampla 1

Scríobh síos na chéad cheithre théarma i ngach ceann de na seichimh seo a leanas:

(i) $T_n = n^2 + n$ (ii) $T_n = 2^n - 3n$

(i) $T_n = n^2 + n$

Bíodh $n = 1$, $T_1 = 1^2 + 1 = 2$
$n = 2$, $T_2 = 2^2 + 2 = 6$
$n = 3$, $T_3 = 3^2 + 3 = 12$
$n = 4$, $T_4 = 4^2 + 4 = 20$

Is é an seicheamh ná 2, 6, 12, 20.

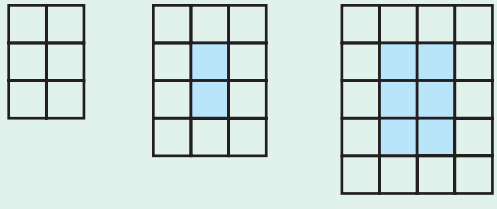
(ii) $T_n = 2^n - 3n$

Bíodh $n = 1$, $T_1 = 2^1 - 3(1) = -1$
$n = 2$, $T_2 = 2^2 - 3(2) = -2$
$n = 3$, $T_3 = 2^3 - 3(3) = -1$
$n = 4$, $T_4 = 2^4 - 3(4) = 4$

Is é an seicheamh ná $-1, -2, -1, 4$.

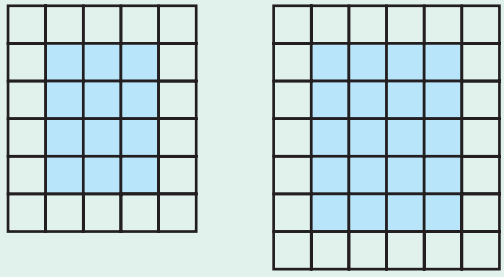
Sampla 2

Déantar na patrúin dhronuilleogacha seo a leanas as dhá thacar de thíleanna daite.



(i) Tarraing an chéad dá phatrún tíleanna eile.
(ii) Scríobh seicheamh uimhreacha do na tíleanna gorma i ngach ceann de na patrúin seo.
(iii) Scríobh seicheamh uimhreacha do líon iomlán na dtíleanna atá in úsáid i ngach ceann de na patrúin seo.
(iv) Scríobh seicheamh uimhreacha do na tíleanna bána i ngach ceann de na patrúin seo.
(v) Scríobh amach na chéad 3 théarma i ngach seicheamh in (ii), (iii), (iv).

(i)



(ii) 6, 10, 14, 18, 22, sin an seicheamh do líon na dtíleanna gorma

(iii) 6, 12, 20, 30, 42, sin an seicheamh do líon iomlán na dtíleanna

(iv) 0, 2, 6, 12, 20, sin an seicheamh do líon na dtíleanna bána.

(v) (ii) Tugaimid faoi deara sa seicheamh seo $\overset{+4}{6,\ 10,}\ \overset{+4}{14,}\ \overset{+4}{18,}\ \overset{+4}{22,}\ \ldots$

go méadaítear gach téarma de 4.

$\Rightarrow$ is iad na chéad trí théarma eile ná $\left.\begin{array}{l} 22 + 4 = 26 \\ 26 + 4 = 30 \\ 30 + 4 = 34 \end{array}\right\}$ 26, 30, 34

(iii) $\overset{+6}{6,\ 12,}\ \overset{+8}{20,}\ \overset{+10}{30,}\ \overset{+12}{42,}\ \ldots$ méadaítear gach téarma de réir an phatrúin 6, 8, 10, 12 …, i.e. tá an bhearna idir na huimhreacha ag méadú de 2 gach uair.

$\Rightarrow$ is iad na chéad trí théarma eile ná $\left.\begin{array}{l} 42 + 14 = 56 \\ 56 + 16 = 72 \\ 72 + 18 = 90 \end{array}\right\}$ 56, 72, 90

(iv) Is é seicheamh na dtíleanna bána ná 0, 2, 6, 12, 20, … agus tá airí dronuilleogach aige $(0 \times 1), (1 \times 2), (2 \times 3), (3 \times 4), (4 \times 5), \ldots$

$\Rightarrow$ is iad na chéad trí théarma eile ná $(5 \times 6), (6 \times 7), (7 \times 8)$

$= 30 \qquad 42 \qquad 56$

[Nóta: Is féidir an seicheamh seo a fháil chomh maith trí sheicheamh (ii) a dhealú ó sheicheamh (iii)]

Cleachtadh 4.1

1. Scríobh síos na chéad trí théarma eile i ngach ceann de na seichimh seo a leanas:

(i) 6, 12, 18, 24, …
(ii) 7, 12, 17, 22, …
(iii) 4.7, 5.9, 7.1, 8.3, …
(iv) 2, −1, −4, −7, …
(v) 2, 3, 6, 11, 18, 27, …
(vi) 78, 70, 62, 54, …
(vii) 10, 5, 0, −5, −10, …
(viii) −64, −55, −46, −37, …
(ix) 2, 6, 18, …
(x) 2, 6, 12, 20, …
(xi) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$
(xii) 1, 2, 4, 7, 11, …
(xiii) 0, 3, 8, 15, 24, …
(xiv) 3, −6, 12, −24, …
(xv) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots$

2. Faigh na chéad cheithre théarma sna seichimh seo a leanas, agus an *n*ú téarma (T_n) ar eolas agat i ngach cás.

(i) $T_n = 4n - 2$
(ii) $T_n = (n + 1)^2$
(iii) $T_n = n^2 - 2n$
(iv) $T_n = (n + 3)(n + 1)$
(v) $T_n = n^3 - 1$
(vi) $T_n = \dfrac{n}{n + 2}$
(vii) $T_n = 2^n$
(viii) $T_n = (-3)^n$
(ix) $T_n = n.2^n$

3. Dhreap damhán alla suas balla. Dhreap sé 5 cm sa chéad nóiméad. Gach nóiméad i ndiaidh an chéad nóiméid, dhreap sé 4 cm níos faide ná an nóiméad roimhe.

(i) Scríobh seicheamh leis an bhfad a dhreap an damhán alla gach nóiméad a thaispeáint.
(ii) Cá fhad a dhreap an damhán alla sa chuigiú nóiméad?

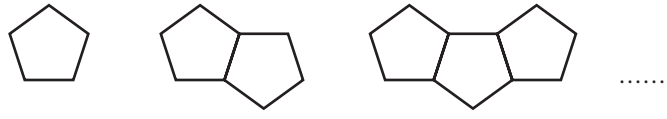
4. Bhí Siún ag traenáil le haghaidh rás maratóin. Mhéadaigh sí an fad a rith sí gach seachtain le 1, 2, 3, 4, 5, … chiliméadar. Sa chéad seachtain, rith sí 1 chiliméadar.

(i) Scríobh síos an fad a rith sí gach seachtain i rith na gcéad 6 seachtaine.
(ii) Cén tseachtain inar rith sí 29 ciliméadar?

5. Má tá $T_n = 4n - 3$, faigh T_1, T_5, T_{10}.

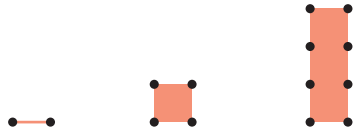
6. Má tá $T_n = (-2)^{n+1}$, faigh T_1, T_6, T_{11}.

7. Tarraing na chéad trí phatrún eile i ngach ceann de na seichimh seo a leanas, trí na léaráidí a scrúdú. Scríobh seicheamh uimhreacha do gach tacar patrún.

(i)

……

(ii)

……

(iii)

……

8. Meaitseáil gach *n*ú téarma (T_n) le ceann de na seichimh thíos:

(i) $T_n = 4n - 2$	A: 2, 4, 8, 16, …
(ii) $T_n = 2n^2$	B: 2, 8, 18, 32, …
(iii) $T_n = n(n + 1)$	C: 2, 6, 10, 14, …
(iv) $T_n = 2^n$	D: 2, 6, 12, 20, …

9. Maidir leis na huimhreacha aiceanta, ? = 1, 2, 3, 4, 5, … *n*, faigh an *n*ú téarma (T_n) i ngach ceann de na seichimh seo a leanas, trí na figiúirí a scrúdú:

(i) 5, 6, 7, 8, 9, …
(ii) 2, 4, 6, 8, 10, …
(iii) 2, 5, 8, 11, 14, …
(iv) 1, 4, 9, 16, 25, …
(v) 2, 5, 10, 17, 26, …
(vi) −1, 1, −1, 1, −1, …
(vii) 1, 5, 9, 13, 17, …
(viii) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, …
(ix) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, …
(x) (2×3), (3×4), (4×5), (5×6), …

10. Tugtar na chéad ocht dtéarma i seicheamh Fibonacci thíos. Déan cur síos i bhfocail ar an gcaoi a ndéantar an seicheamh agus uaidh sin scríobh amach na chéad cheithre théarma eile sa seicheamh.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … .

11. Taispeántar na chéad 5 líne de 'Thriantán Pascal' thall.

Cóipeáil na 5 líne seo agus, tríd an bpatrún a aimsiú, lean de thriantán Pascal a fhad le líne 8.

Tríd an triantán a scrúdú, faigh an *n*ú téarma, T_n, don

Líne 1					1				
Líne 2				1		1			
Líne 3			1		2		1		
Líne 4		1		3		3		1	
Líne 5	1		4		6		4		1

(i) seicheamh a dhéantar leis an dara huimhir i ngach líne

(ii) seicheamh uimhreacha a thairgtear leis an tríú huimhir i ngach líne

(iii) seicheamh a dhéantar le suim na n-uimhreacha i ngach líne

(iv) seicheamh a chruthaítear tríd an dara agus tríú huimhir i ngach líne a shuimiú.

Mír 4.2 Seichimh chomhbhreise

Seicheamh comhbhreise a thugtar ar sheicheamh ina n-athraíonn gach téarma le huimhir thairseach gach uair.

Mar shampla, $3,\ 7,\ 11,\ 15, \ldots\ldots$ (+4, +4, +4) cuirtear 4 le gach téarma.

$3,\ 1,\ -1, -3, \ldots\ldots$ (−2, −2, −2) baintear 2 ó gach téarma.

Más ionann an chéad téarma agus a $(= T_1)$, agus más ionann an difríocht idir théarmaí leantacha agus d (ar a dtugtar an chomhbhreis), ansin tugtar gach seicheamh comhbhreise leis seo:

$T_1,$	$T_2,$	$T_3,$	T_4	$\ldots\ldots$	T_n
$a,$	$a + d$	$a + 2d,$	$a + 3d,$	$\ldots\ldots$	$a + (n - 1)d$

(+d, +d, +d)

Don seicheamh: $3, 7, 11, 15, \ldots$

$$\left.\begin{aligned} a &= 3 \\ d &= 7 - 3 = 4 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} T_n &= a + (n - 1)d \\ &= 3 + (n - 1)4 \\ &= 3 + 4n - 4 \\ T_n &= 4n - 1. \end{aligned}$$

I ngach seicheamh comhbhreise,

$T_1 = a$

$T_2 - T_1 = d$

$T_n - T_{n-1} = d$

$T_n = a + (n - 1)d$

Sampla 1

Faigh an *n*ú téarma (T_n) sa seicheamh comhbhreise:

$-2,\ 3,\ 8,\ 13, \ldots\ldots$

agus uaidh sin faigh (i) T_{20} (ii) T_{21} (iii) $T_{21} - T_{20}$.

$$\left.\begin{aligned} a &= -2 \\ d &= 3 - (-2) = 5 \\ &\text{(chomh maith, } d = 8 - 3 = 5) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} T_n &= a + (n - 1)d \\ T_n &= -2 + (n - 1)5 \\ &= -2 + 5n - 5 \\ T_n &= 5n - 7 \end{aligned}$$

$\therefore\ T_{20} = 5(20) - 7 = 93$ agus $T_{21} = 5(21) - 7 = 98$

$\Rightarrow\ T_{21} - T_{20} = 98 - 93 = 5\ (= d).$

Sa seicheamh 3, 1, −1, −3, ... tá líon éigríochta téarmaí ann.

Sa seicheamh 3, 1, −1, −3, ... −35 tá líon críochta téarmaí ann.

Má tá $T_n = -35$, is féidir linn líon na dtéarmaí (n) sa seicheamh a fháil má tá an fhoirmle le haghaidh T_n ar eolas againn.

Sampla 2

Faigh líon na dtéarmaí sa seicheamh

1, −3, −7, −11, ... −251.

Sa seicheamh seo,

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ d &= -3 - 1 = -4 \\ T_n &= -251 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ -251 &= 1 + (n-1)(-4) \\ -251 &= 1 - 4n + 4 \\ 4n &= 256 \\ n &= \tfrac{256}{4} = 64 \end{aligned}$$

Tá 64 téarma sa seicheamh seo.

Sampla 3

I seicheamh comhbhreise, tá $T_4 = 6$ agus 3T2 = T_{10}. Faigh luach a agus luach d agus uaidh sin scríobh amach na chéad 6 théarma sa seicheamh.

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ T_4 &= a + (4-1)d = a + 3d \\ T_2 &= a + (2-1)d = a + d \\ T_{10} &= a + (10-1)d = a + 9d \end{aligned}$$

$$T_4 = 6 \qquad \text{agus} \qquad 3T_2 = T_{10}$$

$$\Rightarrow \quad a + 3d = 6 \qquad\qquad \begin{aligned} 3(a+d) &= a + 9d \\ 3a + 3d &= a + 9d \\ 2a - 6d &= 0 \\ \Rightarrow \quad a - 3d &= 0 \end{aligned}$$

Ag úsáid cothromóidí comhuaineacha

$$\begin{aligned} a - 3d &= 0 \\ a + 3d &= 6 \\ \hline 2a \quad &= 6 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

… ag suimiú na línte

Chomh maith

$$\begin{aligned} a - 3d &= 0 \\ 3 - 3d &= 0 \\ -3d &= -3 \\ d &= \left(\frac{-3}{-3}\right) = 1 \end{aligned}$$

Is é an seicheamh ná 3, 4, 5, 6, 7, 8, …

› Maidir leis an seicheamh comhbhreise $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, \ldots\ldots T_n$,

$$T_3 - T_2 = T_4 - T_3 = T_5 - T_4 = \text{an chomhbhreis } (d).$$

Go ginearálta:

$$T_{n+1} - T_n = d \text{ (an chomhbhreis).}$$

Is é atoradh an eolais thuas ná:

Más mian linn a chruthú gur seicheamh comhbhreise é seicheamh áirithe, ní mór dúinn a thaispeáint gur tairiseach é $T_{n+1} - T_n$

› Freisin, má tá $T_{n+1} - T_n > 0$, ansin tá an seicheamh méadaitheach

má tá $T_{n+1} - T_n < 0$, ansin tá an seicheamh laghdaitheach.

Nóta: Chun T_{n+1}, a fháil, ionadaigh $(n + 1)$ do n in T_n.

Má tá $T_n = 3n + 1$,

$$T_{n+1} = 3(n + 1) + 1 = 3n + 4.$$

Sampla 4

Más trí théarma leantacha iad $p + 2, 2p + 3$ agus $5p - 2$ i seicheamh comhbhreise, faigh luach p, $p \in \mathbb{R}$.

Cionn is go bhfuil trí théarma leantacha de sheicheamh comhbhreise againn,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad (2p + 3) - (p + 2) &= (5p - 2) - (2p + 3) \\ 2p + 3 - p - 2 &= 5p - 2 - 2p - 3 \\ p + 1 &= 3p - 5 \\ -2p &= -6 \\ p &= \left(\frac{-6}{-2}\right) = 3. \end{aligned}$$

Nóta: Is iad na chéad trí théarma sa seicheamh ná 5, 9, 13.

Sampla 5

Má tá (i) $T_n = \dfrac{n + 1}{2}$

(ii) $T_n = \dfrac{2}{n + 1}$, déan amach

(a) an seicheamh comhbhreise é

(b) cé acu atá an seicheamh méadaitheach nó laghdaitheach.

(i)

$$T_n = \frac{n+1}{2}$$

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2}$$

$$= \frac{n+2}{2}$$

$$T_{n+1} - T_n = \frac{n+2}{2} - \frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{\cancel{n} + 2 - \cancel{n} - 1}{2}$$

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ Is tairiseach é $T_{n+1} - T_n$

$\therefore$ Is seicheamh comhbhreise é T_n

Chomh maith leis sin, ós rud é go bhfuil $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{2}$,

i.e. > 0,

$\Rightarrow$ Is seicheamh méadaitheach é T_n.

(ii)

$$T_n = \frac{2}{n+1}$$

$$T_{n+1} = \frac{2}{(n+1)+1} = \frac{2}{n+2}$$

$$T_{n+1} - T_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1}$$

$$= \frac{2(n+1) - 2(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{2n} + 2 - \cancel{2n} - 4}{(n+2)(n+1)}$$

$$T_{n+1} - T_n = \frac{-2}{(n+2)(n+1)}$$

$\neq$ tairiseach … ós rud é go bhfuil an luach ag brath ar n.

$\therefore$ Ní seicheamh comhbhreise é T_n

Freisin,

$$T_{n+1} - T_n = \frac{-2}{(n+2)(n+1)} < 0.$$

Ós rud é go bhfuil $n \in \mathbb{N}$ agus go mbíonn sé deimhneach i gcónaí,

$\therefore$ Is seicheamh laghdaitheach é T_n.

Cleachtadh 4.2

1. Faigh T_n, an nú téarma sna seichimh chomhbhreise seo a leanas.
Uaidh sin faigh T_{22} i ngach seicheamh.

(i) 8, 13, 18, 23, … (ii) 16, 36, 56, 76, … (iii) 10, 7, 4, 1, …

2. Is é $T_n = 5n - 2$ an nú téarma i seicheamh comhbhreise.
Scríobh síos na chéad cheithre théarma.

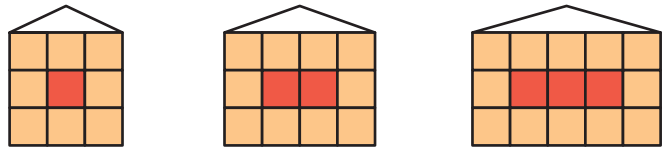
3. Faigh an méid téarmaí i ngach ceann de na seichimh chomhbhreise seo a leanas:

(i) $-5, -1, 3, 7, \ldots\ldots 75$ (ii) $2, 5, 8, 11, \ldots\ldots 59$ (iii) $-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \ldots\ldots 14$.

4. I seicheamh comhbhreise, $T_1 = 4$ agus $T_7 = 22$. Bain úsáid as cothromóidí comhuaineacha agus faigh

(i) luach a agus luach d (ii) na chéad chúig théarma sa seicheamh (iii) T_{20}.

5. Rinne Niamh táipéisí balla agus na dearaí seo in úsáid aici:



Dearadh 1 Dearadh 2 Dearadh 3

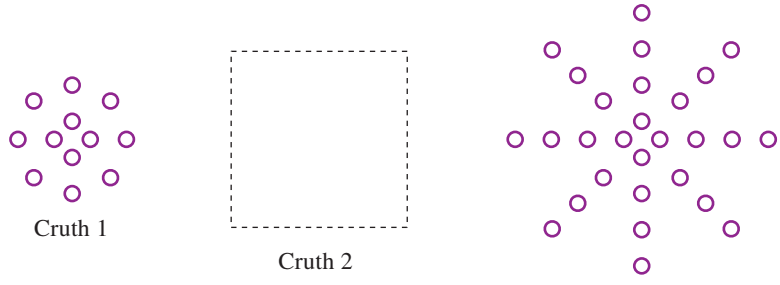
(i) Cá mhéad tíl dhearg agus tíl oráiste a bheidh de dhíth uirthi le haghaidh dhearadh 8?
(ii) An mbeidh 38 tíl de dhíth uirthi le ceann ar bith dá cuid dearaí? Mínigh do fhreagra.

6. I seicheamh comhbhreise, tá $T_{13} = 27$ agus tá $T_7 = 3T_2$. Faigh sloinn i dtéarmaí n do T_{13}, T_7 agus T_2 agus uaidh sin faigh luach a agus luach d.
Scríobh síos na chéad sé théarma sa seicheamh.

7. (i) Más trí théarma leantacha iad $2k + 2$, $5k - 3$ agus $6k$ i seicheamh comhbhreise, faigh luach k, $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Ag glacadh leis gur trí théarma leantacha iad $4p$, $-3 - p$ agus $5p + 16$ i seicheamh comhbhreise, faigh luach p, $p \in \mathbb{Z}$.

8.



Cruth 1 Cruth 2 Cruth 3

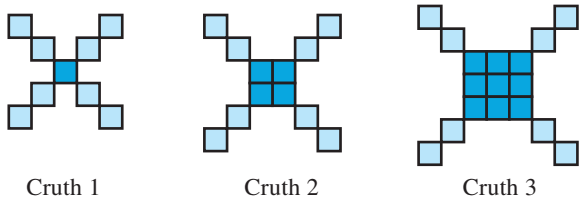
Tarraingíodh trí chruth ar bhalla.
Baineadh an dara cruth de thaisme. Ag glacadh leis gur tarraingíodh na cruthanna i seicheamh comhbhreise, tarraing cruth 2.

(i) Scríobh seicheamh uimhreacha don mhéid ciorcal a úsáidtear i ngach cruth agus uaidh sin faigh T_n don seicheamh.
(ii) Cá mhéad ciorcal atá de dhíth le haghaidh chruth 15?
(iii) Cén cruth a bhfuil 164 ciorcal de dhíth air?

9. Is é $T_n = 4n - 2$ an nú téarma i seicheamh áirithe.
Fíoraigh gur seicheamh comhbhreise é.

10. Má tá $T_n = n(n + 2)$ do sheicheamh áirithe, fíoraigh nach seicheamh comhbhreise é.

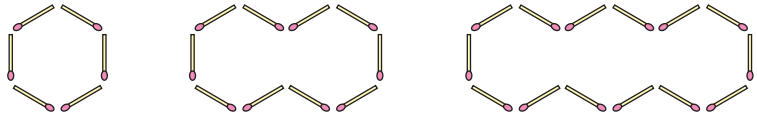
11. Lean den phatrún trí dhá chruth eile a chur leis.



Cruth 1 Cruth 2 Cruth 3

(i) Cá mhéad tíl le dath éadrom a bheidh de dhíth le haghaidh chruth 7?
(ii) Cá mhéad tíl le dath dorcha a bheidh de dhíth le haghaidh chruth 7?
(iii) Scríobh slonn le haghaidh T_n, líon na dtíleanna atá de dhíth don nú cruth.
(iv) Cruthaigh nach seicheamh comhbhreise é an seicheamh a ghintear.

12. Rinne Sorcha an patrún heicseagán seo a leanas ag úsáid cipíní.



1 heicseagán 2 "heicseagán" 3 "heicseagán"

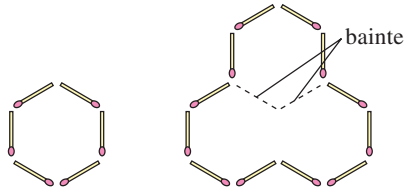
Lean sí ar aghaidh leis an phatrún seo. Ba mhian léi slonn a aimsiú le haghaidh T_n. Cóipeáil agus comhlánaigh an tábla seo a leanas.

Líon na "heicseagán"	1	2	3	4	…	…	10	…	( )	…	…	…	30
Imlíne	6	10	( )	( )	…	…	( )	…	82	…	…	…	( )

(i) Nuair a bhí líon áirithe "heicseagán" críochnaithe aici, chuntais Sorcha go raibh 87 cipín fágtha. An bhfuil go leor aici le dearaí eile a dhéanamh, sa chaoi nach mbeidh cipín ar bith fágtha? Mínigh do fhreagra.

(ii) Cruthaigh gur seicheamh comhbhreise é an seicheamh a dhéantar le líon na gcipíní sna cruthanna.

(iii) Shocraigh Sorcha an dearadh a athrú ansin, chun patrún le heicseagán cruachta a chruthú, agus na cipíní sa lár bainte.



Cá mhéad leibhéal críochnaithe a d'fhéadfadh sí a dhéanamh le 122 cipín, agus cá mhéad cipín a bheadh fágtha?

13. Tar éis obráid a bheith agat ar do ghlúin, athraíonn do thraenálaí do chlár reathaíochta de réir a chéile. Molann sé reathaíocht ar feadh 12 nóiméad gach lá i rith na chéad seachtaine. Gach seachtain ina dhiaidh sin, molann se go méadaíonn tú an t-am sin le 6 nóiméad gach lá. Cén tseachtain ina mbeidh tú ag rith 60 nóiméad in aghaidh an lae?

Mír 4.3 Sraitheanna comhbhreise

Nuair a shuimítear téarmaí seichimh, déantar **sraith**.

Is seicheamh é $T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots T_n$; m.sh. 3, 6, 9, 12, …

Is sraith é $T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \ldots + T_n$; m.sh. $3 + 6 + 9 + 12 + \ldots$

Úsáidtear $\boldsymbol{S_n}$ le suim n téarma na sraithe a léiriú.

i.e. $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \ldots T_n$

Chun slonn a aimsiú do S_n, maidir le seicheamh comhbhreise tugaimid faoi deara go bhfuil,

$T_n = a + (n - 1)d$ (áit a bhfuil a = T_1, an chéad téarma, agus d = an chomhbhreis)

$$\Rightarrow \quad T_{n-1} = a + [(n - 1) - 1]d$$
$$= a + (n - 2)d$$
$$T_3 = a + 2d$$
$$T_2 = a + d$$
$$T_1 = a$$

Uaidh sin,

	$S_n =$	T_1	T_2	T_3	$\ldots T_{n-1}$	T_n
$\Rightarrow$	$S_n =$	a	$+ a + d$	$+ a + 2d$	$\ldots + a + (n-2)d$	$+ a + (n-1)d$
Freisin,	$S_n =$	$a + (n-1)d$	$+ a + (n-2)d$	$a + (n-3)d$	$\ldots + a + d$	$+ a$ (an t-ord a aisiompú)
$\Rightarrow$	$2S_n =$	$2a + (n-1)d$	$+ 2a + (n-1)d$	$2a + (n-1)d$	$\ldots + 2a + (n-1)d$	$+ 2a + (n-1)d$

$\Rightarrow\ 2S_n = n[2a + (n-1)]d$ … ós rud é go bhfuil n téarma chomhionanna sa tsuim.

$\Rightarrow\ S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)]d$ … áit arb é a an chéad téarma, d an chomhbhreis, n líon na dtéarmaí.

Sampla 1

Faigh suim na sraithe $4 + 11 + 18 + 25 + \ldots\ldots + 144$.

Ag scrúdú na sraithe, faighimid: $a = 4$

$d = 11 - 4 = 7$

Chun n a fháil, an méid téarmaí suas go dtí an téarma 144, úsáidimid

$$T_n = a + (n-1)d$$
$$144 = 4 + (n-1)7 = 4 + 7n - 7$$
$$144 = 7n - 3$$
$$7n = 147$$
$$n = \left(\frac{147}{7}\right) = 21$$ … i.e. tá 21 téarma sa seicheamh seo.

$$\therefore\quad S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$
$$= \frac{21}{2}\{2(4) + (21-1)7\}$$
$$S_n = 1554.$$

Sampla 2

Chun breithlá a neachta a cheiliúradh, tairgeann fear cuntas coigiltis a oscailt agus €50 a chur ann. Tairgeann sé chomh maith €10 de bhreis ar an méid a chuir sé ann an bhliain roimhe a chur sa chuntas gach bliain go dtí go mbeidh a neacht 21 bliain d'aois.

(i) Faigh slonn le haghaidh S_n, suim an airgid atá i dtaisce tar éis n bliain.

(ii) Faigh S_{21}, an méid iomlán atá coigilte tar éis 21 bliain.

$$\left.\begin{aligned} a &= €50 \\ d &= €10 \end{aligned}\right\}\quad S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$
$$= \frac{n}{2}\{2(50) + (n-1)10\}$$
$$= \frac{n}{2}\{100 + 10n - 10)\}$$
$$\Rightarrow\ S_n = \frac{n}{2}\{10n + 90\}$$
$$S_{21} = \frac{21}{2}\{10(21) + 90\} = €3150$$

Tugaimid faoi deara $S_1 = T_1$

$$S_2 = T_1 + T_2$$

$$S_3 = T_1 + T_2 + T_3 \text{ etc.}$$

$$\therefore \quad S_3 - S_2 = \qquad T_3$$

De ghnáth, $S_n - S_{n-1} = T_n$

Agus S_n agat faigh T_n :

$$S_n - S_{n-1} = T_n$$

Sampla 3

Má tá $S_n = \text{n}2 - 4n$, faigh slonn le haghaidh T_n agus uaidh sin déan amach an seicheamh comhbhreise é.

$$S_n = n^2 - 4n$$

$$S_{n-1} = (n-1)^2 - 4(n-1) \quad \text{... cuir isteach } n - 1 \text{ in áit } n$$

$$= n^2 - 2n + 1 - 4n + 4$$

$$\Rightarrow \quad S_{n-1} = n^2 - 6n + 5$$

$$T_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 4n - (n^2 - 6n + 5)$$

$$= n^2 - 4n - n^2 + 6n - 5.$$

$$T_n = 2n - 5$$

Más seicheamh comhbhreise é, caithfidh $T_n - T_{n-1}$ a bheith tairiseach.

$$\Rightarrow \quad T_n - T_{n-1} = 2n - 5 - [2(n-1) - 5]$$

$$= 2n - 5 - (2n - 7)$$

$$= 2n - 5 - 2n + 7$$

$$= 2 \text{ , i.e. tairiseach.}$$

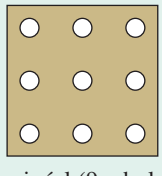
Mar sin de, is seicheamh comhbhreise é.

Sampla 4

Tá comhlacht soilsiúcháin ag déanamh painéil solais ina bhfuil líon na mbolgán i ngach painéal i seicheamh comhbhreise.

Do na chéad 10 bpainéal, úsáideadh 165 bolgán.

Más é an tríú painéal atá sa léaráid thíos, faigh a, an chéad téarma sa seicheamh, agus d, an chomhbhreis.



3ú painéal (9 mbolgán)

Uaidh sin tarraing léaráid de na chéad cheithre phainéal.

$T_n = a + (n - 1)d$ Freisin, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$T_3 = a + (3 - 1)d$

$T_3 = a + 2d = 9$ ..... tá a fhios againn go bhfuil $S_n = 165$ áit a bhfuil $n = 10$

$\Rightarrow \quad S_{10} = \frac{10}{2}\{2a + (10 - 1)d\}$

$S_{10} = 10a + 45d = 165.$

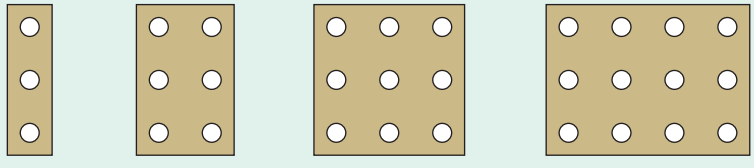
$$\begin{aligned} a + 2d &= 9 \\ \Rightarrow \quad 10a + 20d &= 90 \\ \text{agus} \quad 10a + 45d &= 165 \\ \hline -25d &= -75 \end{aligned}$$ ... ag dealú

$$\Rightarrow \quad d = \left(\frac{-75}{-25}\right) = 3$$

Má tá $d = 3$, tá $a + 2(3) = 9$

$\Rightarrow \quad a = 3$

Is é seicheamh na mbolgán sna painéil ná 3, 6, 9, 12.



Nodaireacht sigme (Σ)

Is bealach éifeachtúil í nodaireacht sigme le sraith a léiriú.

$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \ldots\ldots T_n$

$= \sum_{r=1}^{n} T_r$ a léitear mar shuim gach luacha ar T_r de réir mar a athraíonn r ó 1 go n.

$\sum_{r=1}^{6} (2r + 1) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ ($n = 6$ théarma)

$\sum_{r=2}^{5} \frac{r^2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{9}{3} + \frac{16}{3} + \frac{25}{3}$ ($n = 4$ théarma)

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{4} r(r + 1) &= 0(0 + 1) + 1(1 + 1) + 2(2 + 1) + 3(3 + 1) + 4(4 + 1) \\ &= 0 + 2 + 6 + 12 + 20 \end{aligned}$$ ($n = 5$ théarma)

$\sum$ = suim

$\sum_{r=1}^{4} T_r$ suim $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

Sampla 5

(i) Úsáid nodaireacht sigme ($\sum$) le $2 + 6 + 10 + 14 + \ldots\ldots$ a léiriú le haghaidh 45 téarma.

(ii) Cén luach ar n a thugann $\sum_{r=1}^{n} 3r - 5 = 90$?

(iii) Faigh luach $\sum_{r=1}^{8} 4r - 1$.

(i) $2 + 6 + 10 + \ldots\ldots$ $\left.\begin{array}{r} a = 2 \\ d = 4 \end{array}\right\}$ $\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ &= 2 + (n-1)4 \end{aligned}$

$$T_n = 4n - 2$$

$$\Rightarrow \quad T_r = 4r - 2.$$

$\therefore \quad 2 + 6 + 10 + \ldots\ldots$ do 45 téarma $= \sum_{r=1}^{r=45} (4r - 2)$

(ii) $\sum_{r=1}^{n} (3r - 5) = [3(1) - 5] + [3(2) - 5] + [3(3) - 5)] + \ldots\ldots 3n - 5$

$\qquad\qquad\qquad = \quad -2 \quad + \quad 1 \quad + \quad 4 \quad + \ldots\ldots 3n - 5.$

$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ d = 1 - (-2) = 3 \\ S_n = 90 \end{array}\right\}$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \\ 90 &= \frac{n}{2}\{2(-2) + (n-1)(3)\} \\ 180 &= n(-4 + 3n - 3) \\ 180 &= n(3n - 7) \\ \Rightarrow \quad 3n^2 - 7n - 180 &= 0 \\ (3n + 20)(n - 9) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad n - 9 = 0$ nó $3n + 20 = 0$

$\therefore \quad n = 9$ nó $n = \frac{-20}{3}$

$\therefore \quad n = 9$ ós rud é go bhfuil $n \in \mathbb{N}$

(iii) $\sum_{r=1}^{8} 4r - 1 = 3 + 7 + 11 + \ldots\ldots$ ($n = 8$ dtéarma)

$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ d = 7 - 3 = 4 \end{array}\right\}$

$$\begin{aligned} \therefore \quad S_n &= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \\ S_8 &= \frac{8}{2}\{2(3) + (8-1)4\} \\ &= 4(34) = 136 \end{aligned}$$

$\therefore \quad \sum_{r=1}^{8} 4r - 1 = 136$

Cleachtadh 4.3

1. Faigh S_n agus S_{20} i ngach ceann de na seichimh chomhbhreise seo a leanas:

(i) $1 + 5 + 9 + 13 + \ldots..$ (ii) $50 + 48 + 46 + 44 + \ldots..$

(iii) $1 + 1.1 + 1.2 + 1.3 \ldots..$ (iv) $-7 - 3 + 1 + 5 + \ldots..$

2. Faigh suim gach ceann acu seo a leanas:

(i) $6 + 10 + 14 + 18 + \ldots..50$ (ii) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots..100$

(iii) $80 + 74 + 68 + 62 \ldots..-34$

3. Cá mhéad téarma ón tsraith $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots$ a chaithfear a shuimiú chun iomlán de 98 a dhéanamh?

4. Má tá $T_n = 5 - 3n$, scríobh síos an chéad téarma a, agus an chomhbhreis d. Uaidh sin faigh S_{10}.

5. Coiglíonn Anna airgead gach seachtain chun printéir a cheannach a chosnaíonn €190. An plean atá aici ná €10 a chur i leataobh ar dtús agus €2 níos mó gach seachtain ina dhiaidh sin (i.e. €12, €14, etc.) go dtí go mbeidh go leor airgid aici chun an printéir a cheannach. Ag an ráta seo, cá mhéad seachtain a thógfaidh sé ar Anna an t-airgead a choigilt le haghaidh an phrintéara?

6. Faigh luach (i) $\sum_{r=1}^{6}(3r+1)$ (ii) $\sum_{r=0}^{5}(4r-1)$ (iii) $\sum_{r=1}^{100} r$

7. Scríobh gach ceann de na sraitheanna seo a leanas i nodaireacht sigme.

(i) $4 + 8 + 12 + 16 + \ldots..124$ (ii) $-10 - 9\frac{1}{2} - 8 - 7\frac{1}{2} + \ldots..4$

(iii) $10 + 10.1 + 10.2 + 10.3 + \ldots..50$

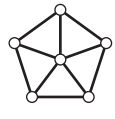
8. I sraith chomhbhreise, tá $T_4 = 15$ agus tá $S_5 = 55$.
Faigh na chéad chúig théarma den tsraith.

9. Is é 18 an tríú téarma i seicheamh comhbhreise agus is é 30 an seachtú téarma.
Faigh suim an chéad 33 téarma.

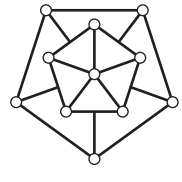
10. I rang ealaíne, déanann dalta tástáil ar an dearadh le haghaidh líon taibhreamh, ag úsáid tfáinní agus snáitheanna. Taispeántar na chéad trí dhearadh thíos. Ba mhian leis leanúint ar aghaidh le patrún na ndearaí. Cá mhéad fáinne a bheidh de dhíth air le haghaidh

(i) dhearadh 10 (ii) dhearadh 20?

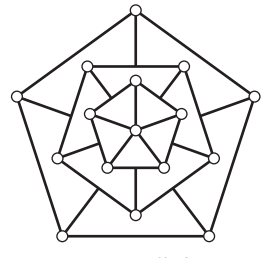
Cá mhéad fáinne san iomlán a bheidh de dhíth air le haghaidh gach ceann den 20 dearadh?



Dearadh 1



Dearadh 2



Dearadh 3

11. Is é -12 an chéad téarma i seicheamh comhbhreise agus is é 40 an téarma deiridh. Más é 196 suim na sraithe, faigh líon na dtéarmaí sa seicheamh agus an chomhbhreis.

12. Taispeáin gurb é $\frac{n}{2}(n+1)$ suim na n-uimhreacha aiceanta ó 1 go n, agus úsáid an fhoirmle chun suim $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots 99$ a aimsiú.

13. Is é $5\frac{1}{2}$ an t-aonú téarma is fiche i seicheamh comhbhreise agus is é $94\frac{1}{2}$ suim an chéad 21 téarma.

Faigh an chéad téarma agus an chomhbhreis.

Uaidh sin, faigh S_{30}, suim an chéad 30 téarma.

14. I seicheamh comhbhreise, $T_{21} = 37$ agus $S_{20} = 320$. Faigh suim na gcéad deich dtéarma.

15. Taispeáin gurb é $S_n = \dfrac{n(a+l)}{2}$ suim seicheamh comhbhreise go n téarma, áit arb é l an téarma deiridh.

16. Mínigh an fáth nach féidir S_∞ (an tsuim go héigríoch) a fháil do sheicheamh comhbhreise.

Mír 4.4 Seichimh iolraíocha

Seicheamh iolraíoch a thugtar ar sheicheamh ina bhfaightear gach téarma ach an téarma roimhe sin a iolrú faoi mhéid tairiseach.

Mar shampla, $\overset{\times 3}{\rightarrow}\ \overset{\times 3}{\rightarrow}\ \overset{\times 3}{\rightarrow}$

$2,\ 6,\ 18,\ 54, \ldots\ldots$ gach téarma ag méadú de réir fachtóir 3.

$\overset{\times \frac{1}{2}}{\rightarrow}\ \overset{\times \frac{1}{2}}{\rightarrow}\ \overset{\times \frac{1}{2}}{\rightarrow}$

$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2}, \ldots\ldots$ gach téarma ag laghdú de réir fachtóir $\frac{1}{2}$.

I gcás seicheamh iolraíoch ar bith, le a a chuirtear an chéad téarma in iúl agus le r a chuirtear an cóimheas idir théarmaí leantacha in iúl (tugtar an comhiolraitheoir ar r); mar sin, is féidir gach seicheamh iolraíoch a scríobh mar seo:

$$\begin{array}{ccccccc} & \overset{+r}{\rightarrow} & \overset{+r}{\rightarrow} & \overset{+r}{\rightarrow} & \overset{+r}{\rightarrow} & & \\ T_1, & T_2, & T_3, & T_4, & T_5, & \ldots\ldots & T_n \\ a, & ar, & ar^2, & ar^3, & ar^4, & \ldots\ldots & ar^{n-1} \end{array}$$

Féach ar an seicheamh:

$$\left.\begin{array}{rcccccc} & 2, & 6, & 18, & 54, & \ldots\ldots & a.r^{n-1} \\ = & 2, & 2 \times 3, & 2 \times 3^2, & 2 \times 3^3, & \ldots\ldots & 2 \times 3^{n-1} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} a = 2 \\ r = \frac{6}{2} = 3 \\ T_n = ar^{n-1} \\ T_n = 2.3^{n-1} \end{array}$$

Sampla 1

Faigh T_n agus T_{10} sa seicheamh iolraíoch 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, …

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ r &= \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} T_n &= a.r^{n-1} \\ &= 1.\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4^{n-1}} \\ T_n &= 4^{-n+1} = 4^{1-n} \\ T_{10} &= 4^{1-10} = 4^{-9} = \frac{1}{262\,144} \end{aligned}$$

I ngach seicheamh iolraíoch:

$$\begin{aligned} T_1 &= a \\ \frac{T_2}{T_1} &= r \\ T_n &= ar^{n-1} \\ \frac{T_{n+1}}{T_n} &= r \end{aligned}$$

Sampla 2

I seicheamh iolraíoch, $T_3 = 32$ agus $T_6 = 4$.

Faigh luach a agus r agus uaidh sin, scríobh síos na chéad sé théarma sa seicheamh.

$$\begin{aligned} T_n &= a.r^{n-1} \\ T_3 &= a.r^{3-1} = ar^2 = 32 \\ T_6 &= a.r^{6-1} = ar^5 = 4 \end{aligned}$$

Roinn na téarmaí seo:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{a}r^5}{\cancel{a}r^2} &= \frac{4}{32} \\ r^3 &= \frac{1}{8} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Má tá $r = \frac{1}{2}$,

tá $ar^2 = 32$

$\Rightarrow \quad a.\left(\frac{1}{4}\right) = 32$

$a = 128.$

Is é 128, 64, 32, 16, 8, 4 an seicheamh.

Nóta:

- Má thugtar trí théarma leantacha, T_1, T_2, T_3, i seicheamh iolraíoch dúinn, feicfimid go bhfuil $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} =$ (r, an comhiolraitheoir).
- Feicfimid freisin gur trí théarma leantacha i seicheamh iolraíoch iad $\frac{a}{r}, a, ar$ áit arb é $\frac{a}{r}$ an chéad téarma agus r an comhiolraitheoir.

  Nuair a iolraímid na téarmaí seo, faighimid $\frac{a}{\cancel{r}} \times a \times a\cancel{r} = a^3$, i.e. ciúb an téarma láir.

  Mar shampla: Tá 2, 6, 18 i seicheamh iolraíoch,

  $$\Rightarrow \quad 2 \times 6 \times 18 = 216 = 6^3$$

  Freisin, tá 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$ i seicheamh iolraíoch,

  $$\Rightarrow \quad 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

Sampla 3

Is iad $3, x, x + 6, \ldots$ na chéad trí théarma i seicheamh iolraíoch ina bhfuil na téarmaí deimhneach.

Faigh (i) luach x (ii) an deichiú téarma sa seicheamh.

(i) I gcás seicheamh iolraíoch, $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$, i.e., $\frac{x}{3} = \frac{x+6}{x}$

$$\therefore \quad x^2 = 3x + 18$$

$$\therefore \quad x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\therefore \quad (x - 6)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 6 \text{ nó } x = -3.$$

$x = 6$ mar go bhfuil na téarmaí deimhneach $\Rightarrow$ is é 3, 6, 12, … an seicheamh.

(ii) $T_n = a.r^{n-1}$

$T_{10} = a.r^{10-1} = a.r^9 = 3.2^9 = 1536$

Sampla 4

Is é 216 an toradh nuair a iolraítear na chéad trí théarma i seicheamh iolraíoch faoina chéile. Is é 21 a suim. Glac leis go bhfuil an comhiolraitheoir níos lú ná 1.
Faigh na chéad trí théarma sa seicheamh.

Bíodh na chéad trí théarma $= \frac{a}{r}, a, ar$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{r} \times a \times ar = a^3 = 216$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{216} = 6$$

Freisin, $\frac{a}{r} + a + ar = 21$

$$\frac{6}{r} + 6 + 6r = 21$$

$$\frac{6}{r} + 6r - 15 = 0$$

$$6 + 6r^2 - 15r = 0$$

$$\therefore \quad 6r^2 - 15r + 6 = 0$$

$$(2r - 1)(r - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = \tfrac{1}{2} \text{ or } r = 2.$$

Ó tá $r < 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$.

Mar sin, is iad $\frac{a}{r}, a, ar = \frac{6}{\left(\frac{1}{2}\right)}, 6, 6\left(\frac{1}{2}\right) = 12, 6, 3$ na chéad trí théarma.

Sampla 5

Faigh líon na dtéarmaí sa seicheamh iolraíoch $81, 27, 9, \ldots \frac{1}{27}$.

$$\left.\begin{aligned} a &= 81 \\ r &= \frac{27}{81} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$$

Bíodh $T_n = \frac{1}{27}$

$$\begin{aligned} T_n &= a.r^{n-1} \\ &= 81.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{27} \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{3^{n-1}} &= \frac{1}{27 \times 81} \\ \Rightarrow \quad 3^{n-1} &= 27 \times 81 \\ \Rightarrow \quad 3^{n-1} &= 3^3 \times 3^4 = 3^7 \end{aligned}$$

$\therefore \quad n - 1 = 7$

$n = 8 \quad \Rightarrow$ tá ocht dtéarma sa seicheamh.

Nóta: Nuair a bhímid ag réiteach cothromóide ar nós $4^{n-1} = 4096$, is féidir linn dhá mhodh éagsúla a úsáid.

Modh A: Sloinn 4096 mar chumhacht de 4 ag úsáid áireamháin agus 'triail agus earráid'.

$$\therefore \quad 4^{n-1} = 4096 = 4^6$$
$$n - 1 = 6$$
$$n = 7$$

Modh B: Logartaim a úsáid.

$$\begin{aligned} 4^{n-1} &= 4096 \\ \Rightarrow \quad \log 4^{n-1} &= \log 4096 \\ \therefore \quad (n-1)\log 4 &= \log 4096 \\ n - 1 &= \frac{\log 4096}{\log 4} = 6 \\ \therefore \quad n &= 7 \end{aligned}$$

(Féach caibidil 7).

Seichimh easpónantúla

Cruthaíonn feidhmeanna easpónantúla san fhoirm $y = Aa^x$, áit arb é A an bunluach agus a an t-iolraitheoir nó an comhiolraitheoir, seichimh iolraíocha.

Samhlaigh liathróid ag titim ó airde 10 m.

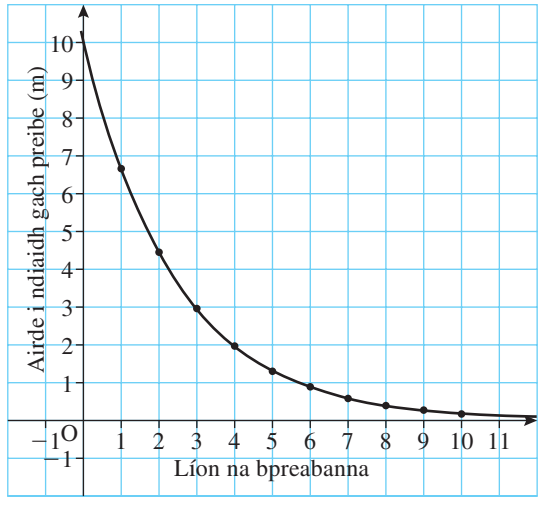
Má phreabann an liathróid ar ais suas go $\frac{2}{3}$ dá hairde bunaidh ar gach preab, tugann an patrún seo airde na liathróide:

I ndiaidh aon phreibe amháin: $10 \times \frac{2}{3} = 10\left(\frac{2}{3}\right)^1$

I ndiaidh dhá phreab: $10 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 10\left(\frac{2}{3}\right)^2$

I ndiaidh trí phreab: $10 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 10\left(\frac{2}{3}\right)^3$

I ndiaidh n preab: $10 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$



Sampla 6

Ligtear do liathróid titim ó airde 27 m. Cailleann an liathróid $\frac{2}{3}$ dá hairde ar gach preab.

(i) Faigh airde na liathróide ar gach preab dá céad cheithre phreab.
(ii) Uaidh sin, scríobh síos airde na liathróide i ndiaidh an 10ú preab.
(iii) I ndiaidh cé acu preab a mbeidh an liathróid 2.5 m os cionn na talún, ar a mhéid?

(i) I ndiaidh na chéad phreibe, beidh an liathróid $27 \times \frac{1}{3} = 9$ m os cionn na talún.
I ndiaidh an dara preab, beidh an liathróid $27 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 3$ m.
I ndiaidh an tríú preab, beidh an liathróid $27 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 1$ m.
I ndiaidh an ceathrú preab, beidh an liathróid $27 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ m.

(ii) I ndiaidh an 10ú preab, beidh an liathróid $27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 0.00046$ m.

(iii) Chun n, líon na bpreabanna a thabharfaidh airde 2.5 m, a fháil,

$$\text{bíodh } 27 \times \left(\tfrac{1}{3}\right)^n = 2.5$$
$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^n = 0.093$$
$$\ln\left(\tfrac{1}{3}\right)^n = \ln(0.093)$$
$$n \ln\left(\tfrac{1}{3}\right) = \ln(0.093) \quad \Rightarrow n = \left(\frac{\ln(0.093)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}\right) = 2.16 \text{ preab.}$$

Mar go gcaithfidh líon na bpreabanna a bheith ina uimhir scoite (ina shlánuimhir), i ndiaidh dhá phreab *beidh* an liathróid os cionn 2.5 m.

Mar sin, glacfaidh sé trí phreab ar an liathróid le bheith cinnte go mbeidh an liathróid faoi 2.5 m.

Cleachtadh 4.4

1. Déan amach cé acu de na seichimh seo a leanas atá ina seiceamh iolraíoch.
Faigh comhiolraitheoirí na seicheamh seo agus scríobh síos an chéad dá théarma eile i ngach seicheamh.

(i) $3, 9, 27, 81, \ldots$
(ii) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$
(iii) $-1, 2, -4, 8, \ldots$
(iv) $1, -1, 1, -1, \ldots$
(v) $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}, \ldots$
(vi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$
(vii) $1, 1.1, 1.21, 1.331, \ldots$
(viii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \ldots$
(ix) $2, 4, -8, -16, \ldots$
(x) $\frac{3}{4}, \frac{9}{2}, 27, 162, \ldots$

2. Is seicheamh iolraíoch é gach ceann de na seichimh a leanas.
Faigh a agus r agus uaidh sin, faigh an téarma a luaitear.

(i) $5, 10, \ldots$ (T_{11})
(ii) $10, 25, \ldots$ (T_7)
(iii) $1.1, 1.21, \ldots$ (T_8)
(iv) $24, -12, 6, \ldots$ (T_{10})

3. Má tá $T_2 = 12$ agus $T_5 = 324$, faigh a agus r agus uaidh sin, scríobh síos na chéad chúig théarma sa seicheamh.

4. Faigh luach r más é 6 an tríú téarma agus 1458 an t-ochtú téarma.

5. Scríobh síos na chéad chúig théarma sa seicheamh iolraíoch arb é 4 an dara téarma ann agus $-\frac{1}{16}$ an cúigiú téarma ann.

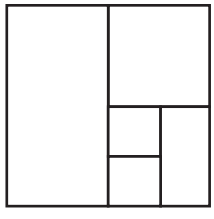
6. A:

.....etc.

B:

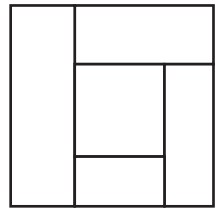
.....etc.

C:



.....etc.

D:



.....etc.

Trí iniúchadh, socraigh cé acu ceann de na patrúin thuas a chruthaíonn seicheamh iolraíoch. Tarraing an chéad phatrún eile i gcás na seicheamh atá iolraíoch.

7. Is trí uimhir leantacha i seicheamh iolraíoch iad n, -2 agus $n + 3$. Faigh luach n agus uaidh sin, scríobh síos na chéad cheithre théarma eile sa seicheamh.

8. Is é -63 an tríú téarma i seicheamh iolraíoch. Is é 189 an ceathrú téarma. Faigh

(i) luachanna a agus r

(ii) slonn ar T_n.

9. Is é 16 an chéad téarma i seicheamh iolraíoch agus is é 9 an cúigiú téarma. Cad é luach an seachtú téarma?

10. Is é 27 toradh na gcéad trí théarma i seicheamh iolraíoch. Is é 13 a suim. Faigh na chéad cheithre théarma sa seicheamh.

11. Is é $T_n = 3 \times 2^{n-1}$ an nú téarma, T_n, i seicheamh iolraíoch. Scríobh síos na chéad chúig théarma sa seicheamh san fhoirm is simplí díobh.

12. Má tá $T_n = 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$, scríobh amach na chéad cheithre théarma sa seicheamh.

13. Scríobh amach na chéad cheithre théarma sa seicheamh a shainíonn $T_n = (-1)^{n+1} \times \dfrac{5}{2^{n-4}}$.

14. Más iad seo a leanas na chéad trí théarma i seicheamh iolraíoch, faigh dhá luach fhéideartha ar x agus uaidh sin, scríobh síos dhá sheicheamh fhéideartha do gach ceann.

(i) $x - 3$, x agus $3x + 4$ (ii) $x + 1$, $x + 4$ agus $3x + 2$

(iii) $x - 2$, x agus $x + 3$ (iv) $x - 6$, $2x$ agus x^2.

15. Taispeáin gur seicheamh iolraíoch é an seicheamh arb é $T_n = 2 \times 3^n$ an nú téarma ann.

Chun a léiriú go bhfuil seicheamh iolraíoch, caithfear a léiriú gur tairiseach (r) é $\frac{T_{n+1}}{T_n}$.

16. Fiosraigh an seicheamh iolraíoch é an seicheamh $T_n = 3 \times n^2$.

17. Faigh líon na dtéarmaí i ngach ceann de na seichimh iolraíocha seo:

(i) $5, 15, 45, \ldots\ldots 3645$ (ii) $48, 6, \frac{3}{4}, \ldots\ldots \frac{3}{2048}$

18. Ligtear do chruinneog rubair titim ó airde 27 m, síos ar urlár coincréite. Gach uair a bhuaileann sí an choincréit, preabann sí ar ais suas go $\frac{2}{3}$ na hairde bunaidh. Faigh

(i) airde gach ceann de na chéad cheithre phreab

(ii) foirmle d'airde an nú preab

(iii) airde an 12ú preab, ag úsáid na foirmle a fuair tú in (ii).

19. Tugann $A = €4000\,(1.03)^t$, áit arb é t líon blianta an infheistithe, luach suim airgid a cuireadh i dtaisce ar ús iolraithe 3% sa bhliain. Faigh

(i) an tsuim airgid a cuireadh i dtaisce

(ii) luach an infheistithe ag deireadh gach ceann de na chéad cheithre bliana

(iii) luach an infheistithe ag deireadh an 10ú bliain

(iv) líon na mblianta, ceart go dtí an bhliain is gaire, a ghlacfaidh sé ar an infheistíocht a luach a dhúbailt.

20. Tugann $A = P(1 + i)^t$ luach infheistíochta áirithe, áit arb é P an tsuim a cuireadh i dtaisce, t líon na mblianta agus i an ráta úis, sloinnte mar dheachúil.
Má mhéadaigh €2500 i dtaisce go €3047, thar thréimhse 10 mbliana, ríomh an ráta úis (ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha).

Mír 4.5 Sraitheanna iolraíocha

Nuair a shuimímid téarmaí seichimh iolraíoch, faighimid **sraith iolraíoch**.

Mar shampla, is sraith iolraíoch é $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$.

Chun suim sraithe iolraíche a fháil, úsáidimid an modh seo a leanas:

$$S_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \ldots\ldots \cancel{ar^{n-3}} + \cancel{ar^{n-2}} + \cancel{ar^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad r.S_n = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \ldots\ldots \cancel{ar^{n-3}} + \cancel{ar^{n-2}} + \cancel{ar^{n-1}} + ar^n$$

… gach téarma a iolrú faoi r

Dealaímid: $S_n - rS_n = a - ar^n$

$$\therefore \quad S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Is é $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ suim n téarma i seicheamh iolraíoch, áit arb é a an chéad téarma agus r an comhiolraitheoir.

Sampla 1

Faigh T_5 agus S_5 i ngach ceann díobh seo a leanas:

(i) $1 + 3 + 9 + \ \ldots$ ii) $1(+ \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$

(i) $a = 1$, $r = \frac{3}{1} = 3$

$$T_n = ar^{n-1}$$
$$T_n = 1.3^{n-1}$$
$$= 3^{n-1}$$
$$\therefore \ T_5 = 3^{5-1}$$
$$= 3^4$$
$$= 81$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$
$$= \frac{1(1 - 3^n)}{1 - 3}$$
$$= \frac{1 - 3^n}{-2}$$
$$S_n = \frac{3^n - 1}{2}$$
$$\therefore \ S_5 = \frac{3^5 - 1}{2} = 121$$

(ii) $a = 1$, $r = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$

$$T_n = ar^{n-1}$$
$$= 1.\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$T_n = \frac{1}{4^{n-1}}$$
$$\therefore \ T_5 = \frac{1}{4^{5-1}}$$
$$T_5 = \frac{1}{4^4}$$
$$= \frac{1}{256}$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$
$$= \frac{1\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}}$$
$$S_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$
$$\therefore \ S_5 = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^5}\right) = \frac{341}{256}$$

Sampla 2

I sraith iolraíoch, $T_3 = 32$ agus $T_6 = 4$; faigh a agus r agus uaidh sin, faigh S_8, suim na gcéad ocht dtéarma.

$$T_n = ar^{n-1}$$
$$T_3 = ar^{3-1} = ar^2 = 32$$
$$T_6 = ar^{6-1} = ar^5 = 4$$

Ag roinnt na gcothromóidí seo, faighimid $\dfrac{\cancel{a}r^2}{\cancel{a}r^5} = \frac{32}{4}$

$$\frac{1}{r^3} = 8$$
$$r^3 = \frac{1}{8}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Má tá $r = \frac{1}{2}$, ansin $a\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 32$

$$a\left(\tfrac{1}{4}\right) = 32$$

$$a = 128.$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$= \frac{128\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_n = 256\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$S_8 = 256\left(1 - \frac{1}{2^8}\right)$$

$$= 252$$

Tá sé an-tábhachtach tionchar luach r ar shuim sraithe iolraíche a thuiscint. Féach ar thrí sheicheamh iolraíocha A, B agus C áit arb é $r = 2$ comhiolraitheoir A; $r = 1$ comhiolraitheoir B agus $r = \frac{1}{2}$ comhiolraitheoir C. Má thosaímid le 1 mar luach an chéad téarma, faighimid:

Seicheamh	r	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	.....	T_{100}
A	2	1	2	4	8	16	32		6.3×10^{29}
B	1	1	1	1	1	1	1		1
C	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$		1.6×10^{-30}

$\Rightarrow$

Sraith	r	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	.....	S_{100}
A	2	1	3	7	15	31	63		1.3×10^{30}
B	1	1	2	3	4	5	6		100
C	$\frac{1}{2}$	1	1.5	1.75	1.875	1.9375	1.96875		2

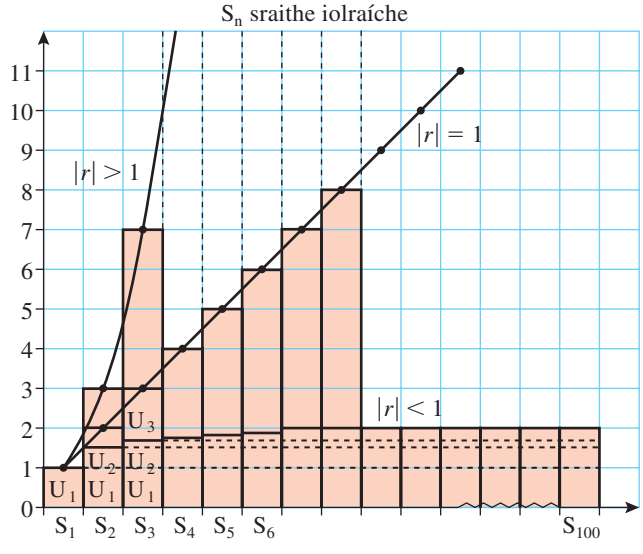
Má tá $|r| > 1$, méadaíonn ar luachanna T_n agus S_n go han-tapa, de réir mar a mhéadaíonn ar n.

Má tá $|r| = 1$, ansin feidhmíonn an seicheamh ar an gcaoi chéanna is a fheidhmíonn seicheamh comhbhreise – cuirtear méid tairiseach le gach téarma.

Má tá $|r| < 1$, deirtear go bhfuil "luach teorantach" ag luach S_n.

Sa tsraith C thuas, druideann an tsuim S_n i dtreo an luacha 2.

Má thógaimid luach sách ard do n, is féidir linn S_n a chur chomh gar do 2 agus a theastaíonn uainn, i.e. is féidir linn $2 - S_n$ a dhéanamh chomh beag agus a theastaíonn uainn.



Deirimid go ndruideann S_n le **luach teorantach 2** de réir mar a dhruideann n leis an eígríoch.

Scríobhtar é seo mar: $S_n \to 2$ de réir mar $n \to \infty$ nó $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 2$.

I bhfocail, deirimid, "Is é 2 teorainn na páirtsuime S_n, de réir mar a dhruideann n i dtreo na héigríche."

Anois féach ar an bhfoirmle don tsuim go n téarma i sraith iolraíoch, má tá $|r| < 1$.

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Nuair atá $|r| < 1$, neasóidh rn go dtí an nialas i gcás luachanna móra ar n, i.e. $r^n \to 0$ de réir mar $n \to \infty$.

Mar sin, athraíonn $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ go $S_n = \dfrac{a(1 - 0)}{1 - r}$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a}{1 - r} \quad \text{de réir mar } n \to \infty.$$

$$\text{nó} \quad \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$$

I gcás sraith iolraíoch agus $|r| < 1$,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}.$$

Sampla 3

Faigh suim na sraithe iolraíche $16 + 12 + 9 + \ldots$ go héigríoch.

$$\left.\begin{aligned} a &= 16 \\ r &= \tfrac{12}{16} = \tfrac{3}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - r} = \frac{16}{1 - \frac{3}{4}} = 64$$

Deachúlacha athfhillteacha

Is féidir deachúlacha athfhillteacha a shloinneadh mar shuim seichimh iolraíoch go héigríoch, áit a bhfuil an comhiolraitheoir $r < 1$.

Mar shampla, $0.\dot{3} = 0.3333\ldots = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \dfrac{3}{10^3} + \dfrac{3}{10^4} + \ldots$ ($\times \frac{1}{10}$, $\times \frac{1}{10}$, $\times \frac{1}{10}$)

áit a bhfuil $a = 0.3$ agus $r = \dfrac{1}{10}$.

Ar an gcaoi chéanna,

$$0.2\dot{3}\dot{5} = 0.2353535\ldots = 0.2 + [0.035 + 0.00035 + \ldots]$$

$$= 0.2 + \frac{35}{1000} + \frac{35}{100000} + \ldots$$

$$= 0.2 + \text{sraith iolraíoch go héigríoch}$$

áit a bhfuil $a = \dfrac{35}{1000}$ agus $r = \dfrac{1}{100}$.

Sampla 4

Scríobh an deachúil athfhillteach $0.\dot{2}\dot{3}$ mar chodán san fhoirm $\frac{a}{b}, a, b, \in \mathbb{N}$.

$$0.\dot{2}\dot{3} = 0.232323\ldots\ldots = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{23}{100} \quad \text{agus} \quad r = \frac{23}{10000} \div \frac{23}{100} = \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{100} \times \frac{100}{99} = \frac{23}{99}$$

$\left[\text{Nóta: Go minic, scríobhtar } \lim_{n \to \infty} S_n \text{ mar } S_\infty. \text{ Mar sin, } S_\infty = \frac{23}{99}\right]$

Nóta: Má tá $x = 0.232323\ldots,$

ansin $100x = 23.232323\ldots$

$\Rightarrow \quad 99x = 23$ … ag dealú na chéad líne ón dara líne

$\therefore \quad x = \frac{23}{99}$

Cleachtadh 4.5

1. Faigh suim na gcéad deich dtéarma sa tsraith $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$
2. Faigh n, líon na dtéarmaí, sa tsraith seo a leanas:
   $1024 + 512 + 256 + \ldots\ldots 32$. Uaidh sin, faigh suim na sraithe.
3. Faigh S_8 sa tsraith $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$
4. Faigh S_{10} sa tsraith $32 + 16 + 8 + \ldots$
5. Faigh S_6 sa tsraith $4 - 12 + 36 - 108 \ \ldots$
6. Faigh líon na dtéarmaí sa tsraith $729 - 243 + 81 - \ldots - \frac{1}{3}$.
   Uaidh sin, faigh suim na sraithe.
7. Scríobh amach na chéad trí théarma sa tsraith $\sum_{r=1}^{6} 4^r$ agus uaidh sin, faigh suim na sraithe.
8. Faigh luach $\sum_{r=1}^{8} 2 \times 3^r$.
9. Faigh suim $\sum_{r=1}^{10} 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^r$ ceart go dtí trí ionad de dheachúlacha.
10. Scríobh gach ceann de na deachúlacha athfhillteacha seo mar shraith iolraíoch éigríochta.
    Uaidh sin, sloinn gach ceann mar dheachúil san fhoirm $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}$.

    (i) $0.\dot{7}$ (ii) $0.\dot{3}\dot{5}$ (iii) $0.2\dot{3}$ (iv) $0.\dot{3}7\dot{0}$ (v) $0.1\dot{6}\dot{2}$ (vi) $0.3\dot{2}\dot{1}$

11. Faigh S_n, an tsuim go n téarma, sa tsraith $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\ldots \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ agus uaidh sin, faigh S_∞, suim na sraithe go héigríoch.
Faigh íosluach n sa chaoi go bhfuil $S_\infty - S_n < 0.001$.

Mír 4.6 Súil arís ar phatrúin uimhreacha

Patrúin líneacha, chearnacha agus chiúbacha

Agus muid ag déanamh staidéir ar an ailgéabar, thugamar faoi deara gur féidir patrúin a aithint i seichimh uimhreacha áirithe ach na difríochtaí a ríomh.

Is é +4 an chéad difríocht sa seicheamh −4, 0, 4, 8, 12, …; cruthaíonn sé seo foirmle do $T_n = 4n + a$, áit a bhfuil $n = 1, 2, 3, \ldots$

Seicheamh	−4	0	4	8	12
An chéad difríocht	+4	+4	+4	+4	

Mar sin, má tá $n = 1$, ansin $T_1 = 4(1) + a = -4$
$\Rightarrow \quad a = -8$

$\therefore$ Má bhíonn an chéad difríocht tairiseach bíonn patrún comhbhreise (**líneach**) ann, $T_n = 4n - 8$.

Mar a léiríonn an tábla a leanas, níl an chéad difríocht sa seicheamh 7, 17, 31, 49, 71, … tairiseach.

Seicheamh	7	17	31	49	71
An chéad difríocht	10	14	18	22	
An dara difríocht	4	4	4		

Léiríonn dara difríocht thairiseach patrún **cearnach** (n^2), $\boldsymbol{an^2 + bn + c}$.

Féach ar $T_n = an^2 + bn + c$, i gcás gach luacha ar $n \geq 1$.
Faigheann an tábla a leanas luach na gcéad difríochtaí agus na ndara difríochtaí i dtéarmaí a, b agus c.

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
$a + b + c$	$4a + 2b + c$	$9a + 3b + c$	$16a + 4b + c$	$25a + 5b + c$	
$3a + b + c$	$5a + b + c$	$7a + b + c$	$9a + b + c$		**An chéad difríocht**
$2a$	$2a$	$2a$			**An dara difríocht**

Ón tábla seo, feicimid gurb é $2a$, dhá oiread chomhéifeacht n^2, an dara difríocht i bpatrún cearnach uimhreacha i gcónaí.

$\therefore$ más é +4 an dara difríocht $\Rightarrow 2a = 4$
$a = 2$

$\therefore \quad T_n = 2n^2 + bn + c$ do $n = 1, 2, 3$, etc.

Chun b agus c a aimsiú, úsáidfimid cothromóidí comhuaineacha mar seo a leanas:

$$T_n = 2n^2 + bn + c \text{ do } n = 1, 2, 3, \text{etc.}$$

Bíodh $n = 1$, $T_1 = 2(1)^2 + b(1) + c = 7$
$\Rightarrow \quad b + c = 5$

Bíodh $n = 2$, $T_2 = 2(2)^2 + b(2) + c = 17$
$\Rightarrow \quad 2b + c = 9$
$\underline{b + c = 5}$
$\therefore \quad b = 4$

Má tá $b = 4$, ansin $4 + c = 5$,

$\Rightarrow \quad c = 1$

$\therefore \quad T_n = 2n^2 + 4n + 1$ do $n = 1, 2, 3$, etc.

Is féidir modh na ndifríochtaí críochta a úsáid chun iniúchadh a dhéanamh ar phatrúin uimhreacha, a bhfuil cumhachtaí níos airde acu.

Má bhíonn an tríú difríocht tairiseach, bíonn **patrún ciúbach** againn, $T_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ srl.

	Patrún	Chun *a* a aimsiú
Tairiseach na chéad difríochta	$T_n = an + b$	a = an chéad difríocht
Tairiseach an dara difríocht	$T_n = an^2 + bn + c$	$2a$ = an dara difríocht
Tairiseach an tríú difríocht	$T_n = an^3 + bn^2 + cn + d$	$6a$ = an tríú difríocht

Sampla 1

Scríobh an *n*ú téarma sa phatrún uimhreacha $-1, 13, 51, 125, 247, \ldots$ mar iltéarmach ciúbach.

Ó tá an 3ú difríocht ciúbach, tá páirt chiúbach sa phatrún uimhreacha agus tá $6a$ = an tríú difríocht.

$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{6} \times 12 = 2$

Seicheamh	-1	13	51	125	247
An chéad difríocht	14	38	74	122	
An dara difríocht	24	36	48		
An tríú difríocht	12	12			

$\therefore \quad T_n = 2n^3 + bn^2 + cn + d$ for $n \geqslant 1$

$T_1 = 2 + b + c + d = -1$

$\Rightarrow \quad b + c + d = -3$

$T_2 = 2(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 13$

$\Rightarrow \quad 4b + 2c + d = -3$

$T_3 = 2(3)^3 + b(3)^2 + c(3) + d = 51$

$\Rightarrow \quad 9b + 3c + d = -3$

Na cothromóidí a réiteach:

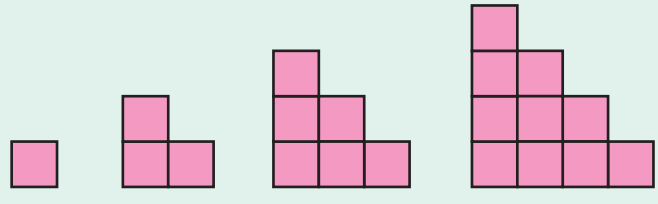
1. $b + c + d = -3$
2. $4b + 2c + d = -3$
3. $9b + 3c + d = -3$

faighimid $b = 0$, $c = 0$, $d = -3$

$\therefore \quad T_n = 2n^3 - 3$ do $n \geqslant 1$.

Sampla 2

Déantar patrún mósáice ar urlár, mar a léirítear.
Faigh líon na dtíleanna is gá chun an 30ú patrún a dhéanamh.



Cruthaíonn líon na dtíleanna is gá a úsáid an patrún 1, 3, 6, 10, …

Má sheiceálaimid na difríochtaí, feicfimid go bhfuil an dara difríocht tairiseach. Mar sin, tá patrún cearnach $T_n = an^2 + bn + c$ i gceist.

Seicheamh	1	3	6	10
An chéad difríocht	2	3	4	
An dara difríocht	1	1		

Agus $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad T_n = \tfrac{1}{2}n^2 + bn + c$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(1)^2 + b(1) + c = 1$$

$$\Rightarrow \quad b + c = \tfrac{1}{2}$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(2)^2 + b(2) + c = 3$$

$$\Rightarrow \quad 2b + c = 1$$

Nuair a réitímid na cothromóidí seo, faighimid

$$b = \tfrac{1}{2}, c = 0$$

$$\therefore \quad T_n = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n, \text{ for } n \geqslant 1$$

$$\therefore \quad T_{30} = \tfrac{1}{2}(30)^2 + \tfrac{1}{2}(30) = 465.$$

Go hachomair, nuair a scrúdaítear próiseas agus go n-aithnítear patrún uimhreacha, is féidir foirmle a chruthú d'eilimintí leantacha faoi cheannlínte ar nós (i) Comhbhreise (Líneach) (ii) Cearnach (iii) Ciúbach (iv) Iolraíoch (Easpónantúil) ach an nasc idir eilimintí an phatrúin a aithint.

Cleachtadh 4.6

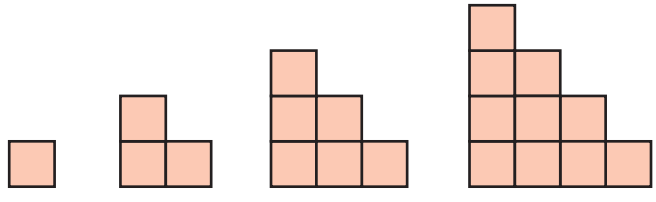
1. Úsáid modh na ndifríochtaí chun T_n, an *n*ú téarma, a fháil do gach ceann de na patrúin uimhreacha seo a leanas:

(i) 5, 9, 13, 17, 21, … (ii) 1, 4, 7, 10, 13, … (iii) 11, 16, 21, 26, 31, …

2. Faigh foirmle do T_n, an *n*ú téarma, i ngach ceann de na patrúin uimhreacha seo a leanas:

(i) 2, 1, 0, −1, −2, … (ii) 0, −2, −4, −6, −8, … (iii) −6, −4, −2, 0, 2, …

3. Más é 5 mm X 5 mm toise gach ceann de na cearnóga sa phatrún seo, faigh

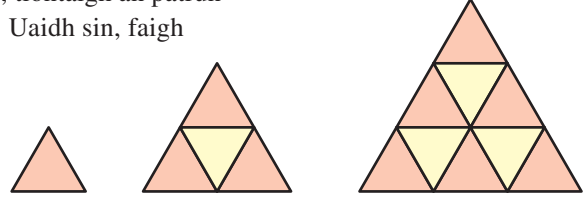


(i) achar (ii) imlíne an 28ú patrún.

4. Má tá achar 1 cm² i ngach triantán thíos, tiontaigh an patrún triantánach seo ina phatrún uimhreacha. Uaidh sin, faigh

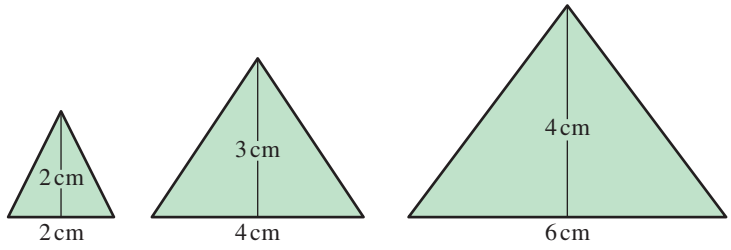
(i) achar an 30ú cuid den dearadh

(ii) cé acu cuid ag a mbeadh achar 441 cm²?



5. Má leantar leis an bpatrún uimhreacha seo, faigh

(i) achar an 100ú triantán (ii) cé acu triantán ag a mbeidh achar 240 cm^2?



6. Is féidir gach ceann de na patrúin uimhreacha seo a leanas a scríobh san fhoirm $an^3 + bn^2 + cn + d$. Faigh luachanna a, b, c agus d i ngach cás:

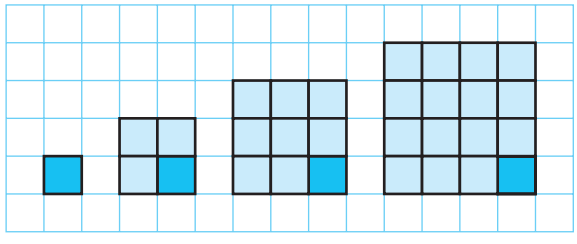
(i) 6, 27, 74, 159, 294

(ii) 3, −1, −1, 9, 35

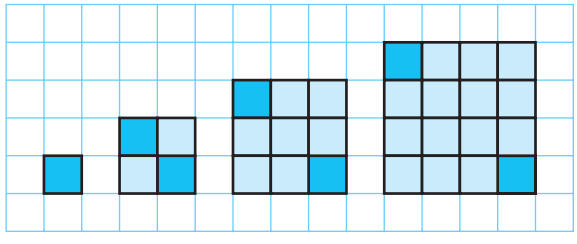
(iii) −1, 2, 17, 50, 107

7. Dear riail a aimsíonn líon na dtíleanna geala i ngach ceann de na patrúin seo a leanas. Aimsigh líon na dtíleanna geala agus dorcha is gá don 24ú patrún i ngach ceann.

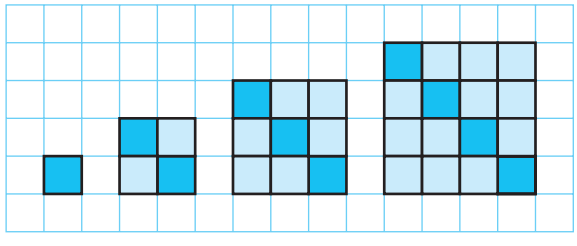
(a)



(b)



(c)



8. Scríobh foirmle don nú téarma i ngach ceann de na seichimh uimhreacha seo a leanas.

(i) 7, 16, 31, 52, 79, ……

(ii) 1, 0, −3, −8, −15, ……

(iii) −1, 14, 53, 128, 251, ……

(iv) −2, 2, 6, 10, 14, ……

(v) 4, 31, 98, 223, 424, ……

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. Aimsigh na chéad cheithre théarma sna seichimh seo ina dtugtar an *n*ú téarma i ngach cás:

(i) $T_n = 3n + 4$
(ii) $T_n = 6n - 1$
(iii) $T_n = 2^{n-1}$
(iv) $T_n = (n + 3)(n + 4)$
(v) $T_n = n^3 + 1$

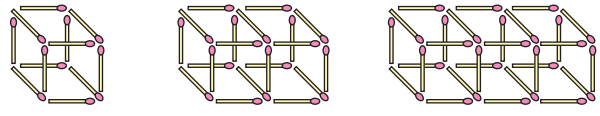
2. Is é 71 an tríú téarma i seicheamh comhbhreise. Is é 55 an seachtú téarma.
Aimsigh an chéad téarma agus an chomhbhreis.

3. I sraith iolraíoch, is é 12 an chéad téarma agus is é 36 an tsuim go héigríoch.
Faigh an comhiolraitheoir.

4. Faigh an comhiolraitheoir i ngach ceann de na seichimh iolraíocha seo agus, uaidh sin, scríobh slonn don *n*ú téarma, T_n.

(i) $-2,\ 4,\ -8, \ldots$
(ii) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}, \ldots$
(iii) $2,\ -6,\ 18, \ldots$

5. Déantar sraith ciúbanna as cipíní agus cuirtear le chéile iad mar chiúbóidigh, mar a léirítear.



(i) Aimsigh líon na gcipíní is gá chun an *n*ú ciúbóideach a dhéanamh.
(ii) Aimsigh uaslíon na gciúbanna sa chiúbóideach má tá 2006 cipín fágtha le haghaidh na tógála.

6. Is é 21 an dara téarma i seicheamh iolraíoch.
Is é -63 an tríú téarma.
Aimsigh (i) an comhiolraitheoir (ii) an chéad téarma.

7. Infheistítear €2000 i scéim choigiltis a thugann ús iolraithe 2.5%. Mínigh conas a sheasann an slonn $A = €2000(1.025)^5$ do luach na hinfheistíochta i ndiaidh 5 bliana.

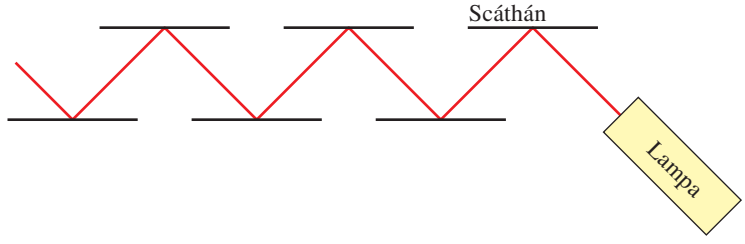
8. Faigh suim an chéad 200 uimhir aiceanta.

9. Is ionann an cúigiú téarma i seicheamh comhbhreise agus dhá oiread an dara téarma.
Is é 9 an difríocht idir an dá théarma.
Faigh suim na gcéad 10 dtéarma sa seicheamh.

10. Faigh luach $\sum_{r=3}^{16} (2r + 1)$.

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. Leagtar amach roinnt scáthán, mar a léirítear. Lonraíonn lampa 2000 lúman orthu sa chaoi go bhfrithchaitear an solas go leanúnach ó scátháin leantacha.
(**Nóta:** Is tomhas gile é an lúman.)



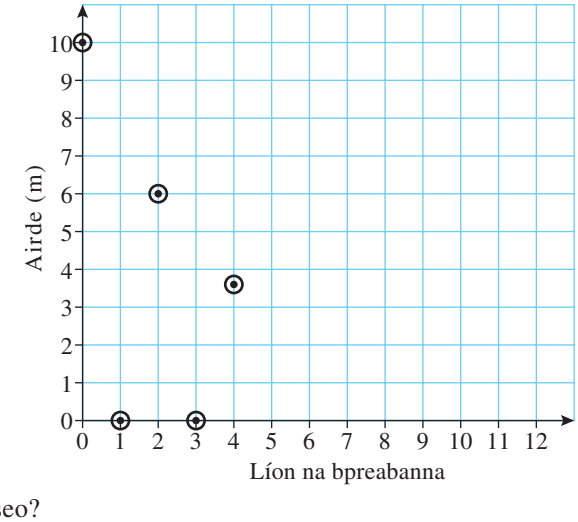
Frithchaitheann gach scáthán $\frac{3}{5}$ den solas a bhuaileann é.

(i) Faigh déine an tsolais a fhrithchaitear ón 10ú scáthán.
(ii) Scríobh cothromóid a sheasann do dhéine an tsolais a fhrithchaitear ón *n*ú scáthán.
(iii) Tar éis cé mhéad frithchaitheamh (scáthán) a laghdófar déine an tsolais go dtí $\frac{1}{10}$ dá luach bunaidh?

2. Tugann $A = P(1 + i)^t$ luach €P, suim airgid a infheistíodh ar feadh t bliain. Is é i an rata úis thar an tréimhse coigiltis.

(i) Maidir le hinfheistíocht ar bith, taispeáin gur ar an ráta úis i agus air sin amháin a bhraitheann an t-achar ama a thógann sé ar an infheistíocht tosaigh a luach a dhúbailt, agus nach mbraitheann sé ar an tsuim a infheistíodh. Uaidh sin, faigh slonn, i dtéarmaí i, an ráta úis, don achar ama a thógann sé ar infheistíocht a luach a dhúbailt.
(ii) Uaidh sin, ríomh an t-achar ama a thógfaidh sé ar shuim airgid a luach a dhúbailt má infheistítear í ar rata úis
(a) 2% (b) 5% (c) 10%.

3. Ligtear do liathróid titim ó airde 10 m. Preabann sí aníos arís go 6 m agus ansin preabann sí aníos go 3.6 m agus mar sin de, mar a fheictear sa léaráid. Déan cóip den ghraf agus cuir isteach na chéad chúig airde eile a shroicheann an liathróid ón talamh.



(i) Scríobh síos sraith uimhreacha a sheasann don fhad iomlán a . ghluaiseann an liathróid
(ii) Déan cur síos ar an sórt sraithe a chruthaítear.
(iii) Cad é an fad iomlán a ghluaiseann an liathróid?
(iv) Cén chaoi a gcuirtear méid na liathróide san áireamh san fhadhb seo?

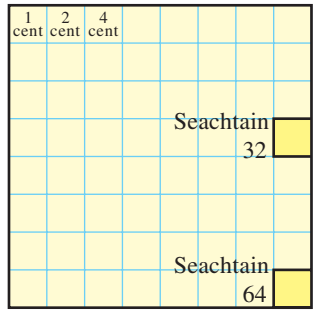
4. (i) Scríobh cothromóid don *n*ú téarma sa seicheamh 3, 6, 12, 24, 48…

(ii) Úsáid logartaim chun an chéad téarma atá níos mó ná aon mhilliún amháin a aimsiú sa seicheamh seo.

5. Bíonn áthas ar aintín shaibhir leat nuair a thosaíonn tú ag imirt fichille. Chun tú a spreagadh, deir sí go gcuirfidh sí cent amháin ar an gcéad chearnóg den bhord agus go ndúblóidh sí an tsuim gach seachtain a leanann tú ort ag foghlaim an chluiche.
Cé mhéad airgid (in euro) a bheidh le tabhairt ag d'aintín duit ag deireadh

(i) sheachtain 32

(ii) sheachtain 64?



6. Tá trí théarma leantacha i seicheamh comhbhreise a shuimíonn go 33 agus is é 935 a dtoradh. Cad iad na téarmaí?

7. Dímheasann luach cairr 13% in aghaidh na bliana. Má ceannaíodh an carr agus é nua ar €30 000,

(i) faigh foirmle a nascann €V, luach an chairr, lena aois a

(ii) faigh luach an chairr i ndiaidh cúig bliana

(iii) faigh an bhliain ina mbeidh luach an chairr faoi bhun €6000.

8. Tugann an fhoirmle $T_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1$ seicheamh uimhreacha, áit ar slánuimhir dheimhneach é n.

(i) Faigh T_1, T_2, T_3 sa seicheamh seo.

(ii) Taispeáin go bhfuil $T_{n+1} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1$.

(iii) Má tá $3T_{n+1} - 2T_n = k$, faigh k má tá $k \in \mathbb{N}$.

(iv) Taispeáin go bhfuil $\sum_{1}^{15}\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = -9.014$ ceart go dtí 4 fhigiúr bhunúsacha.

9. Más é S_n suim sraithe go n téarma,

(i) taispeáin go bhfuil $T_n = S_n - S_{n-1}$, áit arb é T_n an *n*ú téarma sa tsraith.

(ii) faigh slonn do T_n má tá $S_n = 3n^2 + n$

(iii) faigh slonn, i dtéarmaí n, do $\sum_{r=1}^{n}(T_r)^2$

10. Sloinn $\log_4 x$ i dtéarmaí $\log_2 x$ san fhoirm is simplí de.
Uaidh sin, taispeáin gur trí théarma leantacha i sraith iolraíoch iad $\log_2 x$, $\log_4 x$ agus $\log_{16} x$.
Scríobh síos luach an chomhiolraitheora.
Más é $k \log_2 x$ suim na sraithe iolraíche go héigríoch, faigh luach k.
(Féach Caibidil 7 do na rialacha a bhaineann le logartaim).

Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. Is féidir seicheamh ciúbach a léiriú mar seo: T_n, an nú téarma, $= an^3 + bn^2 + cn + d$, áit a bhfuil $a, b, c \in \mathbb{R}$ agus $a \neq 0$.

(i) Comhlánaigh Tábla 1 thíos i dtéarmaí a, b agus c.

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
$a + b + c + d$					
					An chéad difríocht
				An dara difríocht	
			An tríú difríocht		

Tábla 1

(ii) Bunaithe ar an tábla seo, déan cóip den ráiteas seo a leanas agus comhlánaigh é:
Is é ……. an tríú difríocht i ngach seicheamh ciúbach i gcónaí.

(iii) Comhlánaigh an dá ráiteas seo a leanas maidir le seichimh chearnacha:
(a) Is é ……. an dara difríocht i ngach seicheamh cearnach i gcónaí.
(b) Is é ……. an chéad difríocht, $T_2 - T_1$, i ngach seicheamh cearnach i gcónaí.

(iv) Comhlánaigh Tábla 2 don seicheamh 5, 12, 25, 44, ….

T_1	T_2	T_3	T_4	
5	12	25	44	
				An chéad difríocht
			An dara difríocht	

Tábla 2

(v) Úsáid na sloinn a fuair tú don chéad agus don dara difríocht in (iii) chun a, b agus c a fháil.

(vi) Uaidh sin, faigh luach T_{20}.

2. Ligtear do liathróid titim óna hairde bhunaidh i.e. 40 m anuas ar urlár coincréite.
Ar an deichiú preab, preabann an liathróid 1 m aníos ón talamh.

(i) Scríobh slonn d'airde na liathróide i ndiaidh n preab.

(ii) Cén céatadán den airde ónar thit an liathróid a phreabann sí aníos ar gach preab?

(iii) Aimsigh airde na liathróide i ndiaidh gach ceann de na chéad chúig phreab agus uaidh sin, comhlánaigh an tábla:

Preab	1ú	2ú	3ú	4ú	5ú
Airde					

(iv) Tarraing graf a léiríonn airde na liathróide i ndiaidh gach preibe.

(v) Déan meastachán ón ngraf ar líon na bpreabanna is gá sula mbeidh an phreab 2 m nó níos lú.

(vi) Úsáid an slonn i gcuid (i) chun íoslíon na bpreabanna is gá sa chaoi go bhfanfadh an liathróid faoi 2 m a fháil.

(vii) De réir an tsloinn i gcuid (i) agus an ghraif i gcuid (iv), d'fhéadfadh an liathróid leanacht ar aghaidh ag preabadh de shíor. Mínigh an fáth nach dtarlaíonn sé seo.

3. Tá Rónán i mbliain na hArdteiste.
Ag deireadh an cúigiú bliain, thug a thuismitheoirí €20 sa tseachtain dó mar airgead póca. Chun é a spreagadh chun níos mó oibre a dhéanamh sa séú bliain, thairg a thuismitheoirí rogha de dhá shórt 'scéim airgead póca' do Rónán.

Scéim 1: €20 i seachtain 1. €22 i seachtain 2 … agus mar sin de, ag méadú €2 in aghaidh na seachtaine.

Scéim 2: €20 i seachtain 1. €21 i seachtain 2 … agus mar sin de, ag méadú faoin bhfachtóir tairiseach $\frac{21}{20}$ in aghaidh na seachtaine.

(i) Faigh an méid iomlán in euro a gheobhadh sé i seachtain n do Scéim 1 agus do Scéim 2 (2 fhreagra ar leith). Bíodh gach freagra san fhoirm is simplí de.

(ii) Glac leis go mbíonn 36 seachtain "5 lá" i mbliain scoile. Cé acu scéim ba cheart do Rónán a roghnú, dar leat? Seas le do fhreagra.

(iii) Ba mhaith le Rónán airgead a chur i dtaisce i gcomhair consól cluichí nua. Cosnaíonn an consól €400. Mura gcaitheann sé ach €1.50 sa lá scoile agus go gcuireann sé an chuid eile dá chuid airgead póca i dtaisce, cén tseachtain is luaithe a bhféadfadh sé an consól a cheannach? Glac leis gur Scéim 2 thuas atá roghnaithe aige dá chuid airgead póca.

4. Coimeádtar leacht áirithe i mbairille. Ag tús na bliana 2010, cuirtear 160 lítear leachta isteach sa bhairille. Má chailltear 15% de thoirt an leachta trí ghalú i rith na bliana,

(i) faigh méid an leachta sa bhairille ag deireadh na bliana

(ii) léirigh go mbeidh timpeall ar 31.5 lítear leachta sa bhairille ag deireadh 2020.

Ag tús gach bliana, ag tosú in 2010, líontar bairille nua le 160 lítear leachta.
Leantar leis an bpróiseas seo go ceann 20 bliain, go dtí 2030.

(iii) Ríomh méid iomlán an leachta sna bairillí, i ndiaidh galaithe, ag deireadh na bliana 2030. 2030.

5. Cheannaigh comhlacht áirithe meaisín grafaicí ar €15 000 ag tús na bliana 2005.
Gach bliain, laghdaíonn luach an mheaisín 20% óna luach ag tús na bliana.

(i) Léirigh gurbh é €9,600 luach an mheaisín ag tús 2007.

(ii) Tá sé i gceist ag an gcomhlacht meaisín nua a fháil ina áit, nuair a thiteann a luach faoi bhun €500. Cén bhliain ina mbeidh an meaisín le hathsholáthar?

(iii) Cuireann an comhlacht €1000 i gcuntas coigiltis ag tús gach bliana, mar phlean athsholáthair. 5% sa bhliain an ráta úis a bhaineann leis an gcuntas seo. Má rinneadh an chéad íocaíocht nuair a ceannaíodh an meaisín, agus má dhéantar an íocaíocht deiridh ag tús na bliana ina mbeidh an meaisín le hathsholáthar, úsáid do fhreagra ó chuid (ii) chun luach an chuntais, nuair a athsholáthraítear an meaisín, a fháil.

(iv) Má tá an méid a choiglítear chun íoc as costas iomlán an mheaisín nua, ríomh an uasteorainn ar an meánráta boilscithe thar thréimhse na hinfheistíochta.

caibidil 5

Matamaitic an Airgeadais

Focail thábhachtacha

luach cumaisc **luach láithreach** **ús iolraithe** **dímheas** **blianacht**
tráthchoigilteas **tráthíocaíochtaí** **iasachtaí** **morgáiste**

Tá sraitheanna iolraíocha an-tábhachtach i gcúrsaí eacnamaíochta áit a mbímid ag plé le téarmaí ar nós (i) Ús Iolraithe (ii) Luach Cumaisc (iii) Luach Láithreach (iv) Pinsin (v) Blianacht (vi) Aisíocaíochtaí morgáiste (vii) Tráthchoigilteas, srl.

Mír 5.1 Ús iolraithe

Nuair nach n-aistarraingítear an t-ús a thuilleann suim airgid atá i dtaisce i mbanc, cuirtear leis an b**príomhshuim** é don dara bliain.

Fásann an t-ús bliain ar bhliain agus deirtear go bhfuil sé *athiolraithe*.

Ar ráta 5% in aghaidh na bliana, is féidir an méadú ar an ús a thuilleann €10 000 a fheiceáil bliain ar bhliain sa tábla.

Bliain	Príomhshuim	Ús
a haon	€10 000	€500
a dó	€10 500	€525
a trí	€11 025	€551
a ceathair	€11 576	€579
a cúig	€12 155	€608
	€12 763	

Má aistarraingítear an t-ús seachas é a athinfheistiú gach bliain, tuilltear 5 × €500 = €2500 gach bliain.

Má dhéantar an t-ús a athiolrú, €2763 an méid iomlán a thuilltear.

Mar riail ghinearálta, más é i (faoin gcéad, sloinnte ina dheachúil) an ráta úis, is é $i \times$ P an t-ús a thuilltear, áit arb é €P an phríomhshuim nó an infheistíocht i dtús na bliana.

I dtús an dara bliain, tá $P + iP = \mathbf{P(1 + i)^1}$ i dtaisce sa bhanc.

Tá an t-athrú ar an bpríomhshuim, bliain ar bhliain, le feiceáil sa tábla seo a leanas:

Bliain (deireadh)	Príomhshuim	Ús
	$\mathbf{P}$ $i \times P$	
a haon	$P + iP = \mathbf{P(1 + i)^1}$	$i \times P(1 + i)$
a dó	$P(1+ i) + iP(1 + i) = P(1+ i)(1 + i) = \mathbf{P(1 + i)^2}$	$i \times P(1 + i)^2$
a trí	$P(1 + i)^2 + iP(1 + i)^2 = P(1 + i)^2(1 + i) = \mathbf{P(1 + i)^3}$	
bliain t	$= \mathbf{P(1 + i)^t}$	

Ag deireadh bhliain t, tá **€P(1 + i)^t** i dtaisce.

Mar shampla, is ionann an t-ús ar €10 000, infheistithe ar feadh 5 bliana ar 5% athiolraithe go bliantúil, agus €10 000 $(1 + 0.05)^5$ = €12,763.

Is é an Ráta Céatadánach Bliantúil (**APR** i mBéarla) an "fíor-ráta" bliantúil úis a ghearrtar nuair a thugtar airgead ar iasacht.

Is é an Ráta Coibhéiseach Bliantúil (**AER** i mBéarla) an ráta úis a íoctar ar **infheistíochtaí**.

1. Luach cumaisc

Má bhíonn an t-ús seasta ar feadh tréimhse ama t, **luach cumaisc** €P a thugtar ar an bpríomhshuim €P suimithe leis an ús iolraithe.

Is é luach cumaisc suim airgid €P, infheistithe anois ar i% ar feadh t bliain, ná

Luach cumaisc (F) = €P(1 + i)^t

Ús a thuilltear = €P(1 + i)^t − €P

Sampla 1

Faigh luach cumaisc €5000 infheistithe ar 4% (AER) in aghaidh na bliana, athiolraithe go bliantúil, ar feadh 6 bliana. Faigh freisin an t-ús a thuilltear i gcaitheamh na tréimhse.

Luach cumaisc = €P$(1 + i)^t$ = €5000 $(1 + 0.04)^6$ = €6326.60

Ús a thuilltear = €6326.60 − €5000 = €1326.60

Sampla 2

Tugann banna infheistíochta toradh 15% ach é a infheistiú ar feadh 4 bliana.
Ríomh an ráta coibhéiseach bliantúil (AER) don bhanna seo, ceart go dtí dhá ionad de dheachúlacha.

Ciallaíonn toradh 15% faoi cheann 4 bliana gurb ionann an méid (luach cumaisc) agus 1.15 oiread na suime a infheistíodh, €P.

$\therefore$ €P$(1 + i)^4$ = €P(1.15)

$\therefore$ $(1 + i)^4 = 1.15$

$(1 + i) = 1.15^{\frac{1}{4}} = 1.03555$ … an ceathrú fréamh a thógáil ar an dá thaobh

$\therefore$ i(ráta coibhéiseach bliantúil) = .03555 = 3.555%

= 3.56%

Is gnáthchleachtas anois é ús a chur go míosúil le cuntas coigiltis.
Sa chás seo cuirtear ráta úis míosúil i bhfeidhm atá coibhéiseach leis an ráta bliantúil.

Más é r an ráta míosúil agus más é $i = 5\%$ an ráta coibhéiseach bliantúil (AER), i gcás 12 íocaíocht

$$(1 + r)^{12} = (1 + i) = (1 + 0.05) = 1.05$$

$$\therefore \quad (1 + r) = (1.05)^{\frac{1}{12}} = 1.004074$$

$$\therefore \quad r = 1.004074 - 1 = 0.004074 = 0.4074\%$$

$\therefore$ Tá 5% sa bhliain coibhéiseach le 0.4074% in aghaidh na míosa.

Nóta: Sloinntear i ina dheachúil i gcónaí, m.sh. $5\% = 0.05$

Chun rátaí úis míosúla, $r\%$, a ríomh:

$\mathbf{(1 + r)^{12} = (1 + i)}$ $r\%$ in aghaidh na míosa, $i\%$ in aghaidh na bliana

Sampla 3

Infheistítear €5000 ar AER 4%. Má chuirtear an t-ús leis go míosúil, faigh luach cumaisc na hinfheistíochta seo faoi cheann (i) 3 bliana go leith (ii) 5 bliana 2 mhí.

Faightear an glanráta míosúil r ach an chothromóid $(1 + r)^{12} = 1.04$ a réiteach.

$$\therefore \quad (1 + r) = 1.04^{\frac{1}{12}} = 1.003274$$

$\therefore$ $r = 0.003274 = 0.3274\%$ in aghaidh na míosa.

An luach cumaisc faoi cheann

(i) 3 bliana go leith $= 3\frac{1}{2} \times 12 = 42$ mí

$\Rightarrow F = 5000(1.003274)^{42} = €5735.77$

(ii) 5 bliana 2 mhí = 62 mí

$\Rightarrow F = 5000(1.003274)^{62} = €6123.26.$

2. Luach láithreach

Chun luach láithreach €10 000 atá dlite i gceann trí bliana a fháil, ní mór dúinn an cheist seo a fhreagairt – cén tsuim airgid, infheistithe ar $i\%$ (m.sh. $5\% = 0.05$) athiolraithe go bliantúil, a mbeadh luach cumaisc €10 000 uirthi?

$$\text{Luach cumaisc} = \text{Luach láithreach} \times (1 + i)^t$$

$$\Rightarrow \text{Luach láithreach} = \frac{\text{Luach cumaisc}}{(1 + i)^t}$$

$$\Rightarrow \text{Luach láithreach} = \frac{10\,000}{(1.05)^3} = €8638.38$$

$$\text{Luach láithreach} = \frac{\text{Luach cumaisc}}{(1 + i)^t}$$

Mar sin, ar ráta coibhéiseach bliantúil 5%, is é luach láithreach €10 000 (i gceann 3 bliana) ná €8638.38.

Sampla 4

Reáchtálann an club CLG áitiúil crannchur.
Buann tú an chéad duais agus tugtar rogha duit:

(a) €15 000 anois **nó**
(b) €18 000 i gceann ceithre bliana.

Cén duais ba chóir duit a roghnú ionas go mbeidh an luach is mó agat? Glac leis gurb é 4% an ráta lascaine.

Agus an luach láithreach á ríomh, is minic a thugtar an "*ráta lascaine*" ar an ráta *i*%.

Is ionann luach láithreach €18 000 bunaithe ar ráta lascaine 4% agus

$$\text{Luach láithreach} = \frac{\text{Luach cumaisc}}{(1+i)^t} = \frac{18\,000}{(1.04)^3} = €15\,386.48$$

Mar sin is é an duais is fearr ó thaobh luacha de, bunaithe ar ráta lascaine 4%, ná rogha (b), €18 000 i gceann ceithre bliana.

Achoimre

Luach cumaisc: $F = P(1+i)^t$	Luach láithreach: $P = \dfrac{F}{(1+i)^t}$

Sampla 5

Cé mhéad bliain a thógfadh sé ar €5000 méadú go €6500 dá mbeadh sé infheistithe ar AER 3.5%?

Modh 1 (Triail agus earráid)

$$F = P(1+i)^t$$
$$\therefore €6500 = €5000\,(1.035)^t$$

Bain triail as $t = 4 \Rightarrow 5000\,(1.035)^4 = 5737.62 < 6500$ …… $t = 4$ róbheag

Bain triail as $t = 8 \Rightarrow 5000\,(1.035)^8 = 6584.05 > 6500$ …… $t = 8$ rómhór

Bain triail as $t = 7 \Rightarrow 5000\,(1.035)^7 = 6361.40 < 6500$ …… $t = 7$ róbheag

Bain triail as $t = 7.5 \Rightarrow 5000\,(1.035)^{7.5} = 6471.76 < 6500$ …… $t = 7.5$ róbheag

Bain triail as $t = 7.75 \Rightarrow 5000\,(1.035)^{7.75} = 6527.36 > 6500$ …… $t = 7.75$ rómhór

Bain triail as $t = 7.6 \Rightarrow 5000\,(1.035)^{7.6} = 6494.07 < 6500$ …… $t = 7.6$ róbheag

Bain triail as $t = 7.65 \Rightarrow 5000\,(1.035)^{7.65} = 6505.25 > 6500$ …… $t = 7.65$ rómhór

Bain triail as $t = 7.63 \Rightarrow 5000\,(1.035)^{7.63} = 6500.77 > 6500$ …… $t = 7.63$ rómhór

Bain triail as $t = 7.625 \Rightarrow 5000\,(1.035)^{7.625} = 6499.65 < 6500$ …… $t = 7.625$ róbheag

Freagra $t = 7.63$ bliain, ceart go dtí 2 ionad de dheachúlacha.

Modh 2 (Logartaim) $\qquad F = P(1+i)^t$

(féach caibidil 7) $\qquad \therefore\ €6500 = €5000\,(1.035)^t$

$$\Rightarrow \quad (1.035)^t = \frac{€6500}{€5000} = 1.3$$

$$\Rightarrow \quad ln(1.035)^t = ln\,1.3 \quad \text{... logartam an dá thaobh a thógáil}$$

$$\Rightarrow \quad tln(1.035) = ln\,1.3 \quad \text{... } ln A^n = n\,ln A$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{ln 1.3}{ln(1.035)} = 7.63 \text{ bliain}$$

Cleachtadh 5.1

1. Faigh luach cumaisc €3000 nuair a infheistítear é ar feadh 10 mbliana ar ráta coibhéiseach bliantúil (AER) 3%. Bíodh an freagra ceart go dtí 2 ionad de dheachúlacha.

2. Más AER 2.5% atá ann, faigh luach cumaisc €5000 nuair a infheistítear ar feadh 8 mbliana é. Bíodh an freagra ceart go dtí 2 ionad de dheachúlacha. Cén t-ús a d'íocfaí ar an infheistíocht seo?

3. Má tá $\mathbf{(1+r)^{12} = (1+i)}$, áit arb é r an ráta úis in aghaidh na míosa agus i an ráta úis in aghaidh na bliana, faigh r i dtéarmaí i.

4. Cén ráta úis míosúil, ceart go dtí 2 ionad de dheachúlacha, atá coibhéiseach le ráta bliantúil (i) 6%, (ii) 2.5%, (iii) 4%?

5. D'infheistigh Seán €4500 ar feadh cúig bliana in EUROBANK. €5607.82 an méid a bhí san infheistíocht ag deireadh an téarma. Faigh an AER a bhain lena infheistíocht.

6. Buann Sandra €15 000 i gcrannchur agus infheistíonn sí i gcomhar creidmheasa é, áit arb é 3.5% an AER.

   Cóipeáil agus comhlánaigh an chairt seo le taispeáint cén chaoi a n-athraíonn luach a cuid airgid i gcaitheamh chúig bliana na hinfheistíochta.

Bliain	Príomhshuim	Ús
A haon	€15 000	
A dó		
A trí		
A ceathair		
A cúig		

7. Iarrann Colm go gcuirfí ús lena chuntas uair sa leathbhliain. Má thugann an banc AER 4%, faigh an ráta leathbhliantúil coibhéiseach. Bíodh an freagra ceart go dtí ceithre fhigiúr bhunúsacha.

8. Faigh luach cumaisc €6500 a infheistítear ar feadh 6 bliana 4 mhí más é 1.932% an ráta coibhéiseach míosúil.

9. Infheistítear €12,000 ar AER 3.5%.
Faigh luach na hinfheistíochta faoi cheann
(i) 5 bliana 3 mhí (ii) 8 mbliana 2 mhí (iii) 10 mbliana 6 mhí.

10. Má thugann banc ráta lascaine 4.2%, faigh luach láithreach €10 000 a bheidh le híoc i gceann 10 mbliana.

11. Tá Seán 12 bhliain d'aois. Tá sé chun €25 000 a fháil le hoidhreacht nuair a bheidh bliain is fiche slánaithe aige.
Céard é luach láithreach a oidhreachta má ghlacaimid leis gurb é 4.5% an ráta lascaine?

12. Infheistítear €50,000 i mbanc a thugann AER 3.5%.
Cá fhad a thógfaidh sé ar an infheistíocht seo a luach a dhúbailt?

13. Tá sé beartaithe agam €175 000 a fháil ar iasacht chun teach a cheannach.
Má ghearrann an banc AER 4.5%, cé mhéad a bheidh san iasacht seo i gceann 20 bliain, má ghlacaimid leis nach mbeidh aisíocaíocht ar bith á déanamh?

14. Bain úsáid as (a) triail agus earráid agus (b) logartaim le déanamh amach cé mhéad bliain a thógfaidh sé ar €1130 luach cumaisc €3000 a bheith air má infheistítear é ar ús iolraithe 5% in aghaidh na bliana.

15. Úsáidtear an fhoirmle $(1 + r)^{12} = (1 + i)$, áit arb é r an ráta úis in aghaidh na míosa agus i an ráta úis in aghaidh na bliana, chun an glanráta úis míosúil a ríomh.
(i) Má thugtar ús 6% sa bhliain, ríomh an glanráta míosúil, ceart go dtí ceithre ionad de dheachúlacha.
(ii) Mura mbeadh le déanamh chun r a ríomh ach an t-ús bliantúil a roinnt ar 12, bain úsáid as an dá mhodh chun an difríocht idir an dá luach cumaisc ar €10 000 i gceann 3 bliana ar 6% in aghaidh na bliana a ríomh, má dhéantar an t-ús a athiolrú go míosúil.
(iii) Céard é an líon is lú d'ionaid dheachúlacha is gá a chur san áireamh agus r á ríomh sula mbíonn difríocht le sonrú idir na luachanna cumaisc?

16. Infheistíonn Anna €15 000 ar AER 3%. I ndiaidh dhá bhliain, aistarraingíonn sí €2000 ach fágann sí an chuid eile dá hinfheistíocht ar feadh trí bliana eile.
Céard é luach na hinfheistíochta ag deireadh na tréimhse sin?

Mír 5.2 Dímheas

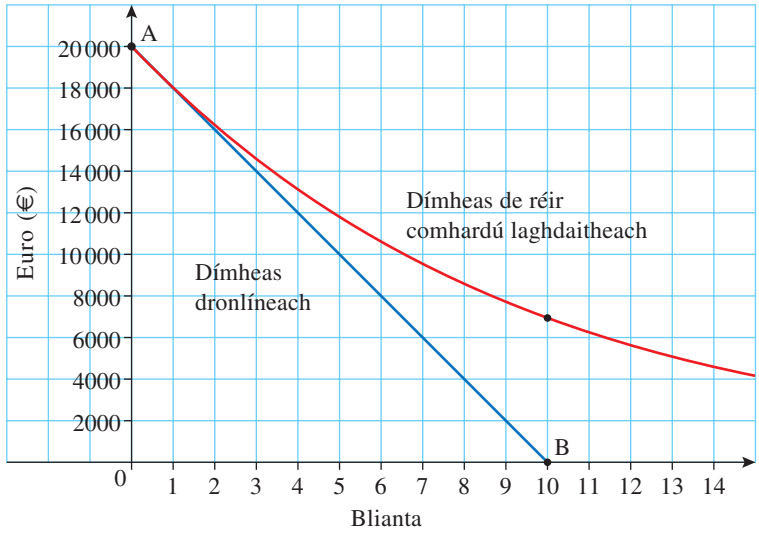
Sa mhír roimhe seo, bhíomar ag plé le hairgead a chuirfí i dtaisce i gcuntas coigiltis agus a dtiocfadh méadú ar a luach. Ba mhó an luach cumaisc ná an luach láithreach.

Bíonn dímheas ann nuair is lú luach cumaisc sócmhainne ná an luach láithreach.
Tagann dímheas ar luach carranna, ríomhairí agus fearais tí le himeacht ama de ghnáth.
Bhí méadú ag teacht ar luach tithe in Éirinn go dtí 2007 ach tá laghdú mór tagtha ar a luach ó shin i gcomparáid leis an mbuaic sin. Féachfaimid anois ar dhá chineál dímheasa.

1. Bíonn **dímheas dronlíneach** ann nuair a thagann laghdú de mhéid tairiseach ar luach ruda gach bliain. Mar shampla, cuir i gcás carr a chosnaíonn €20 000 a chailleann 10% dá bhunluach gach bliain. Cailleann an carr seo €2000 dá luach gach bliain agus mar sin ní bhíonn luach ar bith ar an gcarr faoi cheann 10 mbliana.

2. Bíonn **dímheas de réir comhardú laghdaitheach** ann nuair a thagann laghdú de chéatadán seasta dá luach ar luach ruda gach bliain. Cuir i gcás carr a chosnaíonn €20 000 a chailleann 10% dá luach gach bliain ar chomhardú laghdaitheach.

Luach an chairr faoi cheann 10 mbliana = €20 000 $(1 - 0.1)^{10}$ = €6973.57.



(**Nóta:** Leagann an cúrsa againne béim ar mhodh an chomhardaithe laghdaithigh chun dímheas a ríomh.)

Cosúil le hús iolraithe nuair atá $F = P(1 + i)^t$, is í an fhoirmle $\mathbf{F = P(1 - \mathit{i})^t}$ a thugann luach cumaisc ruda, bunaithe ar chomhardú laghdaitheach.

Dímheas: $F = P(1 - i)^t$

F = luach cumaisc
i = an dímheas ar €P in aghaidh na bliana mar chéatadán
t = líon na mblianta
P = luach tosaigh

Sampla 1

Ceannaíonn comhlacht áirithe meaisín nua a bhfuil praghas €35 000 air.
Tagann dímheas 20% ar an meaisín gach bliain, ar mhodh an chomhardaithe laghdaithigh.

(i) Cén luach a bheidh ar an meaisín i gceann 4 bliana?
(ii) Cé mhéad de dhímheas atá tagtha ar luach an mheaisín i gcaitheamh an ama seo?

(i) Luach cumaisc: $F = P(1 - i)^t$ = €35 000 × $(1 - 0.2)^4$
= €35 000 × $(0.8)^4$ = €14 336.

(ii) Dímheas = €35 000 − €14 336 = €20 664.

Sampla 2

100 000 lítear peitril atá ag garáiste.
Má mheasann an bainisteoir (a) go ndíolfaidh sé 4000 lítear sa lá
(b) go ndíolfaidh sé 5% dá stoc sa lá,
ríomh an difríocht idir an dá mheastachán tar éis 20 lá.

Tar éis 20 lá: 4000 X 20 = 80 000 lítear díolta
$\Rightarrow$ 100 000 − 80 000 = 20 000 lítear fágtha.

Tar éis 20 lá, tá an stoc cumaisc (laghdaithe), $F = P(1 - i)^t$
$= 100\,000\,(1 - 0.05)^{20} = 35\,849$ lítear

Mar sin is é an difríocht idir an dá mheastachán ná 15 849 lítear.

Cleachtadh 5.2

(Sa chleachtadh seo, úsáidtear dímheas ar mhodh an chomhardaithe laghdaithigh mura ndeirtear a mhalairt.)

1. Cén luach a bheidh ar charr, a chosnaíonn €30 000,
(i) i gceann cúig bliana (ii) i gceann deich mbliana bunaithe ar dhímheas 15% sa bhliain?

2. €1400 atá ar theilifíseán nua. Má ghlacaimid leis gurb é 8% in aghaidh na míosa an ráta dímheasa, faigh luach an teilifíseáin faoi cheann 15 mhí.

3. Cosnaíonn carr €44 000. Tagann dímheas 20% ar a luach sa chéad bhliain, agus tagann dímheas 15% sa bhliain ar a luach, ar mhodh an chomhardaithe laghdaithigh, do gach bliain ina dhiaidh sin. Faigh luach an chairr faoi cheann (i) 3 bliana (ii) 6 bliana.

4. Ceannaíonn comhlacht áirithe meaisín a chosnaíonn €140 000.
Le go mbeidh siad in ann meaisín nua a cheannach nuair a bheidh an ceann seo caite, infheistíonn an comhlacht €25 000 i mbanc a thugann ús iolraithe 3.5% in aghaidh na bliana.
Má thagann dímheas ar an meaisín ar ráta 20% sa bhliain, faigh
(a) (i) luach an mheaisín i gceann 4 bliana
(ii) luach na hinfheistíochta coigiltis i gceann 4 bliana.
(b) Más é 2% in aghaidh na bliana an meánráta boilscithe i gcaitheamh na 4 bliana, faigh
(i) an costas a bheidh ar mheaisín nua a cheannach i gceann 4 bliana
(ii) an méid airgid a chaithfidh an comhlacht a chur lena gcoigilteas d'fhonn meaisín nua a cheannach, má chuirtear san áireamh luach athláimhe an mheaisín atá ann faoi láthair i gceann 4 bliana.
(**Nóta:** Is éard is boilsciú ann ná ardú ar *leibhéal ginearálta na bpraghsanna* ar earraí agus ar sheirbhísí i ngeilleagar.)

5. Tagann laghdú ar luach sócmhainne áirithe atá ag comhlacht, ó €175 000 go €73 187.09, ar ráta dímheasa 16% in aghaidh na bliana thar t bliain.
(i) Bain úsáid as triail agus earráid chun luach t a mheas.
(ii) Bain úsáid as logartaim chun luach t a fháil.

6. Tá stoc 60 000 kg de phúdar bainne triomaithe ag uachtarlann i ndeireadh Eanáir 2004. Má laghdaítear an stoc ar ráta 15% in aghaidh na míosa, faigh stoc an bhainne thriomaithe, go dtí an kg is gaire, i dtús Aibreáin 2005.

7. Ceannaíonn feirmeoir tarracóir ar €180 000.
Glacann sé leis go mbeidh luach trádála isteach €80 000 ar an tarracóir i gceann 10 mbliana.

(i) Ríomh an ráta dímheasa in aghaidh na bliana, bunaithe ar na figiúirí sin. Bíodh an freagra ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

(ii) Ar an ráta sin, cathain a thitfidh luach an tarracóra faoi bhun €60 000?

8. Ceannaítear ríomhaire ar €2500.
Déan comparáid idir luachanna trádála isteach an ríomhaire faoi cheann 4 bliana bunaithe ar

(a) glanchaillteanas luacha de €550 in aghaidh na bliana, nó

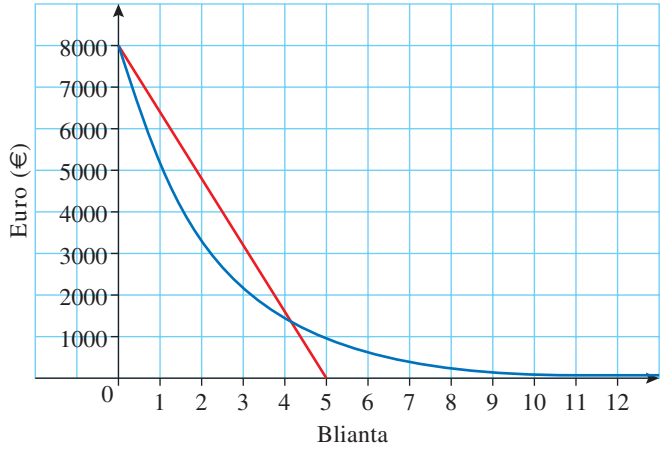
(b) caillteanas 35% in aghaidh na bliana.

9. Ceannaítear córas ríomhaireachta ar €23 500. Tagann dímheas air ar ráta 28% sa bhliain.

Faigh luach an ríomhaire faoi cheann

(i) 2 bhliain (ii) 5 bliana (iii) 7 mbliana.

10. €8000 a bhí ar chóras aerchóirithe. Taispeántar thíos líne le haghaidh dímheas dronlíneach agus cuar le haghaidh dímheasa de réir comhardú laghdaitheach don chóras seo.



(i) Bain úsáid as an ngraf chun an ráta dímheasa a mheas.
(Bíodh an luach faoi cheann 20 bliain = €1.)

(ii) Mínigh cén fáth nach féidir luach nialais a bheith ar chuar an chomhardaithe laghdaithigh go brách.

(iii) Faigh fána na líne dírí a sheasann do dhímheas.

(iv) Déan meastachán ar phointe trasnaithe an dá ghraf.

(v) Cén luach atá ar an gcóras faoi cheann 5 bliana ar bhonn an chomhardaithe laghdaithigh?

(iv) I do thuairim, cén modh dímheasa a thugann an luach is réalaíche ar an gcóras? Mínigh do fhreagra.

Mír 5.3 Tráthchoigilteas (blianachtaí)

1. Tráthchoigilt

Má choiglítear méid tairiseach airgid gach mí ar feadh 3 bliana ar fad, tuilleann gach tráthchuid méid úis (iolraithe) difriúil, mar go n-infheistítear í ar feadh méid difriúil ama. Tá an chéad tráthchuid sa bhanc ar feadh 3 bliana = 36 mí; níl an tráthchuid dheireanach sa bhanc ach ar feadh mí amháin.

Infheistítear €P i dtús gach míosa ar feadh 3 bliana ar ráta míosúil $i\%$.

Luach $P(1 + i)^{36}$ atá ar an gcéad íocaíocht faoi cheann 36 mí.
Luach $P(1 + i)^{35}$ atá ar an dara híocaíocht faoi cheann 35 mí, srl …

Is ionann luach iomlán na hinfheistíochta agus suim an 36 méid aonair sin.

Ríomhtar an tsuim sin mar leanas:

$$P(1 + i)^{36} + P(1 + i)^{35} + P(1 + i)^{34} + \ldots\ldots P(1 + i)^{2} + P(1 + i)^{1}.$$

Ach an t-ord a iompú droim ar ais faighimid

$$P(1 + i)^{1} + P(1 + i)^{2} + P(1 + i)^{3} \ldots\ldots + P(1 + i)^{35} + P(1 + i)^{36}$$

Is ionann é sin agus suim na sraithe iolraíche áit a bhfuil

an chéad téarma, $a = P(1 + i)^{1}$
an comhiolraitheoir, $r = (1 + i)$
líon na dtéarmaí, $n = 36$

Ach úsáid a bhaint as an bhfoirmle le haghaidh suim n téarma i seicheamh iolraíoch, $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$, faighimid

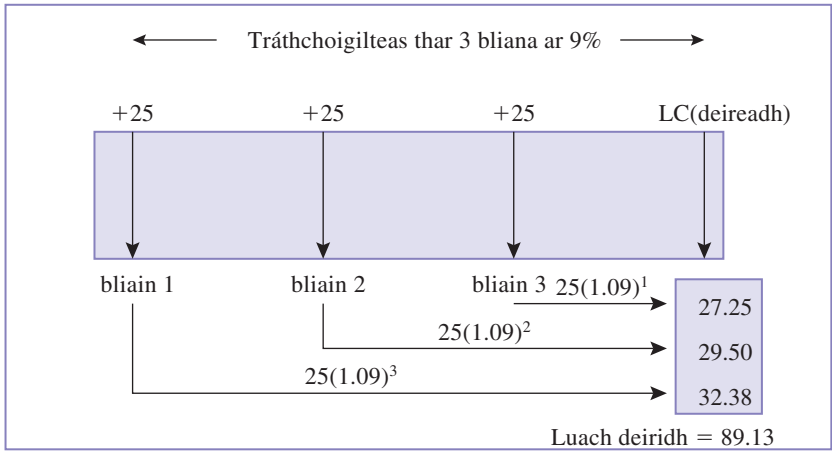
$$\text{luach cumaisc} = \frac{P(1 + i)[1 - (1 + i)^{36}]}{1 - (1 + i)} = \frac{P(1 + i)[1 - (1 + i)^{36}]}{-i}$$

$$= \frac{P(1 + i)[(1 + i)^{36} - 1]}{i}$$

Luach cumaisc, F, tráthchoigiltis thar *t* tráthchuid:

$$F = €P(1 + i)^{1} + €P(1 + i)^{2} + €P(1 + i)^{3} + \ldots €P(1 + i)^{t} = \boldsymbol{\frac{€P(1 + i)[(1 + i)^{t} - 1]}{i}}$$

€P = an méid coigilte i dtús gach míosa/bliana
t = líon na n-íocaíochtaí (míonna/blianta)
i = an ráta úis, scríofa ina dheachúil



Mar shampla, dá gcoigleoinn €25 gach bliain ar feadh 3 bliana, b'ionann iomlán carntha (luach c umaisc) mo choigiltis agus €89.13.

Sampla 1

Coiglíonn Caitríona €400 uair sa ráithe ar feadh cúig bliana ar ghlanráta ráithiúil 0.9%.

(i) Léirigh a coigilteas le sraith iolraíoch.
(ii) Faigh luach a hinfheistíochta i ndeireadh na tréimhse.

$i = 0.9\% = 0.009$
5 bliana = (5×4) ráithe = 20 íocaíocht

(i) Seo mar a léirítear coigilteas Chaitríona:

$$400(1.009) + 400(1.009)^2 + 400(1.009)^3 + \ldots\ldots 400(1.009)^{20}$$

(ii) $a = 400(1.009)$
$r = (1 + i) = 1.009$
$n = 20$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

$$S_n = \frac{400(1.009)[1 - (1.009)^{20}]}{1 - 1.009}$$

$$= 8800.89$$

a = an chéad téarma

Nóta: Agus an ríomh á dhéanamh, tiontaítear an ráta "i" ó chéatadán go deachúil.
M.sh. $i = 5\% = 0.05$.

Sampla 2

Faigh an tsuim airgid, €P, is gá a choigilt gach mí chun díol as costas saoire €1500 i gceann 18 mí. Is é an ráta úis atá á thairiscint ná 0.4% in aghaidh na míosa.

An luach cumaisc (LC) a theastaíonn = €1500

$$F = €P(1 + i) + €P(1 + i)^2 \ldots\ldots = \frac{€P(1 + i)[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

$$\left.\begin{array}{l} i = 0.4\% \\ n = 18 \end{array}\right\} i = 0.004 \Rightarrow 1 + i = 1.009$$

$$\therefore \quad FV = 1500 = P(1.004) + P(1.004)^2 \ldots\ldots P(1.004)^{18}$$

$$\therefore \quad 1500 = \frac{P(1.004)[(1.004)^{18} - 1]}{0.004} = \frac{P \times 0.0748}{0.004} = P \times 18.70$$

$$\therefore \quad P = €1500 \div 18.7$$

$$= €80.21 \text{ in aghaidh na míosa}$$

2. Pinsin

Amhail tráthchoigilteas, is féidir linn ríomh a dhéanamh ar an tsuim airigid is gá a infheistiú anois chun **pinsean seasta** a bheidh le híoc thar líon áirithe blianta a chinntiú.
Mar shampla, má tá mé ag iarraidh pinsean €P in aghaidh na bliana ar feadh an chéad 20 bliain eile, caithfidh mé luach láithreach gach ceann de na híocaíochtaí, €P, a gheobhaidh mé a ríomh. Is ionann iomlán na méideanna "luach láithreach" sin agus an tsuim airgid is gá a infheistiú.

Seo luach láithreach na suime €P a íocfar leat i ndeireadh na chéad bhliana: $\frac{€P}{(1 + i)}$.

Seo luach láithreach na suime €P a íocfar leat i ndeireadh an dara bliain: $\frac{€P}{(1 + i)^2}$.

Faightear an tsuim is gá a infheistiú ach na méideanna sin go léir a shuimiú.

$$\frac{P}{(1 + i)} + \frac{P}{(1 + i)^2} + \frac{P}{(1 + i)^3} \ldots\ldots \frac{P}{(1 + i)^{20}}$$

Seo suim sraithe iolraíche ina bhfuil 20 téarma, áit a bhfuil

$$\left\{\begin{array}{l} a = \frac{€P}{(1 + i)} \\ r = \frac{1}{(1 + i)} \\ n = 20 \end{array}\right.$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)} = \frac{P}{(1 + i)} \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1 + i}\right)^{20}\right)}{\left(1 - \left(\frac{1}{1 + i}\right)\right)}$$

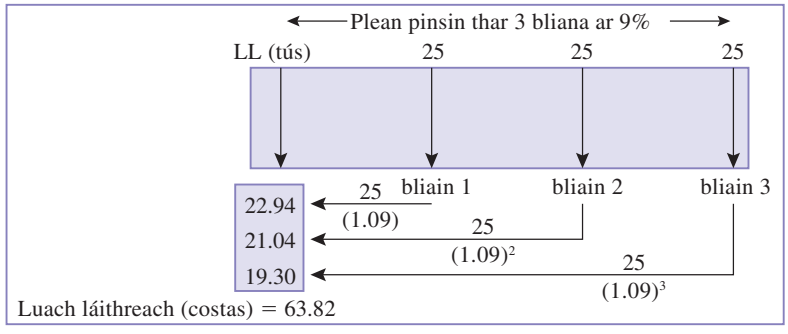
Luach láithreach ciste pinsin:

$$\text{PV} = \frac{€\text{P}}{(1+i)} + \frac{€\text{P}}{(1+i)^2} + \frac{€\text{P}}{(1+i)^3} + \ldots\ldots \frac{€\text{P}}{(1+i)^n} = \frac{\text{P}}{(1+i)} \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right)}{\left(1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)\right)}$$

€P = pinsean bliantúil
n = líon blianta (saolré an phinsin)
i = ráta seasta úis thar théarma an phinsin

Nóta: Feidhmíonn an chuid is mó de phinsin ar ráta úis ráthaithe.

Ach d'fhéadfadh cuid acu a bheith ag brath ar fheidhmíocht an mhargaidh agus go mbeadh níos mó nó níos lú le fáil astu ná mar a bheadh le fáil ar an ráta seasta (ráthaithe).



Is é sin, má tá pinsean €25 uaim gach bliain ar feadh 3 bliana, caithfidh mé €63.82 a infheistiú anois.

Sampla 3

Cén méid airgid a theastaíonn anois chun pinsean €25 000 in aghaidh na bliana ar feadh 20 bliain a sholáthar, má ghlacaimid leis gur AER 4% atá ann?

$$i = 4\% = 0.04 \quad \Rightarrow \quad 1 + i = 1.04$$

Léiríonn an tsraith iolraíoch seo a leanas an méid a theastaíonn, nó luach láithreach (P), an phinsin seo:

$$\text{P} = \frac{25\,000}{1.04} + \frac{25\,000}{(1.04)^2} + \frac{25\,000}{(1.04)^3} + \ldots\ldots \frac{25\,000}{(1.04)^{20}}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{25\,000}{(1.04)} \\ n &= 20 \\ r &= \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1.04} \end{aligned}\right\} \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{25\,000}{(1.04)} \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1.04}\right)^{20}\right)}{\left(1 - \left(\frac{1}{1.04}\right)\right)}$$

$$= 339\,758.16$$

Mar sin soláthróidh ciste pinsin €339 758.16 a infheistitear anois 20 íocaíocht bhliantúil de €25 000.

Achoimre

Luach cumaisc

***n* íocaíocht €P ar *i*%**

$$\text{Luach cumaisc} = P(1+i)\left(\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}\right)$$

$$= P(1+i)\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

Luach láithreach (costas)

***n* íocaíocht €P ar *i*%**

$$\text{Luach láithreach} = \left(\frac{P}{1+i}\right)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)}\right]$$

$$= \frac{P}{(1+i)^n}\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

Nóta: Cé gur féidir an chuid is mó de cheisteanna ar thráthchoigilteas agus ar phinsin a fhreagairt ach úsáid a bhaint as an bhfoirmle chuí, is maith an nós é an tsraith iolraíoch atá mar bhonn agus mar thaca ag an gceist a leagan amach. Tá sé tábhachtach an chéad téarma, an comhiolraitheoir agus líon na dtéarmaí sa tsraith a shainaithint i gcás gach ceiste.

Sampla 4

Ríomh luach cumaisc plean tráthchoigiltis atá bunaithe ar €600 a choigilt i *d***tús** gach bliana ar 4% in aghaidh na bliana ar feadh 5 bliana.

(i) Ríomh luach láithreach na n-íocaíochtaí seo.

(ii) Taispeáin uaidh sin, dá gcuirfí an luach láithreach i dtaisce ar an ráta céanna ar feadh an fhaid chéanna ama, go mbeadh an luach cumaisc céanna air.

Plean coigiltis: $LC = 600(1.04) + 600(1.04)^2 + 600(1.04)^3 + 600(1.04)^4 + 600(1.04)^5$

$$= €600(1.04)\left(\frac{(1.04)^5 - 1}{0.04}\right) = €3\,379.79 \text{ (i ndeireadh 5 bliana)}$$

(i) $$\text{Luach láithreach } (LL) = €600 + \frac{€600}{(1.04)^1} + \frac{€600}{(1.04)^2} + \frac{€600}{(1.04)^3} + \frac{€600}{(1.04)^4}$$

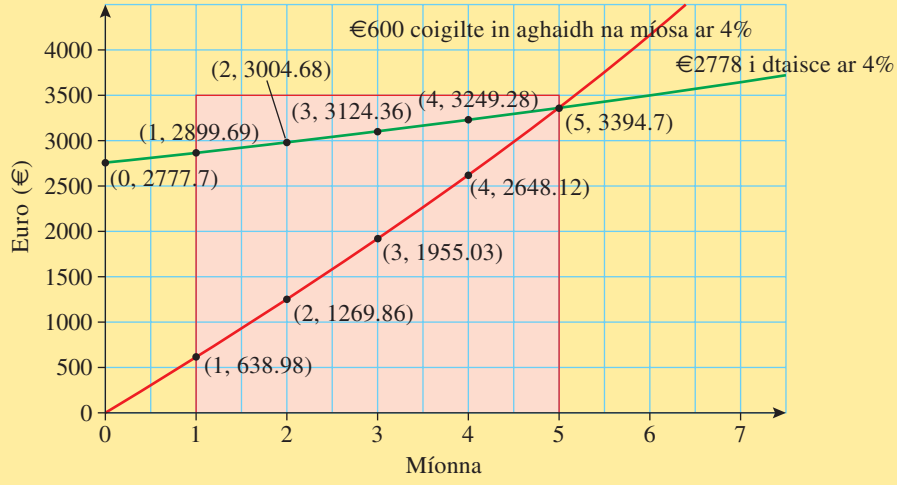
$$= €600 \times \frac{\left(1-\left(\frac{1}{1.04}\right)^5\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{1.04}\right)\right)} = \frac{600}{(1.04)^4}\left(\frac{(1.04)^5 - 1}{0.04}\right)$$

$$= €2777.94 \text{ (}\textbf{i dtús na 5 bliana}\text{)}$$

(ii) Má infheistítear €2777.94 ar 4% ar feadh 5 bliana, is ionann a luach cumaisc agus $€2777.94(1.04)^5 = €3379.79$.

TFC: Ach úsáid a bhaint as áireamhán grafaicí nó as bogearraí ríomhaireachta, tá sé éasca comparáid a dhéanamh idir tráthchoigilteas agus luach cumaisc (méid) suim airgid a chuirtear i dtaisce.

€600 a choigilt in aghaidh na bliana ar 4%: $FV(y) = 600*(1.04)(1.04^x - 1)/(0.04)$
€2778 i dtaisce ar 4%: $FV(y) = 2778(1.04)^x$ y: an LC in euro
x: líon na mblianta



Cleachtadh 5.3

1. Ríomh luach cumaisc 36 tráthchuid mhíosúil de €20.00 ar ráta úis 0.5% in aghaidh na míosa. Céard é an t-ús iomlán a thuillltear ar an gcoigilteas seo?

2. Tá €30 in aghaidh na míosa coigilte ag Máire óna 18ú breithlá i leith.
Má tá ráta úis 4% in aghaidh na bliana ráthaithe ag a banc di, faigh

(i) an ráta úis míosúil coibhéiseach, ceart go dtí dhá ionad dheachúlacha
(ii) luach a coigiltis ar a 21ú breithlá.

3. Tugann cuntas coigiltis speisialta AER 4% in aghaidh na bliana. Má infheistím €2000 in aghaidh na bliana sa chuntas seo, cén luach a bheidh ar an infheistíocht i gceann 5 bliana?

4. Maidir le luach cumaisc sraith n íocaíocht, ar fiú €P gach ceann díobh, a thuilleann ráta úis i% in aghaidh na bliana, taispeáin gur féidir é a scríobh mar seo:

$$\text{Luach cumaisc} = P(1 + i)\left(\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right)$$

5. Maidir le luach láithreach sraith n íocaíocht, ar fiú €P gach ceann díobh, a thuilleann ráta úis i% in aghaidh na bliana, taispeáin gur féidir é a scríobh mar seo:

$$\text{Luach láithreach} = \frac{P}{(1 + i)^n}\left(\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right)$$

6. Fuair Áine seic le haghaidh €6523.33 sa phost tar éis di a bheith ag coigilt ar feadh 5 bliana lena banc i scéim a bhí ag tabhairt 9% in aghaidh na bliana. Má d'infheistigh sí €A in aghaidh na bliana,

(i) scríobh síos sraith iolraíoch a léiríonn luach a hinfheistíochta thar na 5 bliana

(ii) faigh luach A.

7. Bain úsáid as foirmle an luacha cumaisc chun an luach deiridh a fháil má infheistítear €200 gach mí ar feadh 2 bhliain. 9% in aghaidh na bliana an ráta úis, athiolraithe gach mí.

8. Is mian le Seoirse íocaíochtaí rialta a dhéanamh isteach i gcuntas a íocann úis iolraithe 8.5% in aghaidh na bliana, d'fhonn €10 000 a bheith aige faoi cheann 7 mbliana. Faigh méid gach íocaíochta bliantúla.

9. Tá Ella ag iarraidh go mbeadh €5000 aici i gceann 3 bliana.
Infheistíonn sí i mblianacht a íocann 7.2% in aghaidh na bliana, athiolraithe go ráithiúil.
Cé mhéad a chaithfidh sí a chur i dtaisce gach ráithe chun sprioc an €5000 a bhaint amach?

10. Cruthaigh gur mar seo a fhaightear luach láithreach blianachta (tráthchodanna a íoctar i dtús gach tréimhse):

Luach cumaisc (a ríomhtar i ndeireadh gach tréimhse) $\div (1 + i)^n$.

11. Maidir le luach láithreach blianachta, lena mbaineann €3000 in aghaidh na bliana a chur i dtaisce i gcuntas ar feadh 6 bliana, taispeáin an chaoi lena scríobh mar shraith iolraíoch, más é 8% in aghaidh na bliana an ráta úis.

(i) Ríomh an luach láithreach.

(ii) Ríomh luach cumaisc na blianachta.

(iii) Dá gcuirfí luach láithreach na blianachta in (i) i dtaisce mar infheistíocht aonair ar 8% in aghaidh na bliana, taispeáin gurb ionann an luach a bheadh air faoi cheann 6 bliana agus luach cumaisc na blianachta a fuair tú in (ii).

Mír 5.4 Iasachtaí – Morgáistí

Más mian linn na haisíocaíochtaí a theastaíonn le haghaidh iasacht chairr nó le haghaidh morgáiste ar heach a ríomh, úsáidimid an modh céanna chun an luach láithreach a fháil is a d'úsáideamar sa mhír roimhe seo.

Caithfidh suim na luachanna láithreacha ar na haisíocaíochtaí go léir thar an tréimhse ama atá i gceist a bheith cothrom le luach na hiasachta cairr nó an mhorgáiste.

$$€\text{Morgáiste} = \frac{€\text{Íocaíocht}}{1+i} + \frac{€\text{Íocaíocht}}{(1+i)^2} + \frac{€\text{Íocaíocht}}{(1+i)^3} + \ldots \frac{€\text{Íocaíocht}}{(1+i)^n}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{€\text{Íocaíocht}}{1+i}\right)}_{a} \left[\frac{1-\overbrace{\left(\frac{1}{1+i}\right)}^{r}{}^{n}}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)}\right]$$

$$\text{Morgáiste} = \left(\frac{€\text{Íocaíocht}}{1+i}\right)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)}\right] = \left(\frac{€\text{Íocaíocht}}{1+i}\right)\left[\frac{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}}{\left(\frac{i}{1+i}\right)}\right]$$

$$= \left(\frac{€\text{Íocaíocht}}{i}\right)\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right]$$

$$\therefore \quad €\text{Íocaíocht} = \frac{€\text{ Morgáiste }(i)(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$$

(*foirmlí agus táblaí*, lch 31)

i = an glanráta úis míosúil (scríofa ina dheachúil)
n = líon na n-íocaíochtaí (blianta/míonna)
€ M = méid an mhorgáiste nó na hiasachta
€ P = an aisíocaíocht in aghaidh na míosa

Sampla 1

Ríomh méid na n-aisíocaíochtaí a theastaíonn le haghaidh iasacht chairr €10 000 má tá an iasacht le haisíoc thar théarma 5 bliana ar ghlanráta míosúil 0.72%.

$i = 0.72\% = 0.0072 \quad \Rightarrow \quad 1 + i = 1.0072$

$n = 5 \times 12 = 60$ aisíocaíocht

$$\therefore \quad €\text{ Aisíocaíocht} = \frac{€\text{Iasacht}(i)(1+i)^n}{(1+i)^n-1} = \frac{€10\,000(0.0072)(1.0072)^{60}}{(1.0072)^{60}-1}$$

$= 206$ … ceart go dtí an euro is gaire

Nóta: Agus an fhoirmle le haghaidh morgáiste nó iasachta in úsáid, íoctar gach (ais)íocaíocht i ndeireadh na tréimhse cuntasaíochta, i.e. i ndeireadh míosa nó i ndeireadh bliana.

Sampla 2

Faigh na haisíocaíochtaí míosúla a theastaíonn le haghaidh morgáiste €150 000, bunaithe ar ráta bliantúil 4.5% thar 20 bliain.

An chéad rud a dhéanaimid ná an glanráta míosúil a fháil:

$(1 + r)^{12} = (1 + i)$, áit a bhfuil $r\%$ = ráta in aghaidh na míosa
agus $i\%$ = ráta in aghaidh na bliana.

$\Rightarrow (1 + r)^{12} = 1.045$

$\Rightarrow (1 + r) = (1.045)^{\frac{1}{12}} = 1.00367$

$\Rightarrow r = 0.00367$ in aghaidh na míosa $= 0.367\%$ in aghaidh na míosa

$n = 20 \times 12 = 240$ íocaíocht

$$\therefore \; €\text{Íocaíocht} = \frac{€\text{Morgáiste }(i)(1+i)^n}{(1+i)^n-1} = \frac{€150000\,(0.00367)(1.00367)^{240}}{(1.00367)^{240}-1} = €941.22$$

Mar sin is é an aisíocaíocht mhíosúil ná €941.22.

Cleachtadh 5.4

1. Ríomh na haisíocaíochtaí míosúla a theastaíonn le haghaidh morgáiste €200 000 a íoctar thar thréimhse 30 bliain ar ráta úis bliantúil 6%.

2. Is mian le hAilís morgáiste 20 bliain a fháil.
   8% in aghaidh na bliana an meánráta úis thar shaolré an mhorgáiste.
   Tá Ailís in ann aisíocaíochtaí €850 in aghaidh na míosa a íoc.
   Céard é an morgáiste is mó is féidir léi a aisíoc?
   Bíodh do fhreagra ceart go dtí an €100 is gaire.

3. Céard é an íocaíocht mhíosúil, ceart go dtí an euro is gaire, ar mhorgáiste €75 000, más é 8% an ráta úis, ar feadh
   (a) 20 bliain (b) 25 bliain (c) 30 bliain
   Cé mhéad úis a íoctar i gcás gach rogha?

4. Tugann an fear díolta carranna áitiúil rogha duit idir dhá phlean íocaíochta chun carr €15 000 a cheannach.
   Plean A: Lascaine 10% ar phraghas an chairr agus iasacht le haghaidh an chuid eile ar ráta bliantúil 9% ar feadh 5 bliana.
   Plean B: Gan lascaine ar bith ach iasacht le haghaidh an phraghais iomláin, €15 000, ar ráta bliantúil 3% ar feadh 5 bliana.
   Cé acu plean ba chóir duit a roghnú?

5. Tá €250 000 coigilte ag bean chun pinsean a mhaoiniú agus anois tá sé i gceist aici dul ar scor. Is mian léi tráthchodanna bliantúla cothroma a tharraingt anuas ón gcoigilteas seo ar feadh an chéad 25 bliain eile.
   Más 5% atá sa ráta úis, ríomh luach na dtráthchodanna bliantúla.

6. Tá beirt ag iarraidh do theach a cheannach. Tá an chéad duine sásta €200 000 a thabhairt duit ar an bpointe boise. Is éard a ofrálann an dara duine duit ná 25 íocaíocht bhliantúil, €15 000 an ceann. Más féidir leat ráta bliantúil 5% a fháil ar do chuid airgid, cén tairiscint ar chóir duit glacadh léi?

7. Tá €400 in aghaidh na míosa ar feadh 3 bliana ag teastáil ó Mhaolcholaim fad is atá sé ina mhac léinn ar an gcoláiste. Cén méid airgid is gá dá thuismitheoirí a infheistiú, ar 6.6% in aghaidh na bliana arna athiolrú go míosúil, chun an t-airgead a theastaíonn ó Mhaolcholaim a chur ar fáil?

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. Infheistíonn bean €1000 gach bliain ar ús iolraithe 8% in aghaidh na bliana.
   Faigh luach na hinfheistíochta faoi cheann 5 bliana.

2. Infheistítear €300 gach mí ar feadh ocht mbliana.
   Faigh luach iomlán na hinfheistíochta faoi cheann ocht mbliana, más ráta tairiseach 6% in aghaidh na bliana atá i gceist.

3. Tá iasacht chairr €20 000 le haisíoc ina 25 tráthchuid chothrom.
Más 2% atá sa ghlanráta úis, ríomh méid gach tráthchoda, ceart go dtí an euro is gaire.

4. Tá Sílbhe ag pleanáil turas thar lear a mhairfidh 3 bliana agus measann sí go mbeidh sí ag caitheamh €600 in aghaidh na míosa.
Cé mhéad airgid is gá a choigilt chun íoc as an turas seo?
Glac leis gur meánráta úis 4% a bheidh i gceist i gcaitheamh thréimhse an turais.

5. Ofrálann comhlacht cártaí creidmheasa 1.25% in aghaidh na míosa do chliaint mar ráta úis tosaigh ar iarmhéideanna gan íoc, agus 2.5% in aghaidh na míosa mar ráta rialta faoi cheann bliana.
Faigh na rátaí úis coibhéiseacha (AER) in aghaidh na bliana.

6. Coiglíonn Seán €200 sa mhí ar feadh 5 mhí ar ghlanráta míosúil 0.75%.
Sloinn an coigilteas seo mar shraith iolraíoch.
Scríobh síos an chéad téarma, an comhiolraitheoir agus slonn le haghaidh shuim na gcúig théarma.

7. Bain úsáid as foirmle an luacha cumaisc le fáil amach cé mhéad ab fhiú €1600 dá n-infheisteofaí gach bliain ar feadh 5 bliana é, ar ús iolraithe 6% in aghaidh na bliana.

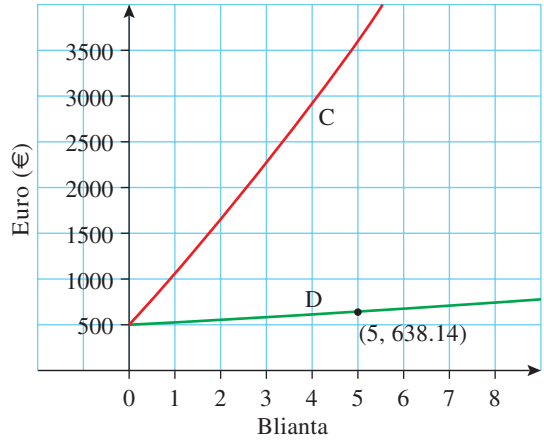
8. Is éard atá i gceist le blianacht áirithe ná €3000 in aghaidh na bliana a choigilt ar feadh 8 mbliana.
   (i) Bain úsáid as foirmle an luacha láithrigh chun ríomh a dhéanamh ar an méid aonair airgid a d'fhéadfaí a infheistiú ar an ráta céanna agus ar feadh an méid céanna ama chun an méid deiridh céanna a fháil.
   (ii) Bain úsáid as foirmle an úis iolraithe (luach cumaisc) chun méid deiridh na hinfheistíochta a fháil.
   (iii) Agus tú ag úsáid fhoirmle an luacha cumaisc do bhlianachtaí, seiceáil go dtugann an bhlianacht an méid deiridh céanna.

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. Meastar gur €500 000 an dliteanas pinsean bheidh ar do chomhlacht i gceann 10 mbliana.
   (i) Cé mhéad airgid a theastódh uait anois chun díol as an dliteanas ionchais seo?
   Glac leis gurb é 9% an ráta bliantúil.
   (ii) Cé mhéad ba ghá duit a chur i leataobh i ndeireadh gach bliana ar feadh na gcéad 10 mbliana eile chun díol as an dliteanas (glac leis gurb é an ráta céanna atá i bhfeidhm)?

2. Cé acu is fearr i ndeireadh 20 bliain?
   (i) Infheistíocht €100 000 ar 12% in aghaidh na bliana, athiolraithe go míosúil, **nó**
   (ii) €1000 a infheistiú gach mí ar 12% in aghaidh na bliana, athiolraithe go míosúil.

3. Tá graif dhá chuntas bainc éagsúla, C agus D, le feiceáil thíos.
Tá an ráta úis mar an gcéanna i gcás an dá chuntas.
Bain úsáid as na sonraí sna graif chun an ráta úis a bhaineann leis an dá chuntas a ríomh.
Déan cur síos ar an difríocht idir na cuntais.
Ríomh luach chuntas C faoi cheann 5 bliana.



4. Ofrálann banc áirithe ráta 10% duit ar mhorgáiste 20 bliain a bheidh le híoc ina aisíocaíochtaí míosúla.
Más é €700 an méid is mó is féidir leat a íoc mar aisíocaíocht mhíosúil, faigh luach an mhorgáiste is mó a bheadh sé d'achmhainn agat a íoc ar ais.

5. Glac leis go mbeidh tú ag dul ar scor i gceann 25 bliain.
Tá morgáiste €100 000 uait anois chun síneadh a chur le do theach agus chun é a athchóiriú ach tá tú ag iarraidh go mbeidh sé íoctha go hiomlán sula dtéann tú ar scor. €800 an aisíocaíocht is mó a cheadóidh do bhuiséad in aghaidh na míosa. Ag úsáid atrialla (triail agus earráid) duit, céard é an ráta úis a theastaíonn uait ón mbanc le go n-aisíocfaidh tú an iasacht in 300 íocaíocht mhíosúil (i.e. 25 bliain)?

6. Tá ciste pinsin deich mbliana ar fiú €127 953 é le tarraingt anuas ar ráta €15 000 in aghaidh na bliana.

Más ráta bliantúil 3% a bhaineann leis an gciste, cóipeáil agus comhlánaigh an chairt seo a thugann luach an chiste i dtús gach bliana.

Bliain	Ciste pinsin	Ús	Íocaíocht
A haon	€127 953	€3838.59	€15 000
A dó	€116 791.59	€3503.75	€15 000
A trí	€105 295.38		€15 000
A ceathair			€15 000
A cúig			€15 000
A sé			€15 000
A seacht			€15 000
A hocht			€15 000
A naoi			€15 000
A deich			€15 000

Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. Glac leis gurb é 5% an ráta céatadánach bliantúil (APR) a ghearrann banc áirithe, arna athiolrú go bliantúil. Cóipeáil agus comhlánaigh na cairteacha seo a leanas a thaispeánann an phríomhshuim atá fós gan íoc tar éis aisíocaíocht
(i) €6000 (ii) €12 000 in aghaidh na bliana ar iasacht €100 000.
Ríomh an méid atá fós gan íoc faoi cheann 10 mbliana i gcás an dá scéim aisíocaíochta.

Bliain	Príomhshuim	Ús	Íocaíocht
1	100 000	5000	6000
2	99 000	4950	6000
3	97 950		6000
4			6000
5			6000
6			6000
7		4659.9	6000
8			6000
9			6000
10			6000

Bliain	Príomhshuim	Ús	Íocaíocht
1	100 000	5000	12 000
2	93 000	4650	12 000
3	85 650		12 000
4			12 000
5			12 000
6			12 000
7			12 000
8		2150.3	12 000
9			12 000
10			12 000

2. Tá tú 35 bliain d'aois inniu agus tá tú ag pleanáil le haghaidh do chuid riachtanas nuair a rachaidh tú ar scor. Tá sé i gceist agat dul ar scor nuair a bheidh tú 65 bliain d'aois agus, de réir staidéir achtúireacha, mairfidh tú go mbeidh tú 100 bliain d'aois.
Tá tú ag iarraidh bogadh amach faoin tuath nuair a rachaidh tú ar scor.
Measann tú go mbeidh costas €300 000 ag baint leis an mbogadh (ar do 65ú lá breithe) agus gur €20 000 in aghaidh na bliana an costas maireachtála a bheidh i gceist, ag tosú ag deireadh na chéad bhliana tar éis dul ar scor.
Más é 4% an meánráta bliantúil i gcaitheamh shaolré an phlean,
(i) cé mhéad a chaithfidh a bheith coigilte agat faoin am a rachaidh tú ar scor le go mbeidh tú in acmhainn an plean seo a bheith agat?
(ii) Tá €40 000 de choigilteas agat anois. Más féidir leat an t-airgead seo a infheistiú (saor ó cháin) ar 5% in aghaidh na bliana, cé mhéad airgid a chaithfidh tú a choigilt gach bliain le go mbeidh sé d'acmhainn agat íoc as do phlean scoir?
(iii) Mura mbeadh coigilteas ar bith agat agus mura mbeifeá in ann tosú ag coigilt go ceann 5 bliana eile, cé mhéad a chaithfeá a chur i leataobh gach bliain sa chás sin le go mbeadh sé d'acmhainn agat íoc as an bplean seo?

3. Tá tú ag iarraidh morgáiste €100 000 a fháil ó chumann foirgníochta. 9% in aghaidh na bliana an ráta atá fógartha.
Ach níl tú in ann ach €800 in aghaidh na míosa a aisíoc.
(i) Scríobh cothromóid le haghaidh aisíocaíochtaí morgáiste. Mínigh gach téarma sa chothromóid.
(ii) Ríomh an ráta úis míosúil atá coibhéiseach le 9% in aghaidh na bliana.
(iii) Ríomh an líon íocaíochtaí a theastaíonn chun an morgáiste a ghlanadh.
(iv) Cá fhad a thógfadh sé ort an morgáiste seo a ghlanadh ina iomláine?

4. Tógann Risteard agus Natalie amach iasacht €150 000 thar 30 bliain ar ús 8.25% in aghaidh na bliana, arna athiolrú go míosúil. Tá a gcuid aisíocaíochtaí socraithe ag €1127 in aghaidh na míosa.

(i) Bain úsáid as scarbhileog cosúil leis an gceann thíos agus ríomh an méid den iasacht a bheidh fós le híoc faoi cheann 5 bliana.

	A	B	C	D	E
1	Morgáiste	Ús	Íocaíocht	Iarmhéid	
2	150000	990	1127	149863	
3	149863	989.0958	1127	149725.1	
4	149725.1	988.1856	1127	149586.3	
5	149586.3	987.2695	1127	149446.6	
6	149446.6	986.3472	1127	149305.9	
7					

(Nóta: Ach líne 3 a aibhsiú agus an chros in íochtar ar dheis a shracadh, is féidir an t-iarmhéid ar an gcuntas a fheiceáil mí ar mhí.

Tar éis dóibh an iasacht a aisíoc ar feadh 5 bliana, déanann siad íocaíocht chnapshuime €40 000.

(ii) Cá fhad a thógfaidh sé an iasacht a aisíoc i ndiaidh na híocaíochta seo?

(iii) Cé mhéad a shábháiltear tríd an íocaíocht chnapshuime a dhéanamh?

5. Ofrálann cluiche crannchuir i Stáit Aontaithe Mheiriceá pota óir $21.5 milliún mar phríomhdhuais. Tá an duais seo le tabhairt in 26 tráthchuid bhliantúil ar fiú $A an ceann iad. Tugtar an chéad tráthchuid ar an spota.

Tá sé ráthaithe go dtiocfaidh méadú 4% ar luach na híocaíochta gach bliain.

(i) Scríobh síos, i dtéarmaí A, méid gach ceann de na chéad cheithre íocaíocht.

(ii) Scríobh síos uaidh sin sraith iolraíoch a sheasann don phota óir $21.5 milliún.

(iii) Faigh, ceart go dtí an dollar is gaire, luach gach tráthchoda $A.

(iv) Bain úsáid as do luach ar A agus as do fhreagra ar (i) chun cairt a chomhlánú le haghaidh na gcéad cheithre íocaíocht.

Uimhir íocaíochta	1	2	3	4
Méid iarbhír		$504 607		$545 783

(v) Tá rogha 'airgead síos' ann freisin. Má ghlacann duine an rogha sin faigheann sé/sí luach láithreach gach ceann de na híocaíochtaí anois.
Is é 4.78% an ráta úis a úsáidtear le haghaidh 'airgead síos'.
Ag úsáid na cairte in (iv) duit, comhlánaigh an tábla seo a leanas:

Uimhir íocaíochta	1	2	3	4
Luach láithreach	$485 199		$478 002	

(vi) Scríobh síos, i dtéarmaí *n*, slonn do luach láithreach an *n*ú híocaíocht bhliantúil.

(vii) Faigh suim iomlán na luachanna láithreacha, i.e. an t-airgead atá iníoctha faoin rogha 'airgead síos'.

(viii) Buadh an pota óir seo le déanaí. Roghnaigh an buaiteoir airgead síos. Tar éis cáin a íoc, fuair sí $7.9 milliún. Agus tú ag úsáid an fhreagra a fuair tú ar (vii), faigh an céatadán cánach a gearradh ar an airgead a bhuaigh sí. (In oiriúint as Scrúdú na hArdteistiméireachta, Tionscadal Mata, Páipéar 1, 2011 ó Choimisiún na Scrúduithe Stáit.)

caibidil 6

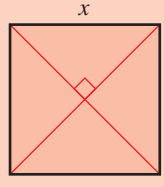
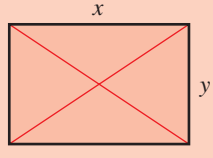
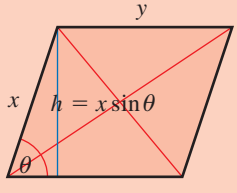
Fad – Achar – Toirt

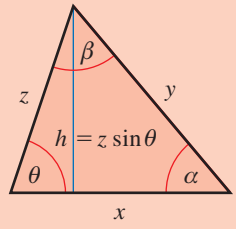
Focail thábhachtacha

polagán **achar** **imlíne** **trasnán** **traipéisiam** **ceathairshleasán ciorclach**
stua **teascóg** **raidian** **ceathairshleasán**

Mír 6.1 Súil siar

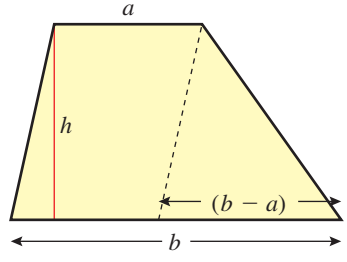
Sa tábla seo a leanas, déanfaimid achoimre ar phríomhairíonna cruthanna déthoiseacha a chonaic tú cheana féin agus tú i mbun na matamaitice.

Cruth	Léaráid	Airíonna
Cearnóg		› tá an fad céanna ag gach slios › tá gach uillinn 90° › imlíne $= 4x$ › achar $= x^2$ › trasnán $= \sqrt{2}x$ › déroinneann na trasnáin a chéile go hingearach
Dronuilleog		› tá an fad céanna ag sleasa urchomhaireacha › tá gach uillinn 90° › imlíne $= 2(x + y)$ › achar $= xy$ › trasnán $= \sqrt{x^2 + y^2}$ › tá an fad céanna ag na trasnáin › déroinneann na trasnáin a chéile
Comhthreomharán		› tá an fad céanna ag sleasa urchomhaireacha › tá uillinneacha urchomhaireacha cothrom › imlíne $= 2(x + y)$ › achar $= yh = yx \sin\theta$ › déroinneann na trasnáin a chéile

Triantán		› imlíne $= x + y + z$ › achar $= \frac{1}{2}x.h = \frac{1}{2}x.z.\sin\theta$ › $\frac{y}{\sin\theta} = \frac{z}{\sin\alpha}$ › tá cineálacha éagsúla triantán ann, m.sh. triantáin chomhchosacha, chomhshleasacha, chorrshleasacha, dhronuilleacha › $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ › triantáin speisialta dhronuilleacha le sleasa • $3, 4, \mathbf{5}$ …… $(36.9^\circ, 53.1^\circ, 90^\circ)$ • $1, \sqrt{3}, \mathbf{2}$, …… $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ • $1, 1, \sqrt{\mathbf{2}}$ …… $(45^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$

1. Traipéisiam

Ceathairshleasán é **traipéisiam** a bhfuil péire amháin de shleasa comhthreomhara air.



$$\text{Achar traipéisiam} = ah_{\text{comhthreomharán}} + \tfrac{1}{2}(b-1)\,h_{\text{triantán}}$$

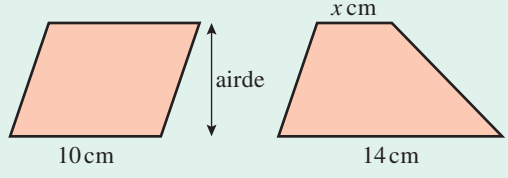
$$= ah + \tfrac{1}{2}bh - \tfrac{1}{2}ah$$

$$= \tfrac{1}{2}ah + \tfrac{1}{2}bh = \left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

= leatshuim fhaid na sleasa comhthreomhara faoin airde.

Sampla 1

Má tá bonn 10 cm ag comhthreomharán, agus má tá bonn 14 cm ag traipéisiam a bhfuil an t-achar céanna agus an airde chéanna aige, faigh x, fad shlios eile comhthreomhar an traipéisiam.



Achar comhthreomharáin = Bonn × airde ingearach $(h) = 10h$

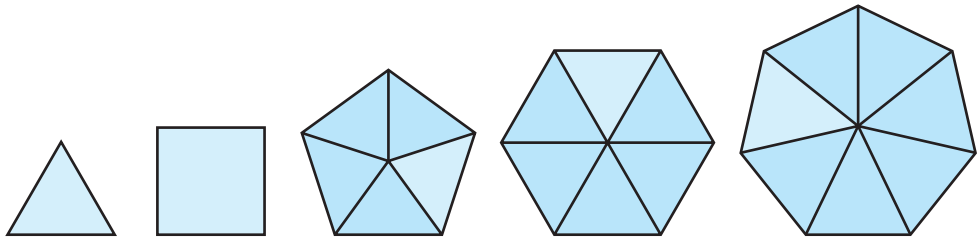
Achar traipéisiam $= \frac{1}{2}(x + 14) \times$ airde ingearach $(h) = \frac{1}{2}(x + 14)h$

$\therefore \quad 10h = \frac{1}{2}(x + 14)h$

$\Rightarrow \quad 20 = x + 14$

$\Rightarrow \quad x = 6 \quad \Rightarrow$ an slios eile comhthreomhar = 6 cm

POLAGÁIN



triantán ceathairshleasán peinteagán heicseagán heipteagán

2. Polagáin

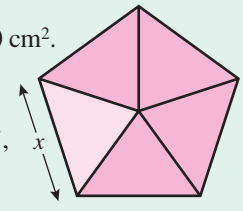
Cruth plánach (déthoiseach) é **polagán** a bhfuil sleasa díreacha air.

Tá polagáin rialta siméadrach, agus bíonn buntriantáin chothroma i bpolagáin a bhfuil níos mó ná 4 shlios orthu. Is iad seo a leanas na huillinneacha inmheánacha i bpolagáin rialta:

Triantán = 60°, Ceathairshleasán = 90°, Peinteagán = 108°, Heicseagán = 120°, Heipteagán = 128.6°

Sampla 2

Is ionann achar an pheinteagáin rialta a thaispeántar anseo agus 600 cm^2. Ríomh fad sleasa amháin, x, den pheinteagán.

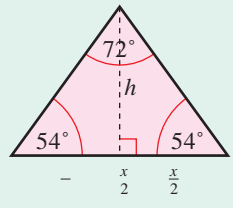


Ó tharla go bhfuil an uillinn iomlán i lár an pheinteagáin = 360°,

$\therefore$ tá gach uillinn sa lár $= \dfrac{360}{5}^\circ = 72^\circ$.

Tá gach triantán iomchuí agus tá bonnuillinneacha cothroma acu $= \dfrac{(180 - 72)^\circ}{2} = 54^\circ$

Is ionann achar gach triantáin agus $\left(\dfrac{600}{5}\right)\text{cm}^2 = 120\,\text{cm}^2$.



$\text{Tan } 54^\circ = \dfrac{h}{\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{x}{2}\tan 54^\circ$

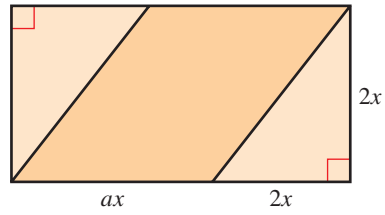
$$\text{Achar an triantáin} = \frac{1}{2} \times \text{bonn} \times h = \frac{1}{2} \times x \times h = 120\,\text{cm}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times x \times \frac{x}{2}\tan 54^\circ = 120\,\text{cm}^2$$

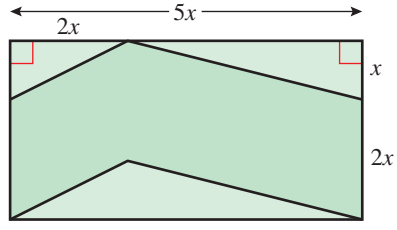
$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{480}{\tan 54^\circ} = 348.74 \quad \Rightarrow \quad x = 18.675 = 18.7\,\text{cm}$$

Cleachtadh 6.1

1. Tarraingítear comhthreomharán laistigh de dhronuilleog mar a thaispeántar.
Agus na tomhais a thugtar á n-úsáid agat, faigh
(i) an codán, i dtéarmaí a, d'achar na dronuilleoige atá sa chomhthreomharán
(ii) an luach ar a a theastaíonn le go mbeadh achar an chomhthreomharáin $= \frac{4}{5}$ d'achar na dronuilleoige.



2. Ríomh, i dtéarmaí x,
(i) achar na coda dorcha den dronuilleog
(ii) achar na coda gile den dronuilleog
(iii) "cóimheas na gcodanna sin."



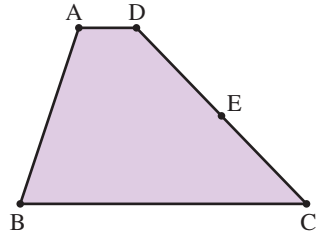
3. Má tá airde triantáin 5 cm níos lú ná fad a bhoinn, agus más ionann achar an triantáin agus 52 cm^2, faigh fad an bhoinn agus airde an triantáin.

4. Má tá taobhagán triantáin dhronuilligh cothrom le 41 cm, agus má tá suim shleasa an triantáin cothrom le 49 cm, faigh fad an dá shlios eile.

5. Tógtar fráma adhmaid dronuilleogach chun dúshraith choincréite a thógáil do phaitió.
Chun tacú leis an bhfráma fad is a dhoirtear an choincréit, socraítear cáblaí cruach go trasnánach ar an dronuilleog agus gobann siad amach thar an bhfráma 50 cm.
Más ionann imlíne an fhráma agus 14 m, agus má tá fad an fhráma aon mhéadar níos faide ná a leithead, faigh fad an chábla cruach a theastaíonn.

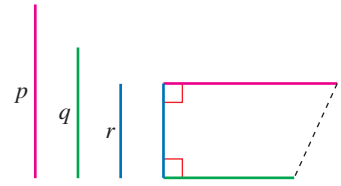
6. I dtriantán corrshleasach, is ionann méid na huillinne is lú agus dhá thrian de mhéid na huillinne láir, agus is ionann méid na huillinne láir agus trí sheachtú de mhéid na huillinne is mó.
Faigh tomhas na n-uillinneacha ar fad.

7. Is é E lárphointe [DC].
Tarraing íomhá an traipéisiam ABCD rothlaithe 180° thart ar an bpointe E.
(i) Cén cruth a dhéanann an íomhá agus an buntraipéisiam le chéile?
(ii) Céard é achar an chrutha ilchodaigh seo?
(iii) Mínigh cén chaoi a gcruthaíonn sé seo an fhoirmle d'achar traipéisiam.



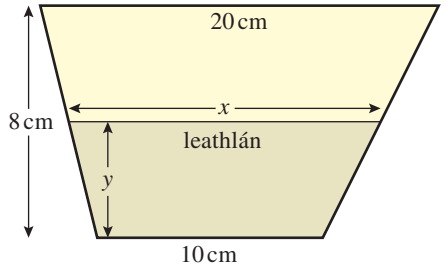
8. I gcás dronuilleog áirithe, tá trí oiread a leithid 3 cm níos faide ná dhá oiread a faid, agus tá ceithre oiread a faid 12 cm níos faide ná a himlíne.
Faigh toisí na dronuilleoige.

9. Tá trí shlat chaola ag Peadar ag a bhfuil faid p, q agus r, áit a bhfuil $|p| > |q| > |r|$.
Teastaíonn uaidh cruth traipéisiam a dhéanamh ina mbeadh dhá dhronuillinn mar a thaispeántar.
Críochnaíonn an líne bhriste an traipéisiam.
Tarraing trí bhealach ina bhféadfaí na slata a shocrú.
I bhfianaise na héagothromóide thuas, faigh amach cén socrú a chruthaíonn an t-achar is mó.
(Nóta: má tá $a > b$, tá ac > bc, toisc go bhfuil $c > 0$)



10. Taispeántar léaráid de thrasghearradh scipe bruscair. An comhlacht a chuir an scipe ar fáil, teastaíonn uathu líne a tharraingt ar thaobh an scipe le léiriú go bhfuil sé leathlán. Agus na toisí a thugtar á n-úsáid agat, faigh

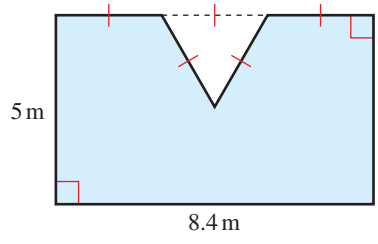
(i) fad na líne x agus
(ii) airde, y, na líne os cionn an bhoinn.



11. (i) Is ionann achar triantáin chomhshleasaigh agus 173 cm^2. Faigh fad sleasa amháin.

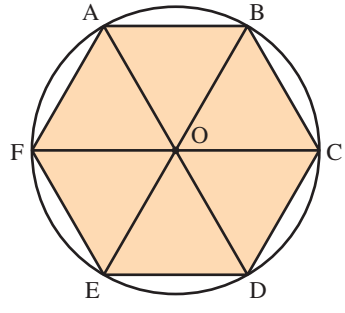
(ii) Is ionann fad sleasa amháin de thriantán comhshleasach agus 10.75 cm.
Faigh airde ingearach an triantáin agus uaidh sin faigh achar an triantáin.
Deimhnigh do fhreagra trí úsáid a bhaint as an bhfoirmle d'achar triantáin $\frac{1}{2}ab\sin C$.

12. Faigh achar na fíorach seo i méadair chearnacha, ceart go dtí trí ionad dheachúlacha.



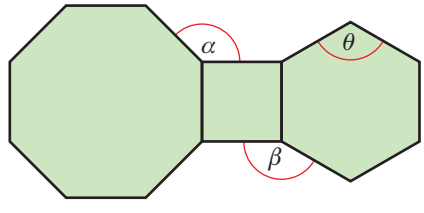
13. Tá ciorcal a bhfuil ga 5 cm aige imscríofa thart ar heicseagán rialta. Faigh

(i) méid na huillinne EOD
(ii) méid na huillinne ODE
(iii) achar an heicseagáin ABCDEFA.

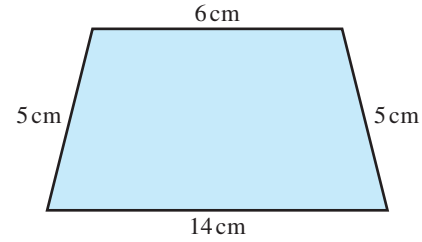


14. Taispeántar dearadh ilchodach de pholagáin.

(i) Faigh méid na n-uillinneacha α, β, θ.
(ii) Má tá slios 4 cm ar an gcearnóg, faigh achar an chrutha ilchodaigh seo ceart go dtí ionad deachúlach amháin.



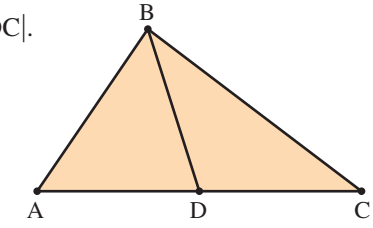
15. Agus na tomhais a thugtar á n-úsáid agat, faigh achar an traipéisiam seo.



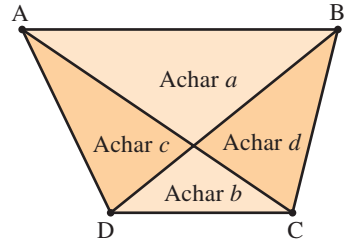
16. (i) Taispeáin go bhfuil achar $\triangle ABD : \triangle CBD = |AD| : |DC|$.

(ii) Is traipéisiam é ABCD thíos.
Cruthaigh go bhfuil Achar c = Achar d.

(iii) Uaidh sin, taispeáin go bhfuil achar an traipéisiam ABCD = Achar a + Achar b + $2\sqrt{ab}$.

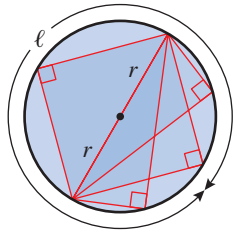


TFC: Trí leas a bhaint as bogearraí ríomh-aireachta oiriúnacha, is féidir traipéisiamaí cosúil leis sin a tharraingt le trasnáin mar a thaispeántar. Is féidir an fhoirmle achair seo a fhíorú ansin trí na bogearraí a úsáid chun na hachair ar leith a ríomh.



Mír 6.2 Teascóga ciorcal

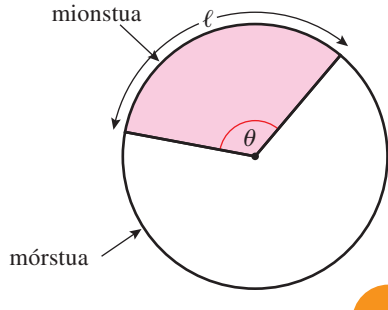
1. Súil siar ar chiorcail agus ar theascóga ciorcal

Ciorcal/ Diosca		• imlíne $= \ell$; ó tharla go bhfuil $\frac{\ell}{2r} = \pi$ $\Rightarrow \ell = 2\pi r$ • achar $= \pi r^2$ • is ionann ceathairshleasán ciorclach agus ceathairshleasán atá inscríofa i gciorcal • triantán dronuilleach é gach triantán a inscríobhtar i leathchiorcal • **360° = 2π raidian**

2. Stua ciorcail

Sa chaibidil ar an triantánacht, pléadh fad stua, achar teascóige, agus tomhas ina raidiain den chéad uair. Faightear fad stua i gciorcal trí na cóimheasa seo a úsáid:

$$\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{\theta\,(\text{céimeanna})}{360} = \frac{\theta\,(\text{raidiain})}{2\pi}$$



$$\therefore \text{ Fad stua } (\ell) = 2\pi r \frac{\theta \text{ (céimeanna)}}{360} = 2\pi r \frac{\theta \text{ (raidiain)}}{2\pi}$$

$$= r\theta \quad (\theta \text{ ina raidiain})$$

3. Achar teascóige

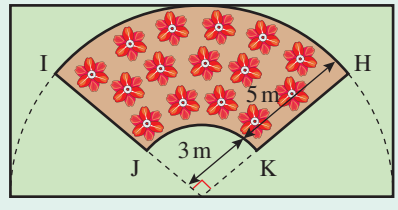
Ar an gcaoi chéanna, faightear achar teascóige i gciorcal ach na cóimheasa seo a úsáid

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta \text{ (céimeanna)}}{360} = \frac{\theta \text{ (raidiain)}}{2\pi}$$

$$\therefore \text{ Achar teascóige } (A) = \pi r^2 \frac{\theta \text{ (céimeanna)}}{360} = \pi r^2 \frac{\theta \text{ (raidiain)}}{2\pi} = \tfrac{1}{2} r^2 \theta \ (\theta \text{ ina raidiain})$$

Sampla 1

Cuirtear ceapach bláthanna, a bhfuil cruth cuid de theascóg ciorcail uirthi, i lár plásóige dronuillí, mar a thaispeántar sa léaráid.
Ríomh
(i) fad na ciumhaise a theastaíonn don cheapach bláthanna
(ii) achar an fhéir sa ghairdín.



Ceartaigh gach freagra go dtí ionad deachúlach amháin.

(i) fad an stua mhóir IH $= 2\pi r \dfrac{\theta \text{ (céimeanna)}}{360} = \left(\dfrac{90}{360} 2\pi 8\right) \text{m} = 4\pi \text{ m}$

fad an stua bhig JK $= \left(\dfrac{90}{360} 2\pi 3\right) \text{m}$

$= \dfrac{3\pi}{2} \text{ m}$

Imlíne iomlán =

$4\pi + \dfrac{3\pi}{2} + (2 \times 5) = \left(\dfrac{11\pi}{2} + 10\right) \text{m}$

$= 27.3 \text{ m}$

.... an chiumhais a theastaíonn

(ii) Achar na teascóige (an cheapach bláthanna) =
Achar na teascóige móire − Achar na teascóige bige

$$= \left(\frac{90}{360}\right) \pi 8^2 \text{ m}^2 - \left(\frac{90}{360}\right) \pi 3^2 \text{ m}^2 = \left(\frac{90}{360}\right) 55\pi \text{ m}^2 = 43.197 \text{ m}^2$$

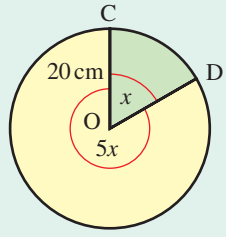
Achar na dronuilleoige $= (8 \times 16) m^2 = 128\ m^2$

$\therefore$ Achar an fhéir $= (128 - 43.197) m^2 = 84.8\ m^2$

Sampla 2

Iompraíonn mionstua CD de chiorcal, a bhfuil lárphointe O agus ga 20 cm aige, uillinn x raidian ag O. Iompraíonn an mórstua CD den chiorcal uillinn $5x$ raidian ag O.

Faigh, i dtéarmaí π, fad an mhionstua.



An mionstua CD $= r\theta = 20x$.

An mórstua CD $= r\theta = 20 \times 5x = 100x$

An mórstua $= 2 \times \pi \times r -$ an mionstua … imlíne $= 2\pi r$.

$\therefore \quad 100x = 2 \times \pi \times 20 - 20x$

$\therefore \quad 120x = 40\pi$

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow$ an mionstua CD $= 20x = \frac{20\pi}{3}$ cm.

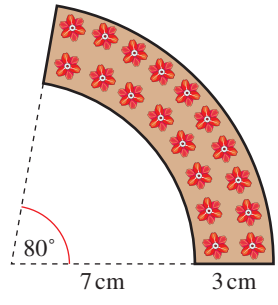
(Nóta: Is tomhas beacht é seo. Faightear neasfhreagra nuair a chuirimid luach isteach do π.)

TFC: Tá cruthanna céimseatúla in go leor de na ceisteanna thíos a d'fhéadfaí a thaispeáint go héasca le bogearraí ríomhaireachta, m.sh. GeoGebra. Is féidir na freagraí a dheimhniú mar sin, agus staidéar a dhéanamh ar fhreagraí malartacha, má tá dóthain ama ann.

Cleachtadh 6.2

1. Taispeántar léaráid de cheapach bláthanna chuar.
Is é scála na líníochta 1 cm : 1 m.
Ríomh, ceart go dtí ionad amháin deachúlach,

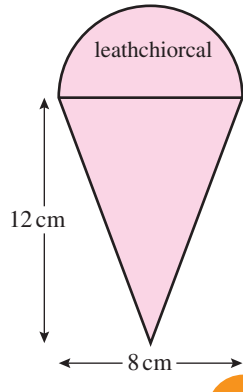
(i) imlíne na ceapaí
(ii) achar na ceapaí.



2. Faigh:

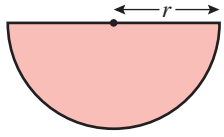
(i) an t-achar iomlán, ceart go dtí an cm^2 is gaire

(ii) an imlíne iomlán atá iniata ag an bhfíor ilchodach seo, ceart go dtí an cm is gaire.

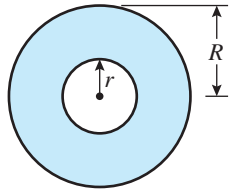


3. Scríobh foirmle do na hachair dhaite seo a leanas.

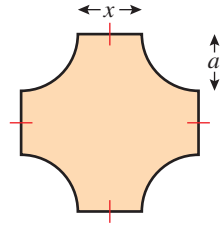
(a)



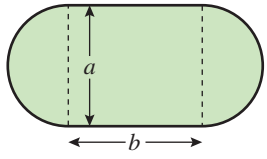
(b)



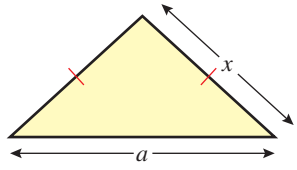
(c)



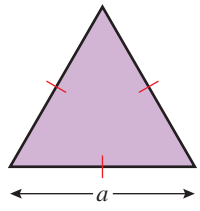
(d)



(e)



(f)

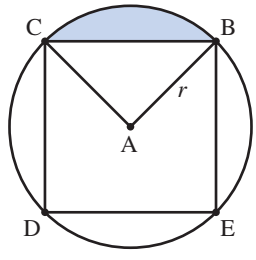


4. Scríobh foirmle do gha teascóg ciorcail i dtéarmaí imlíne P na teascóige agus na huillinne θ raidian atá á hiompar ag an lárphointe.

5. Tá na pointí R agus *S* ar imlíne ciorcail a bhfuil lárphointe O agus ga 8.5 cm aige.
Tá an pointe *T* ar an mórstua RS.
Má tá $|\angle \text{RTS}| = 0.4$ raidian, ríomh fad an mhionstua RS.

6. Inscríobhtar cearnóg i gciorcal a bhfuil ga *r* aige. Faigh

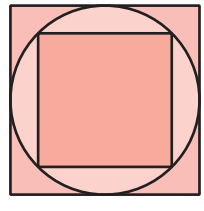
(i) achar na cearnóige BCDE
(ii) achar na coda daite i dtéarmaí *r*.



7. Tá 80 méadar d'fhálta ag feirmeoir chun bothán cearc ciorclach a thógáil.
Faigh ga agus achar an bhotháin go céim chruinnis oiriúnach.
Mínigh cén fáth nach féidir an ga a thomhas go hiomlán cruinn.

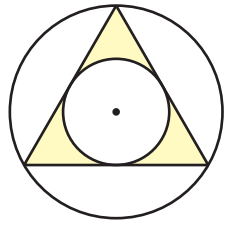
8. (i) Taispeántar ciorcal a bhfuil cearnóg inscríofa ann agus cearnóg eile imscríofa thart air.

Faigh cóimheas achar na cearnóige inmheánaí le hachar na cearnóige seachtraí.

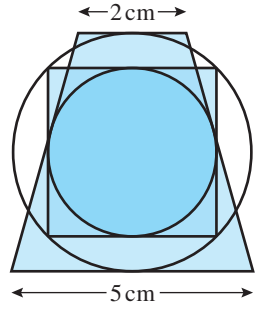


(ii) Taispeántar triantán comhshleasach a bhfuil ciorcal inscríofa ann agus ciorcal imscríofa thart air.

Ríomh cóimheas achar an imchiorcail le hachar an inchiorcail.

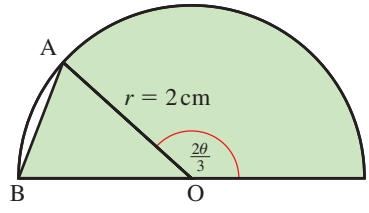


9. Inscríobhtar ciorcal a bhfuil imlíne 12 cm aige i gcearnóg. Inscríobhtar an chearnóg i gciorcal seachtrach. Tadhlaíonn an ciorcal seachtrach seo sleasa comhthreomhara traipéisiam mar a léirítear.
Faigh achar an traipéisiam, ag tabhairt do fhreagraí san fhoirm $\frac{a\sqrt{b}}{\pi}$.

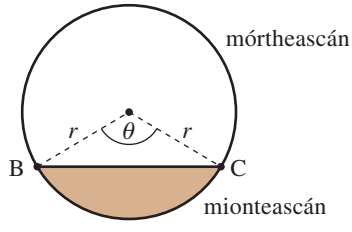


10. Tá an chuid dhaite den leathchiorcal le gearradh as leathán mór miotail.

(i) Scríobh síos i raidiain tomhas na huillinne AOB.
(ii) Faigh fad **beacht** imlíne na coda daite.
(iii) Faigh achar na coda daite agus
(iv) uaidh sin faigh achar an teascáin nach bhfuil daite.

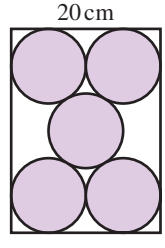


11. Díorthaigh foirmle i dtéarmaí r agus θ raidian d'achar an mhionteascáin faoin gcorda BC.
Uaidh sin, faigh cóimheas achar an mhórtheascáin le hachar an mhionteascáin á iompar ag uillinn $\frac{\pi}{2}$ raidian.



12. Suíonn cúig dhiosca go beacht i bhfráma dronuilleogach atá 20 cm ar leithead.

Faigh achar an spáis eile sa fhráma.



13. Más ionann achar teascóige i gciorcal agus 48 cm^2, agus má tá an imlíne 28 cm ar fad, faigh fad an gha.

14. Tá cró ag feirmeoir atá 4 m faoi 5 m i lár féarghoirt mhóir.
Ceanglaíonn sé gabhar de choirnéal amháin den chró seo le rópa atá 8 m ar fad, agus ligeann sé dó an féar an ithe.

(i) Tarraing léaráid a thaispeánann an limistéar ina mbíonn an gabhar ag ithe.
(ii) Léirigh ar an léaráid na teascóga difriúla de chiorcail a chuireann an limistéar sin in iúl.
(iii) Ríomh achar iomlán an limistéir seo ina n-itheann an gabhar, ceart go dtí an m^2 is gaire.

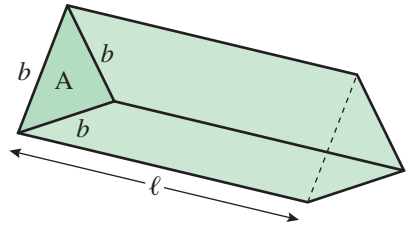
Mír 6.3 Réada tríthoiseacha

1. Priosmaí

Fíor thríthoiseach é **priosma** a bhfuil an trasghearradh céanna aige feadh a fhaid.
Taispeántar gnáthphriosma triantánach anseo.

An toirt = $(A \times \ell)$ m^3

Achar an dromchla sheachtraigh = $[2A + 3(\ell \times b)]$ m^2



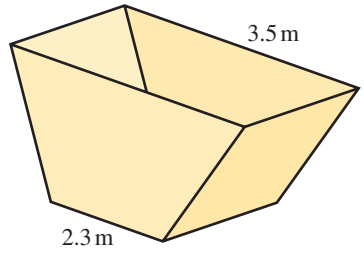
Priosma é scipe bruscair freisin nuair is traipéisiam an bonn.

Sa chás go bhfuil leithead agus airde ingearach an scipe bruscair seo 1.8 m ar fad araon,

an toirt V = $\text{Achar}_{\text{traipéisiam}} \times 1.8$ m^3

$$= \left(\frac{3.5 + 2.3}{2}\right) \times 1.8 \times 1.8 \text{ m}^3$$

$$= 9.369 \text{ m}^3 = 9.4 \text{ m}^3.$$



Is fearr achar an dromchla ar phriosma a fháil trí eangach an phriosma a leathnú amach.

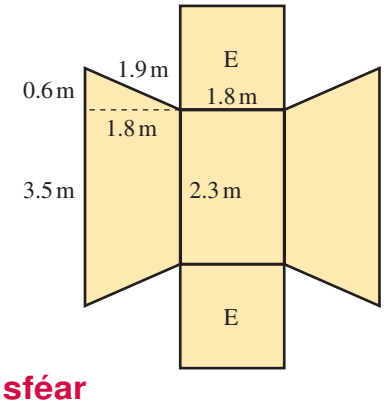
An chlaon-airde = $\sqrt{0.6^2 + 1.8^2} = 1.9$ m

Achar gach foircinn (E) = $\times$ 1.9) m^2

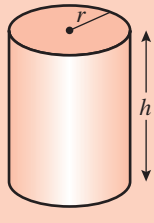
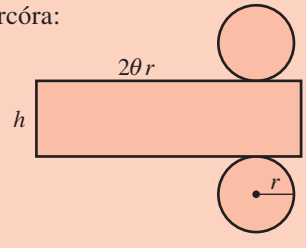
Tá achar an dromchla sheachtraigh ar an scipe bruscair seo cothrom le:

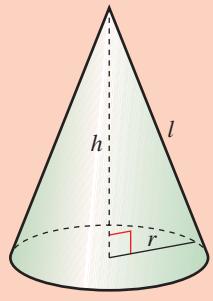
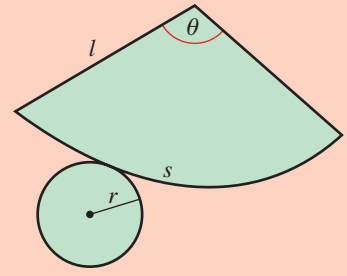
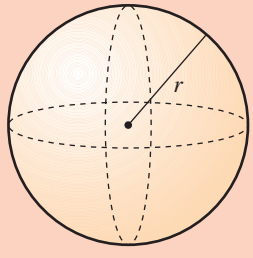
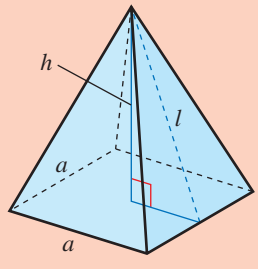
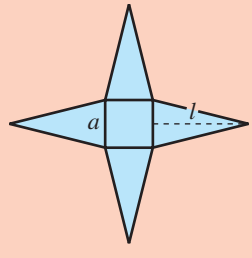
$$\text{Achar} = 2\left(\frac{3.5 + 2.3}{2}\right) \times 1.8 + 1.8 \times 2.3 + 2(1.8 \times 1.9)$$

$$= 21.42 \text{ m}^2$$



2. Súil siar: an sorcóir, an cón agus an sféar

Cruth	Léaráid	Airíonna
Sorcóir		Toirt = $\pi r^2 \times h$ Achar an Dromchla = $2 \times \pi r^2 + 2\pi r \times h$ Eangach sorcóra: 

Cón		Toirt $= \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$ Achar an Dromchla $= \pi r^2 + \pi rl$ Eangach cóin:  Nóta: (i) I n**dronchón ciorclach**, tá an bhuaic díreach os cionn lár an bhoinn. Uaidh sin, $l^2 = r^2 + h^2$. (ii) Fad stua na teascóige (s) $=$ imlíne an bhoinn ($2\pi r$).
Sféar		$\text{Toirt}_{\text{sféar}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\text{Toirt}_{\text{leathsféar}} = \frac{2}{3}\pi r^3$ Achar an dromchla ar an sféar $= 4\pi r^3$ Achar an dromchla ar an leathsféar $= 3\pi r^2$
Pirimid		Toirt $= \frac{1}{3}a^2 \times h$ Achar an Dromchla $= a^2 + 4(\frac{1}{2}al) = a^2 + 2al$ $l^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$ Eangach pirimide: 

Nóta: Is féidir le priosma agus pirimid go leor bonn a bheith acu a bhfuil cruthanna difriúla orthu (boinn pholagánacha).

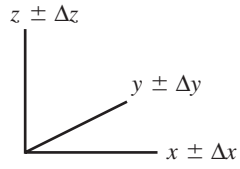
De ghnáth, (i) toirt **priosma** $=$ (achar an bhoinn) $\times h$

(ii) toirt **pirimide** $= \frac{1}{3}$(achar an bhoinn) $\times h$

3. Céimeanna cruinnis

Nuair a thógtar tomhas go céim áirithe chruinnis, cruthaítear *earráid* ar an tomhas.
Más é x an tomhas, d'fhéadfadh an fíorthomhas a bheith sa réimse $\boldsymbol{x \pm \Delta x}$.

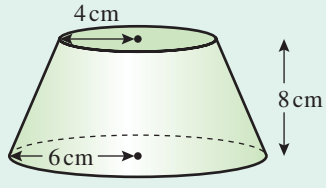
M.sh. Más 10.3 cm atá i bhfad éigin, ceartaithe go dtí ionad amháin tugann sé seo le fios go bhfuil íosfhad féideartha de 10.25 cm agus uasfhad féideartha de 10.34 cm i gceist.



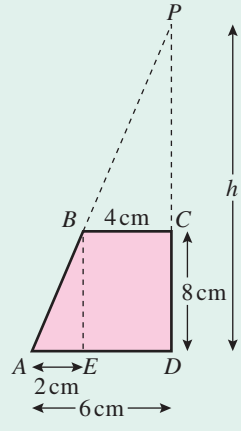
Más achar nó toirt atá sa tomhas, beidh raon den sórt céanna ag gach toise.

Sampla 1

Faigh toirt an chóin bharrscoite seo (frustam) ceart go dtí ionad amháin deachúlach.



Ach trasghearradh a tharraingt trí lár an chóin bharrscoite agus ansin an cón is lú ar an mbarr a dhealú ón gcón is mó, feicimid gurb ionann an fuílleach agus toirt an fhrustaim.



Ó thriantáin chomhchosúla, tá sé seo a leanas againn:

$$\frac{h-8}{4} = \frac{h}{6} \Rightarrow 6h - 48 = 4\text{h}$$

$$2h = 48$$

$$h = 24.$$

Toirt an chóin is mó $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 24 = 288\pi$

Airde an chóin is lú $|\text{PC}| = h - 8 = 16$ cm

$\therefore$ Toirt an chóin is lú $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 16 = \frac{256}{3}\pi$

$\therefore$ Toirt an fhrustaim $= 288\,\pi - \frac{256}{3}\pi = \frac{608}{3}\pi = 636.7\,\text{cm}^3$

Sampla 2

Déanann comhlacht gráin iompair (sféir) do mheaisín. 12 mm an trastomhas atá ag na gráin iompair.
Maíonn siad go dtáirgtear iad le cruinneas ± 0.02 mm.
Faigh toirt an ghráin iompair is mó agus toirt an ghráin iompair is lú a tháirgtear.
Faigh an earráid chéatadánach ar (i) an trastomhas (ii) an toirt.

Trastomhas $= 12$ mm $\Rightarrow$ Trastomhas$_{\text{uas}} = 12.02$ mm, Trastomhas$_{\text{íos}} = 11.98$ mm

Toirt $= \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$ Uastoirt $= \frac{4}{3}\pi(6.01)^3 = 909.310\,\text{mm}^3$

$\Rightarrow$ Íostoirt $= \frac{4}{3}\pi(5.99)^3 = 900.262\,\text{mm}^3$

(i) earráid % ar an trastomhas $= 0.\frac{02}{12} \times 100\% = \pm 0.167\%$

(ii) Toirt $= \frac{4}{3}\pi(6)^3 = 904.779\,\text{mm}^3$

$\Rightarrow$ earráid % ar an toirt $= \dfrac{909.310 - 904.779}{904.779} \times 100\% = \pm 0.5\%$

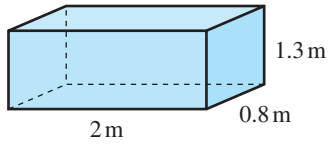
Cleachtadh 6.3

1. Imscrúdaigh gach ceann de na cruthanna seo a leanas go cúramach agus

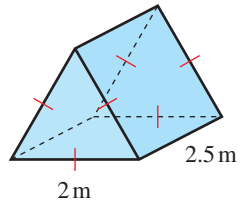
(i) trí eangach oiriúnach a tharraingt do gach ceann acu, ríomh an t-achar iomlán ceart go dtí ionad amháin deachúlach

(ii) faigh toirt gach crutha ceart go dtí ionad amháin deachúlach.

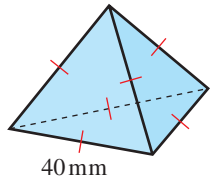
(a)



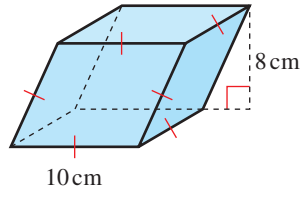
(b)



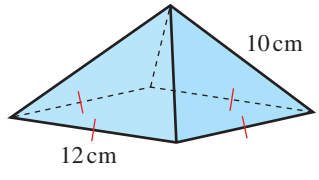
(c)



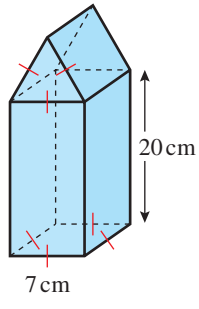
(d)



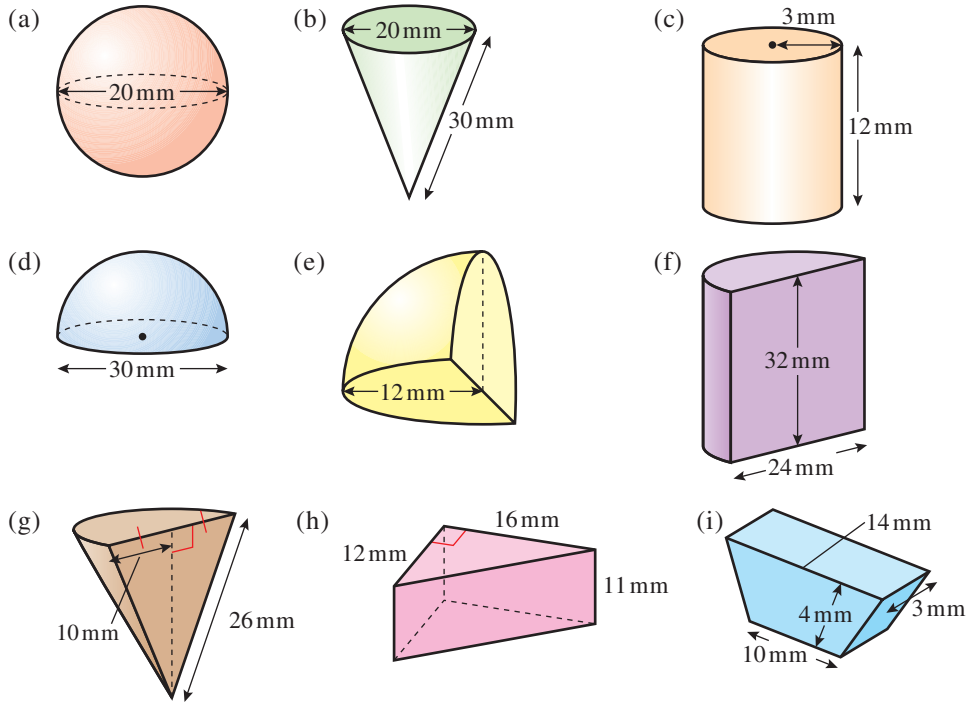
(e)



(f)



2. I rang adhmadóireachta, iarradh ar na scoláirí na réada tríthoiseacha seo a leanas a chur in ord ón gceann is mó go dtí an ceann is lú, de réir (1) a dtoirte (ii) achar **iomlán** an dromchla, agus gach freagra ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.
Déan dhá liosta ar leith do (i) na hachair (ii) na toirteanna, agus iad in ord íslitheach.

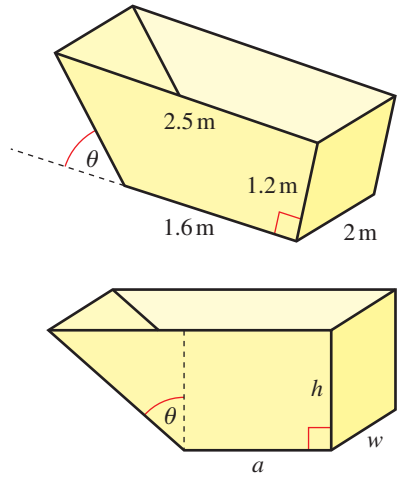


3. Úsáideann comhlacht athchúrsála an scipe bruscair seo.

(i) Faigh toirt an scipe bruscair, ceart go dtí dhá ionad dheachúlacha.

(ii) Cuireann an comhlacht 'bailiúchán toirte' ar fáil ag €80 in aghaidh an m^3 nó 'bailiúchán meáchain' ag €30 in aghaidh 100 kg, ag glacadh leis go meánn scipe bruscair lán 1.3 tona. Cén rogha a thugann an "luach ar airgead" is fearr don chustaiméir?

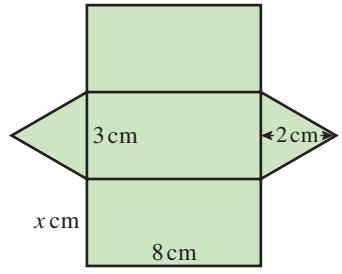
(iii) Scríobh cothromóid do thoirt an scipe bruscair i dtéarmaí a, h, w agus θ.



(iv) Teastaíonn ón gcomhlacht athchúrsála an scipe bruscair a athdhearadh agus uillinn nua $\theta = 45^\circ$ aige. Más gá go mbeadh an leithead, airde agus toirt iomlán fós mar an gcéanna le go rachaidh sé ar an trucail, faigh, ceart go dtí ionad amháin deachúlach, toisí nua bhun agus bharr an scipe bruscair.

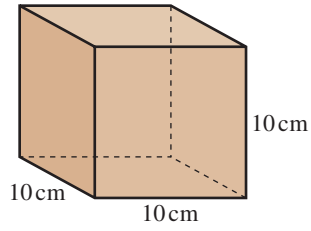
4. Taispeántar eangach fíorach 3T sa léaráid.
Tá an dá thriantán comhchosach agus iomchuí.

(i) Ríomh fad an tsleasa atá x cm ar fad.
(ii) Tarraing sceitse den fhíor 3T agus ainmnigh é.
(iii) Ríomh a toirt.
(iv) Dear priosma traipéasóideach a bhfuil an toirt chéanna aige.



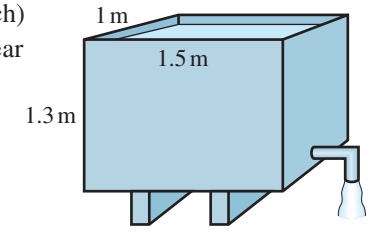
5. (i) Iarrtar ar scoláire i rang adhmadóireachta an sféar is mó is féidir a dhéanamh den chiúb thall.
Cén toirt den adhmad a chaithfear a smiotadh den chiúb?

(ii) Iarrtar ar an scoláire ansin toirt an sféir is lú a d'fhéadfadh an ciúb a chlúdach ina iomlán a ríomh.



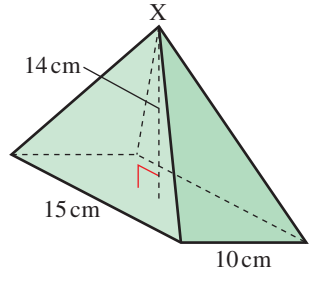
6. Tá umar uisce, a bhfuil cruth ciúbóidigh (solad dronuilleogach) air, lán d'uisce. Draenáiltear uisce ón umar ag an ráta 8 lítear in aghaidh an nóiméid.
Tugtar toisí an umair go dtí na 10 cm is gaire.
Tugtar an ráta ag a ndraenáiltear an t-uisce ón umar go dtí an 0.5 lítear in aghaidh an nóiméid is gaire.
Ríomh, ceart go dtí an nóiméad is gaire,

(i) an méid is lú ama a thógfadh sé an t-umar a dhraenáil
(ii) an méid is mó ama a thógfadh sé an t-umar a dhraenáil.

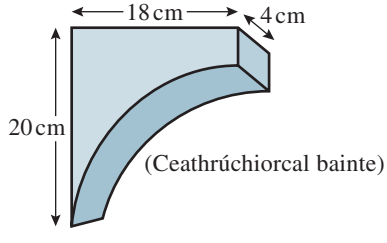


7. Tá bonn dronuilleogach ag an bpirimid thall.
Tá an pointe X díreach os cionn lárphointe an bhoinn.

(i) Faigh toirt na pirimide.
(ii) Tarraing dhá eangach fhéideartha don phirimid agus uaidh sin (ag úsáid ceann acu) faigh achar iomlán an dromchla sheachtraigh ar an bpirimid.



8. Tá taca cruach le déanamh as bloc dronuilleogach miotail atá 4 cm tiubh, mar a thaispeántar.
Má bhaintear ceathrúchiorcal, ríomh achar iomlán an dromchla ar an taca agus toirt iomlán an taca.



9. Má sheasann x, y agus z d'fhaid, agus más uimhreacha gan toisí iad π agus a, abair an seasann na foirmlí seo a leanas do

(i) fad (ii) achar (iii) toirt.

(a) $\pi x^2 + \pi y^2 + \pi z^2$ (b) $ax + \pi y$ (c) axz (d) $a\pi y$

(e) $axy + \pi az$ (f) $ax + xy$ (g) $axyz$ (h) $x^2y + y^2z + z^2x$

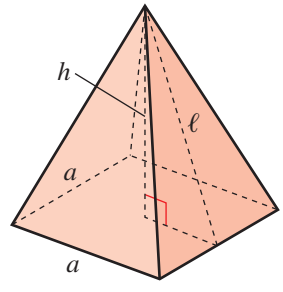
10. Má sheasann A d'achar, V do thoirt, agus más faid iad x, y, z, cé acu de na foirmlí seo atá comhsheasmhach agus cé acu atá ar neamhréir, i dtéarmaí toisí? Mínigh do fhreagraí.

(i) $Ax = z^3$ (ii) $x = \dfrac{V}{Ay}$ (iii) $V = xy + z$ (iv) $A = x^2 + y^2 + z^2$

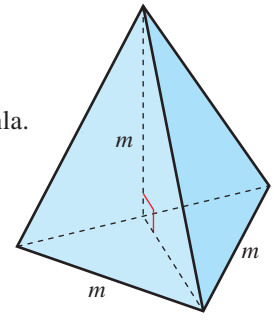
(v) $V = A(x + y + z)$ (vi) $A = \dfrac{V}{x} + y$ (vii) $x = y + z$

11. Is é an fhoirmle do thoirt pirimide

$V = \frac{1}{3}$(achar an bhoinn) $\times$ airde ingearach.



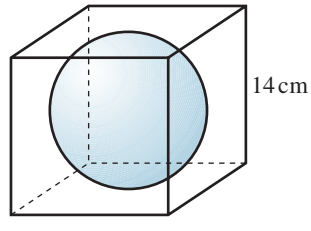
(i) Don phirimid thall a bhfuil bonn cearnógach aici, faigh an toirt i dtéarmaí a agus h.
Faigh toirt na pirimide má tá an bonn 6 cm ar fad agus má tá sí 7 cm ar airde.



(ii) Pirimid eile a bhfuil bonn cearnógach aici, tá a bonn 5 cm ar fad agus tá toirt 100 cm^3 ag an bpirimid.
Faigh a hairde ingearach. Uaidh sin, agus trína heangach a tharraingt, faigh achar iomlán an dromchla.

(iii) Gearradh an phirimid thall ó phirimid a bhfuil bonn cearnógach aici. Faigh a toirt i dtéarmaí m.
Déan cur síos ar an bpirimid seo. Tarraing a heangach agus achar iomlán a dromchla i dtéarmaí m.

12. (i) Suíonn sféar soladach go beacht i mbosca ciúbach, mar a thaispeántar. Má tá ciumhais an bhosca 14 cm ar fad, agus má tá $\pi = \frac{22}{7}$, faigh

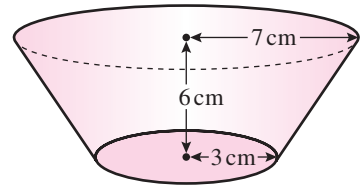


(a) toirt an bhosca in cm^3
(b) toirt an sféir in cm^3
(c) céatadán an spáis nach bhfuil an sféar ann.

Bíodh do fhreagra ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.

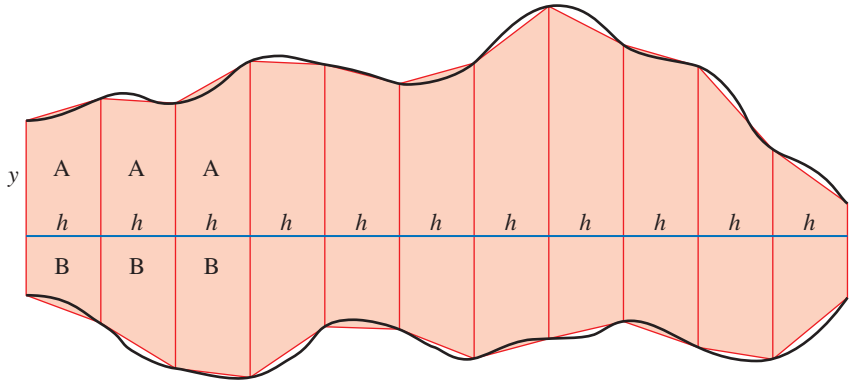
(ii) Suíonn an sféar soladach céanna i sorcóir go beacht.
Cinn an bhfuil céatadán an spáis nach bhfuil an sféar ann sa sorcóir níos mó nó níos lú ná an spás nach bhfuil an sféar ann sa bhosca ciúbach.

13. Faigh, ceart go dtí ionad amháin deachúlach, toirt an stopalláin rubair seo.



Mír 6.4 Riail thraipéasóideach chun achar a ríomh

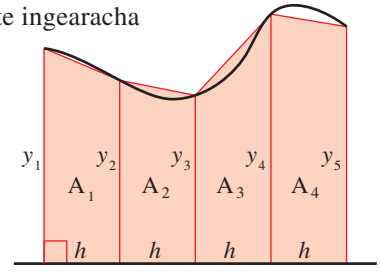
Chun achar cruthanna a bhfuil teorainneacha neamhrialta acu a ríomh, m.sh. páirceanna, locha, srl., de ghnáth roinneann suirbhéirí an t-achar i sraith stiallacha comhthreomhara, i gcruth traipéisiam de ghnáth; ceathairshleasán a bhfuil péire de na ceithre shlios comhthreomhar le chéile.



Tarraingítear líne dhíreach trí lár an achair, á roinnt i sraith de dhá achar dhifriúla, A agus B.

Is féidir achar gach limistéir, os cionn na líne agus fúithi, a ríomh ar leithligh trí leas a bhaint as an bhfoirmle d'achar traipéisiam agus na torthaí a shuimiú le chéile.

Feadh na líne agus ag eatraimh chothroma de h, tarraingítear línte ingearacha go dtí an teorainn. Is iad na hordanáidí (taobhingir) seo – y_1, y_2, y_3, srl. – sleasa comhthreomhara an traipéisiam.



Trí leas a bhaint as an bhfoirmle achair do thraipéisiam, $\frac{a+b}{2} \times h$, faighimid $A_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \times h$.

Ar an gcaoi chéanna, $A_2 = \frac{y_2 + y_3}{2} \times h$, agus mar sin de.

Dá bhrí sin, tá achar iomlán $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

$$= \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \times h\right) + \left(\frac{y_2 + y_3}{2} \times h\right) + \left(\frac{y_3 + y_4}{2} \times h\right) + \left(\frac{y_4 + y_5}{2} \times h\right)$$

$$= \frac{h}{2}(y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + y_3 + y_4 + y_4 + y_5)$$

$$= \frac{h}{2}[y_1 + 2(y_2 + y_3 + y_4) + y_5]$$

I bhfocail, Achar $\approx \dfrac{\text{leithead eatraimh}}{2}$ [an chéad airde + an airde dheiridh + 2(na hairdí atá fanta)]

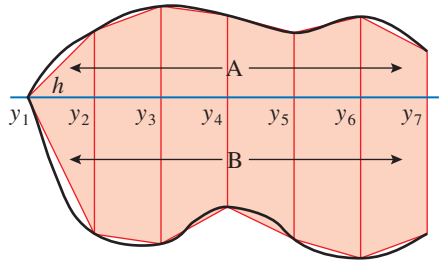
Nuair a dhéantar n stiall, athraíonn an fhoirmle thraipéasóideach go dtí

$$\text{Achar} \approx \frac{h}{2}\left[y_1 + y_n + 2(y_2 + y_3 + y_4 + \ldots . y_{n-1})\right]$$

Nóta 1: Mar nach bhfuil barr gach traipéisiam cothrom leis an teorainn ag gach pointe, níl san achar a fhaightear leis an bhfoirmle seo ach neas-achar.
Braitheann a chruinneas ar leithead na bearna h; dá laghad é leithead na bearna, is é is fearr é an cruinneas.

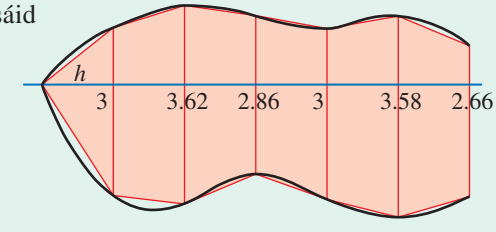
Nóta 2: Má thomhaistear na taobhingir ó na pointí céanna taobh thuas agus taobh thíos den líne, is féidir an t-achar (A + B) a fháil leis an bhfoirmle thíos

$$\text{Achar} \approx \frac{h}{2}\left[y_1 + y_7 + 2(y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)\right]$$



Sampla 1

Agus na tomhais a chuirtear ar fáil á n-úsáid agat, faigh achar an chrutha seo má tá $h = 1$ aonad.



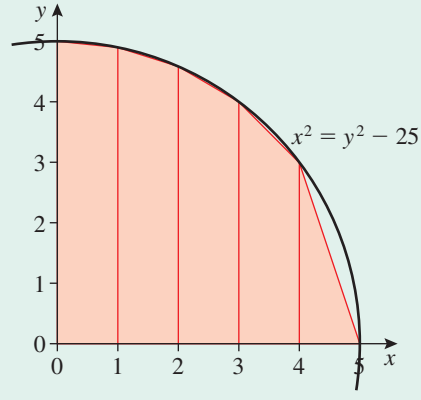
$y_1 = 0,\ y_2 = 3,\ y_3 = 3.62,\ y_4 = 2.86,$
$y_5 = 3,\ y_6 = 3.58,\ y_7 = 2.66.$

$$\text{Achar} \approx \frac{h}{2}\left[y_1 + y_7 + 2(y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[0 + 2.66 + 2(3 + 3.62 + 2.86 + 3 + 3.58)\right] = 17.390 \text{ aonad cearnach}$$

Sampla 2

Tá an chothromóid $x^2 + y^2 = 25$ ag an gciorcal a thaispeántar.



(i) Faigh y i dtéarmaí x.

(ii) Uaidh sin críochnaigh an tábla seo.

x	0	1	2	3	4	5
y						

(iii) Úsáid an tábla chun achar an cheathrúchiorcail a mheas. Bíodh eatraimh $h = 1$ aonad agat.

(iv) Críochnaigh an tábla thíos.
Bíodh eatraimh $h = 0.5$ aonad agat.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y											

(v) Cuir an dá fhreagra i gcomparáid leis an bhfreagra a fuair tú ón bhfoirmle d'achar diosca (ceart go dtí trí ionad dheachúlacha). Cén tátal is féidir a bhaint as seo?

(i) $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2$

$\Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

(ii)

x	0	1	2	3	4	5
y	5	$\sqrt{24}$	$\sqrt{21}$	4	3	0

(iii) $\therefore$ Achar $\approx \frac{1}{2}\left[5 + 0 + 2(\sqrt{24} + \sqrt{21} + 4 + 3)\right] = 18.982$ aonad cearnach

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	5	4.975	4.899	4.77	4.583	4.33	4	3.571	3	2.179	0

(iv) $\therefore$ Achar $\approx \frac{0.5}{2}\left[5 + 0 + 2(4.975 + 4.899 + 4.77 + 4.584 + 4.33 + 4 + 3.571 + 3 + 2.179)\right] = 19.404$ aonad cearnach

Achar $\frac{1}{4}$ diosca $= \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi 5^2 = 19.635$ aonad cearnach

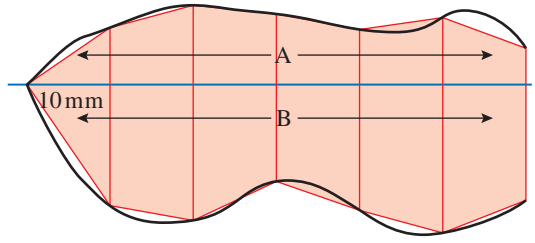
(v) De réir mar a théann h i laghad, bíonn an neasfhreagra níos gaire do fhreagra fhoirmle an diosca. Feicimid freisin go bhfuil an dá neasfhreagra níos lú ná an fíorfhreagra, mar a bheifí ag súil leis ó chruth an ghraif.

Nóta: Má tá 5 stiall ann, beidh 6 ordanáid ann.
Má tá 10 stiall ann, beidh 11 ordanáid ann.
Má tá n stiall ann, beidh $n + 1$ ordanáid ann.

Cleachtadh 6.4

1. Is mian le feirmeoir achar ceann dá pháirceanna a bhfuil an cruth thall uirthi a ríomh. Úsáideann sé léarscáil a bhfuil scála 1000:1 aici. Roinneann sé léarscáil na páirce ina dhá leath, ag úsáid líne chothrománach, agus tarraingíonn sé taobhingir ingearacha ag eatraimh 10 mm. Trí fhad na dtaobhingear a thomhas, úsáid an riail thraipéasóideach chun achar A + B a mheas. Bíodh do fhreagra i heicteáir, ceart go dtí 2 ionad dheachúlacha.

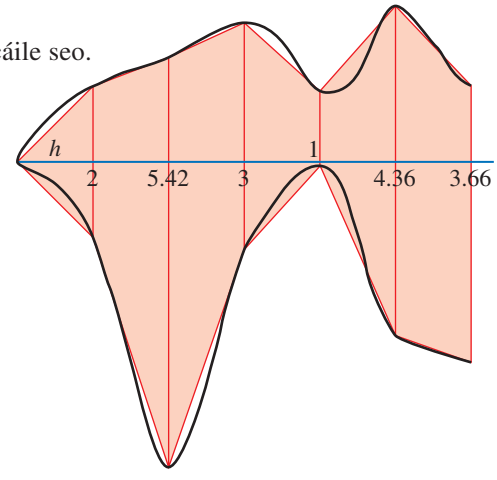
(Nóta: Heicteár amháin = 10 000 m^2)



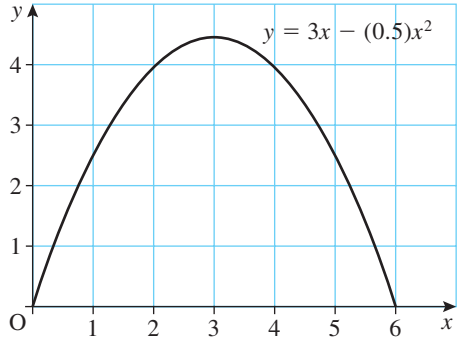
2. Má tá $h = 1$ cm agus má tá faid na dtaobhingear mar atá thall, faigh achar na léarscáile seo.

(i) Más é 17.23 cm^2 achar na léarscáile, faigh an earráid chéatadánach a bhaineann leis an riail thraipéasóideach agus $h = 1$ cm a úsáid.

(ii) Trí thoisí nua a thógáil le $h = \frac{1}{2}$ cm, faigh an dara meastachán ar an achar.

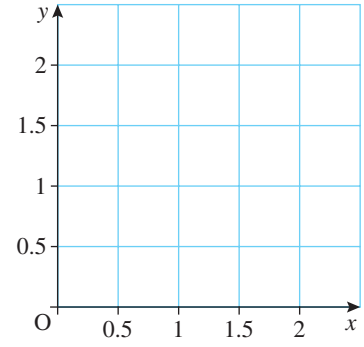


3. Trí úsáid a bhaint as an riail thraipéasóideach, agus as luach eatraimh de (i) $h = 1$ cm agus (ii) $h = 0.5$ cm, meas an t-achar faoin gcuar $y = 3x - (0.5)x^2$.

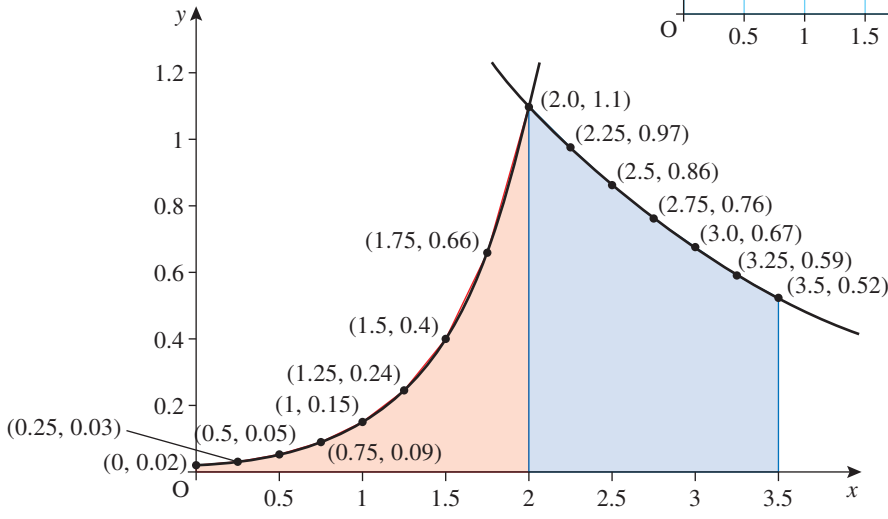


4. Cóipeáil na haiseanna seo agus úsáid iad chun an fheidhm $y = \sqrt{x}$ a bhreacadh i gcás $0 \leq x \leq 2$.

Úsáid ceithre thraipéasóideach chun an t-achar faoin gcuar a mheas i gcás $0 \leq x \leq 2$.



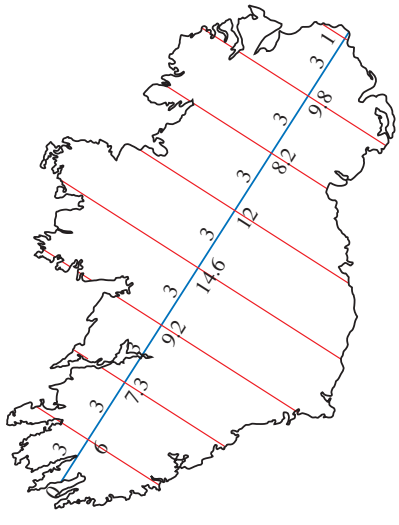
5.



(i) Agus leithead eatraimh 0.25 á úsáid agat, faigh cóimheas na limistéar daite faoin gcuar.

(ii) Meas, trí thriail is earráid, an t-uasluach ar x ionas go mbeidh an dá achar cothrom.

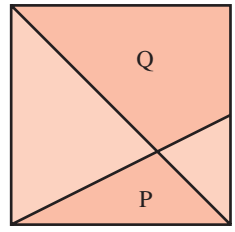
6. Tugtar imlíne de léarscáil na hÉireann. Má úsáidtear scála 1 cm = 20 km, úsáid an riail thraipéasóideach chun achar oileán na hÉireann a meas. Tógtar taobhingir gach 3 cm.



Súil Siar (Croícheisteanna)

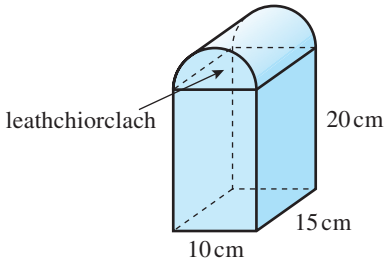
1. Taispeántar sa léaráid cearnóg, trasnán agus líne a cheanglaíonn rinn le lárphointe sleasa.
Céard é cóimheas achar P le hachar Q?

(TFC: Seiceáil do fhreagra tríd an bhfíor seo a tharraingt le clár ríomhghrafaice, m.sh. GeoGebra)

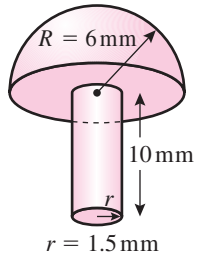


2. Faigh achar iomlán an dromchla agus an toirt i gcás gach ceann de na fíoracha ilchodacha seo a leanas. Bíodh do fhreagra ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.

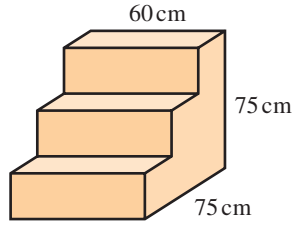
(a)



(b)



(c)

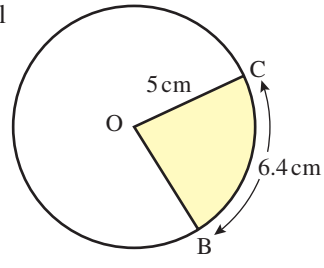


3. Tá lárphointe O agus mionstua [CB] atá 6.4 cm ar fad ag ciorcal a bhfuil ga 5 cm aige, mar a léirítear.

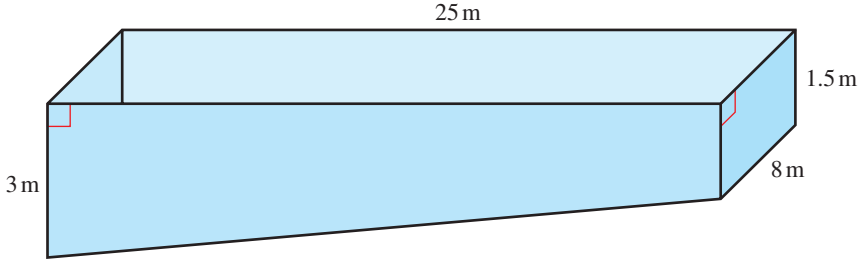
(i) Ríomh, i raidiain, méid na géaruillinne COB.
angle COB.

(ii) Ríomh achar na mionteascóige COB.

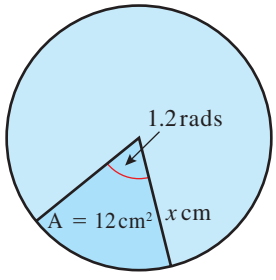
(iii) Ríomh an cóimheas
mionteascóg : mórtheascóg san fhoirm 1 : p.
Tabhair p ceart go dtí 3 fhigiúr bhunúsacha.

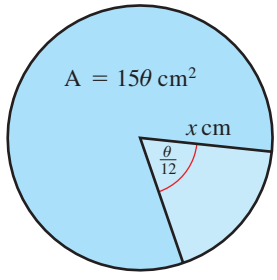


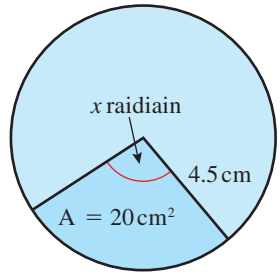
4. Cinn toilleadh linn snámha a bhfuil na toisí seo aici.
Má tá an príomhlíonra uisce in ann uisce a sholáthar ag ráta 10 lítear in aghaidh an nóiméid, cá fhad a thógfaidh sé an linn a líonadh?



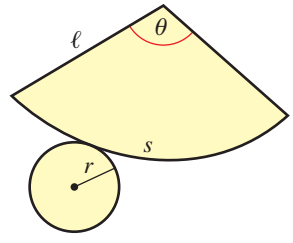
5. Faigh luach x i ngach ceann de na ciorcail seo a leanas.







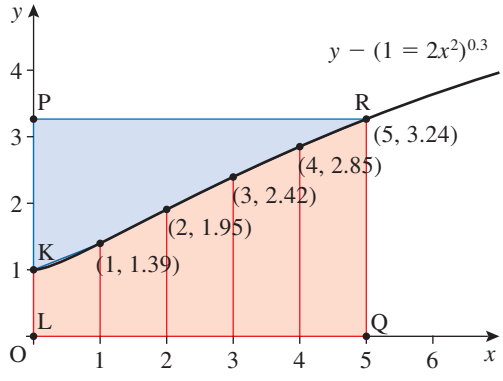
6. Taispeántar eangach cóin sa léaráid. Úsáid an léaráid seo chun a thaispeáint gur féidir achar cuar an dromchla ar an gcón a scríobh mar $A = \pi r\ell$, nuair is ionann r agus ga an bhoinn chiorclaigh agus nuair is é ℓ claon-airde an chóin. (Nóta: is é s fad an mhionstua.)



7. Taispeántar graf na feidhme $y = (1 + 2x^2)^{0.3}$.

(i) Úsáid an dronuilleog OPRQ agus an triantán KPR chun an t-achar faoin ngraf a mheas i gcás $0 < x < 5$.

(ii) Úsáid an riail thraipéasóideach, agus na taobhingir mar a léirítear, chun an dara meastachán a fháil don achar.

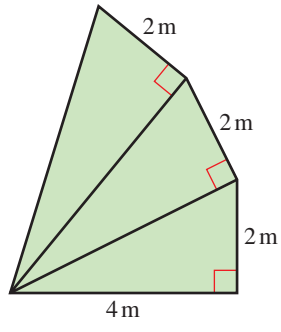


8. Faigh

(i) imlíne agus

(ii) achar na fíorach ilchodaí seo.

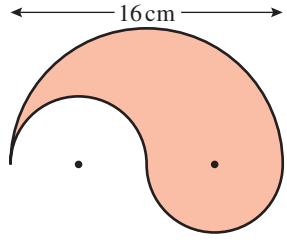
Fág do fhreagraí i bhfoirm surda.



9. Déantar suaitheantas as sraith ciorcal atá nasctha le chéile mar a thaispeántar anseo. Faigh

(i) fad na himlíne

(ii) achar na fíorach ilchodaí.



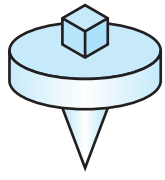
10. Tugtar an costas a bhaineann le cruinneachán gloine leathsféarúil a dhéanamh mar

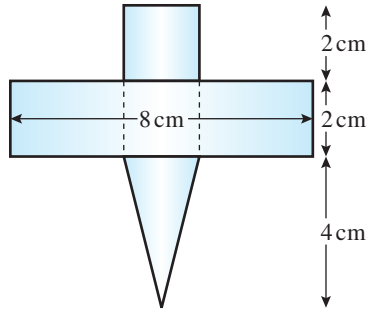
Costas = €(5200 + 35A), nuair is ionann A agus achar an dromchla i méadair chearnacha.

Faigh an costas a bheadh ar leathsféar a bhfuil ga 10 m aige a dhéanamh.

11. Déantar caiseal as ciúb, sorcóir 2 cm agus cón mar a thaispeántar sa léaráid seo.
Tugtar líníocht trasghearrtha agus na toisí.

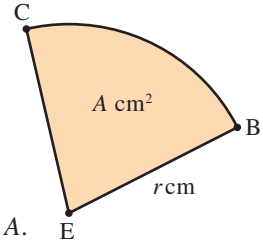
Faigh toirt an chaisil,
ceart go dtí ionad amháin deachúlach.





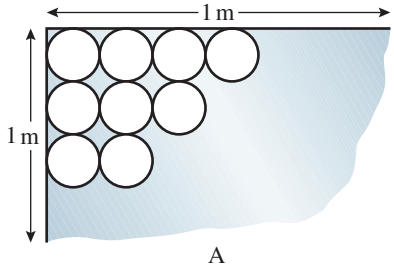
Súil Siar (Ardcheisteanna)

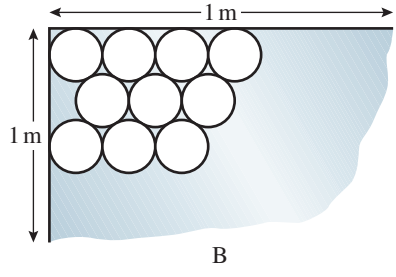
1. Taispeántar an mhionteascóg BCE den chiorcal C, a bhfuil lárphointe E agus ga r cm aige, san fhíor seo.
Is é 100 cm imlíne na teascóige agus is é A cm^2 achar na teascóige.



(i) Taispeáin go bhfuil A = (50r − r^2) cm^2.
(ii) Má deirtear leat gur féidir le r athrú,
faigh (tríd an gcearnóg a shlánú) an luach ar r
a fhágann go bhfuil A ina uasachar agus taispeáin gur uasachar é A.
(iii) Faigh luach ∠CEB don uasachar seo.
(iv) Faigh uasachar na teascóige.

2.



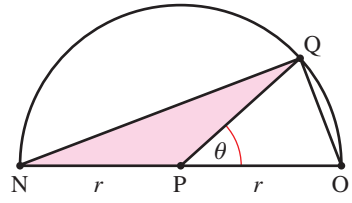


Tá poill chiorclacha, a bhfuil ga 1 cm acu, le gearradh as leathán miotail.
Tá an leathán miotail 1 m × 1 m.
D'fhéadfaí dhá mhodh, A nó B, a úsáid, mar a thaispeántar thuas.

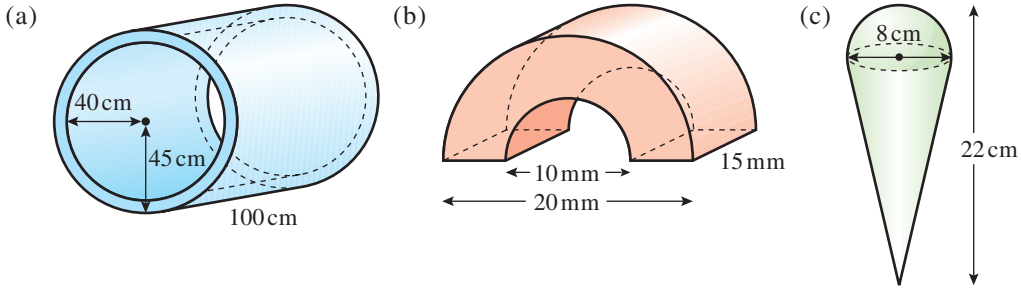
(i) I gcás an dá mhodh, ríomh an líon poll is féidir a ghearradh.
(ii) Ríomh an céatadán fuíollábhair as gach leathán miotail.

3. Sa léaráid seo, tá achar an triantáin dhaite PNQ trí oiread chomh mór le hachar an teascáin a chruthaíonn an corda [OQ].
Faigh, i dtéarmaí r agus θ,
(i) achar $\triangle$PQO
(ii) achar an teascáin a dhéanann [OQ]
(iii) achar $\triangle$PQN.

Uaidh sin taispeáin go bhfuil $3\theta - 4\sin\theta = 0$.



4. Faigh achar iomlán an dromchla agus toirt an mhiotail i gcás gach ceann de na réada seo a leanas, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.

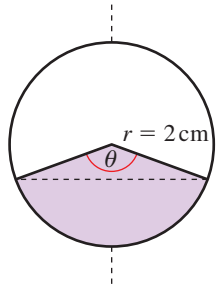


5. Taispeántar imlíne dearaidh do shiogairlín gaoithe.
Tá sreang chiorclach thart ar theascóg ciorcail.

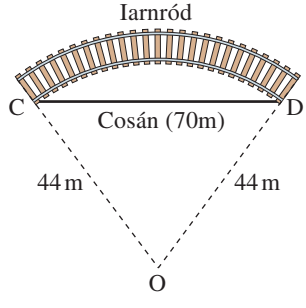
Más ionann uillinn na mionteascóige agus $\frac{2\pi}{3}$ raidian,

faigh (i) achar na mionteascóige
(ii) achar an mhionteascáin.

Má tá $\theta = 1.895$ raidian, taispeáin go ndéroinneann an líne chothrománach bhriste achar na teascóige.



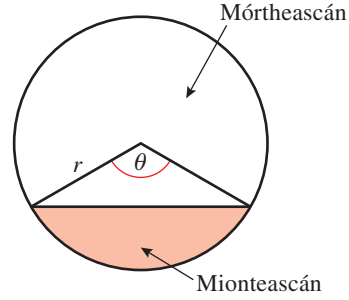
6. Nascann cosán díreach dhá phointe C agus D ar chuid chuar d'iarnród.
Is é 44 m ga an iarnróid chiorclaigh.
(i) Taispeáin go bhfuil an uillinn COD cothrom le 1.84 raidian.
(ii) Ríomh fad an iarnróid a thaispeántar.
(iii) Ríomh an fad is gaire ó O go dtí an cosán.
(iv) Ríomh achar an limistéir a bhfuil an cosán agus an t-iarnród ina dteorainneacha aige.



7. Taispeáin gurb ionann achar an mhionteascáin agus $\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$.

(i) Má tá achar an mhórtheascáin cothrom le 23.32 cm^2 nuair atá $\theta = 2$ raidian, is 23.32 faigh r, ceart go dtí ionad amháin deachúlach.

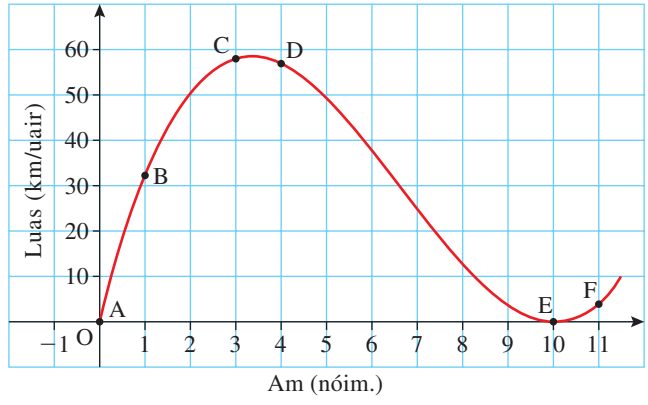
(ii) Má léiríonn an léaráid seo trasghearradh babhla ina bhfuil uisce, faigh achar dromchla an uisce.



8. Léirítear gluaiseacht veain le graf luais/ama mar a thaispeántar.

(i) Déan trácht ar na difríochtaí i ngluaiseacht na veain idir phointí A go B, C go D agus E go F.

(ii) Cén chainníocht a fhaightear nuair a iolraítear an luas faoin am?

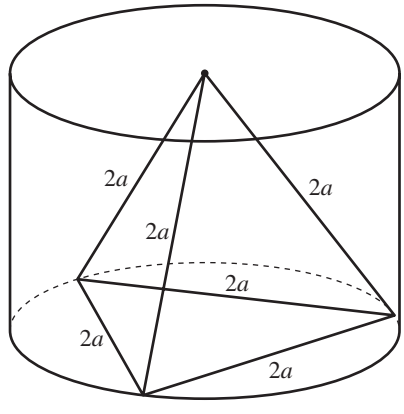


(iii) Úsáid an riail thraipéasóideach agus léamha ón ngraf chun an fad iomlán a thaistil an veain in 10 nóiméad a mheas.

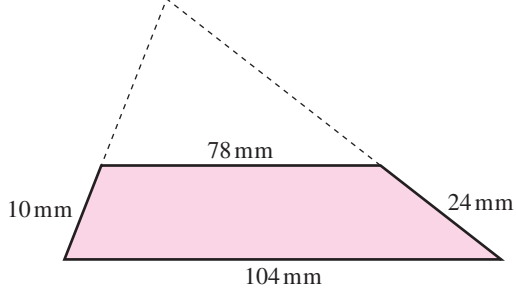
9. Tá ceithre éadan ar theitrihéadrán rialta agus is triantán comhshleasach é gach ceann díobh.

Cuirtear teitrihéadrán rialta mar seo i sorcóir agus éadan amháin cothrom ar an mbun. Má tá imeall amháin ar an teitrihéadrán $2a$ ar fad, taispeáin gurb é $\frac{8\sqrt{6}}{9}\pi a^3$ an toirt atá sa choimeádán sorcóireach is lú is féidir é a chur isteach ann.

(In oiriúint as Páipéar Samplach 2011, Páipéar 2 ó Choimisiún na Scrúduithe Stáit.)

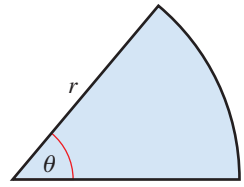


10. Faigh achar an traipéisiam dhaite.
Nóta: níl na sleasa de réir scála.



Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. Lúbtar sreang atá 4 m ar fad i gcruth teascóg ciorcail a bhfuil ga r méadar agus uillinn θ raidian aici.



(i) Luaigh, i dtéarmaí θ agus r,
 (a) fad an stua
 (b) achar A na teascóige.

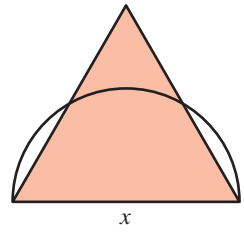
(ii) Uaidh sin taispeáin go bhfuil $A = 2r - r^2$.

(iii) Tríd an gcearnóg a shlánú, athscríobh an chothromóid seo san fhoirm $A = q - (r - p)^2$.

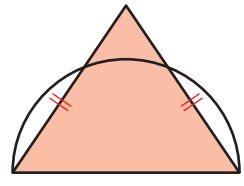
(iv) Tarraing graf de A in aghaidh r, $0 \leq r \leq 5$.
Scríobh síos an t-uasphointe ar an ngraf agus uaidh sin faigh an t-uasluach ar r a chruthóidh uasachar.

(v) Oibrigh amach luach comhfhreagrach θ.

2. (i) Iarradh ar ghrúpaí scoláirí achar triantáin chomhshleasaigh a chur i gcomparáid le hachar leathchiorcail, nuair a bhí bonn an triantáin chomhshleasaigh ar comhfhad le trastomhas an leathchiorcail.
Dúirt *Grúpa 1* go raibh siad ar comhachar.
Dúirt *Grúpa 2* go raibh an triantán níos mó faoi 10.27%.
Dúirt *Grúpa 3* go raibh difríocht 9.24% i gceist.
Imscrúdaigh maíomh gach grúpa.

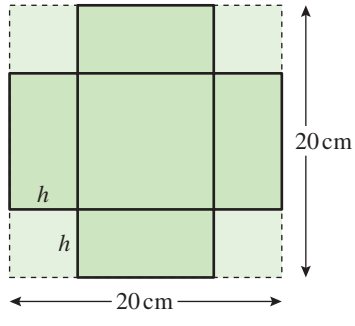


(ii) Ansin iarradh ar na grúpaí méid na mbonnuillinneacha i dtriantán comhchosach,a raibh an t-achar ceannann céanna aige leis an leathchiorcal, a ríomh.
Bhí an bonn ar comhfhad le trastomhas an leathchiorcail arís. Céard í an mhéid uillinne atá ceart?



(iii) Má rothlaítear na hachair chothroma thart ar líne ingearach trí stuaic an triantáin, cruthaítear cón agus leathsféar.
Imscrúdaigh an bhfuil na toirteanna mar an gcéanna.

3. Tugtar léaráid d'eangach tarraiceáin.
Nuair a thógtar é, tá cruth ciúbóidigh atá oscailte ar an mbarr aige.



(i) Faigh, i dtéarmaí h, slonn d'achar an bhoinn chearnógaigh.

(ii) Cén luach a bheadh ar h dá mba chiúb gan bharr an tarraiceán?

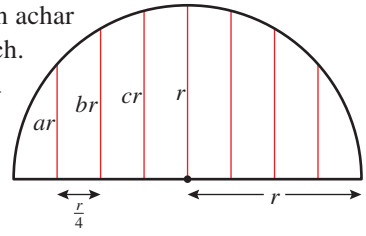
(iii) Faigh slonn do thoirt an tarraiceáin i dtéarmaí h.
Tarraing sceitse den toirt mar fheidhm de h ó $h = 0$ cm go $h = 14$ cm.

(iv) Úsáid do ghraf chun an luach ar h a uasmhéadaíonn toirt an tarraiceáin a mheas.

(v) Teastaíonn tarraiceán a bhfuil toirt 500 cm^3 aige.
Meas ó do ghraf na trí luach dhifriúla a bheadh ar h chun toirt 500 cm^3 a chruthú.

(vi) Mínigh an fáth nach bhfuil gach luach de h indéanta go fisiceach.

4. Teastaíonn ó ríomhchláraitheoir ríomhchlár a dhearadh chun achar ciorcail a mheas trí úsáid a bhaint as an riail thraipéasóideach. Ina chéad imscrúdú tarraingíonn sé leathchiorcal a bhfuil ga 10 cm aige. Roinneann sé an trastomhas ansin ina 8 n-eatramh chothroma.



(i) Tóg leathchiorcal a bhfuil ga 10 cm aige agus trí fhad gach eatraimh a thomhas, meas achar an leathchiorcail ag úsáid na rialach traipéasóidí.

(ii) Faigh an earráid chéatadánach sa mhodh seo tríd an achar a chur i gcomparáid leis an bhfíorachar $\frac{1}{2}\pi r^2$.

(iii) Agus a thógáil in úsáid aige, ríomh an ríomhchláraitheoir fad gach eatraimh i dtéarmaí r.
Úsáid an léaráid thuas chun luach do a, do b agus do c a ríomh, ceart go céim chruinnis réasúnta.

(iv) Dhíorthaigh an ríomhchláraitheoir an neasachar mar

$$\text{Achar} = \frac{r^2}{4}(2a + 2b + 2c + 1).$$

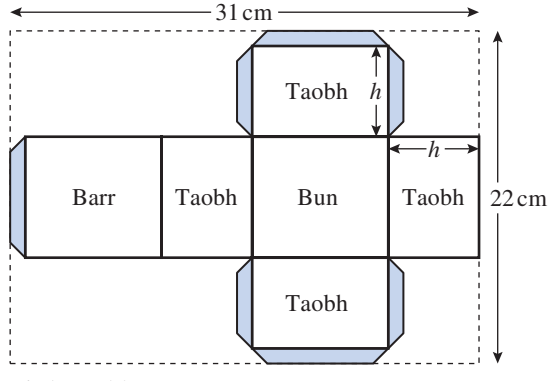
Taispeáin go soiléir an chaoi ar díorthaíodh an fhoirmle seo.

(v) Úsáid do luachanna ríofa do a, do b agus do c i gcothromóid an ríomhchláraitheora chun foirmle a fháil d'achar leathchiorcail a bhfuil ga r cm aige.

(vi) Úsáid an fhoirmle seo chun achar leathchiorcal a bhfuil gathanna 5 cm, 10 cm agus 15 cm acu a mheas.

(vii) Déan trácht ar chruinneas fhoirmle an ríomhchláraitheora.

5. Tá bosca le déanamh as leathán mór cairtchláir 22 cm × 31 cm.
Tá toirt 500 cm^3 le bheith sa bhosca.
Is éard atá sna codanna scáthaithe ná flapaí atá 1 cm ar leithead.
Tá an bosca h cm ar airde, mar a thaispeántar sa léaráid.



Scríobh, i dtéarmaí h,

(i) (a) fad (b) leithead (c) airde an bhosca.

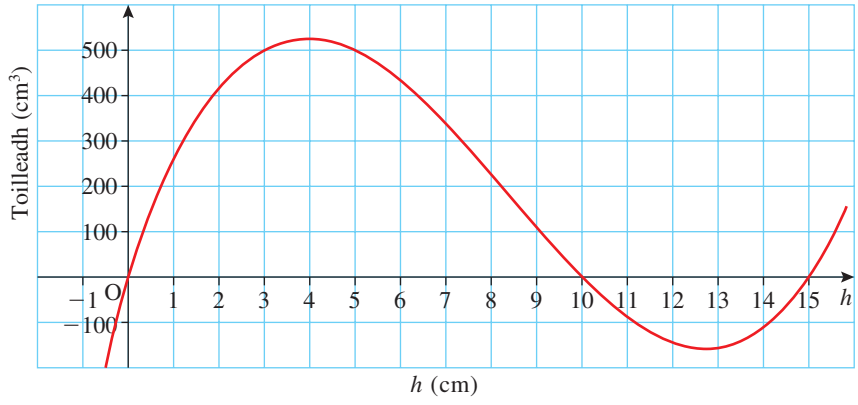
(ii) Scríobh slonn do thoilleadh an bhosca i dtéarmaí h.

(iii) Faigh luach h don bhosca má tá bonn cearnógach le bheith air.

(iv) Taispeáin go dtugann an luach seo ar h an toilleadh a theastaíonn.

(v) Faigh, ceart go dtí ionad amháin deachúlach, an luach eile ar h a thugann toilleadh 500 cm^3.

(vi) Tarraingítear graf den toilleadh mar fheidhm de h. Léirigh ar an ngraf seo do fhreagraí ar (iv) agus ar (*v*).



(vii) An féidir toilleadh an bhosca a mhéadú 10% le píosa cairtchláir atá ar an méid chéanna? Mínigh.
(In oiriúint as Páipéar Samplach 2012, Páipéar 1 ó Choimisiún na Scrúduithe Stáit.)

caibidil 7

Ailgéabar 3

Focail thábhachtacha

éagothromóid **éagothromóid chearnach** **éagothromóid chóimheasta** **modal** **cothromóidí modalacha** **éagothromóidí modalacha** **cruthúnas díreach** **cruthúnas trí bhréagnú** **luach uimhriúil** **éagothromóidí teibí** **séana** **bonnuimhir** **fás easpónantúil** **meath easpónantúil** **logartam** **cruthúnas trí ionduchtú**

Mír 7.1 Súil siar

Teastaíonn na siombailí éagothroime $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$ nuair atáthar ag réiteach fadhbanna ina sásaíonn réimse luachanna féideartha na coinníollacha tugtha.

$>$ níos má ná
$\geqslant$ níos mó ná nó cothrom le
$<$ níos lú ná
$\leqslant$ níos lú ná nó cothrom le

m.sh. Má tá $3x - 4 > 5$,
$3x > 9$,
agus $x > 3$, rud a chiallaíonn go sásaíonn **gach luach ar *x*** is mó ná 3 an éagothromóid $3x - 4 > 5$.

Éagothromóid a thugtar ar shloinn ar nós $3x - 4 > 5$.

Bunrialacha éagothromóidí

Tairiseach, a, a shuimiú nó a dhealú	$x > y$	$x \pm a > y \pm a$
Iolrú faoi uimhir **dheimhneach** nó roinnt ar uimhir **dheimhneach**, $a > 0$	$x > y$	$ax > ay$ $\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$

Agus sinn ag iolrú faoi uimhir dhiúltach nó ag roinnt ar uimhir dhiúltach, **aisiompaítear** an tsiombail éagothroime.

M.sh. $5 > 2$; má iolraítear an dá thaobh faoi (-1), faightear $5 \times (-1) < 2 \times (-1)$, i.e. $-5 < -2$.

Iolrú faoi uimhir **dhiúltach** nó roinnt ar uimhir **dhiúltach**, $a < 0$	$x > y$	$ax < ay$ $\frac{x}{a} < \frac{y}{a}$

Chomh maith leis sin,

Éagothromóidí a chónascadh	$x > y$ $y > z$	$x > z$
	$x > y > 0$ $a > b > 0$	$ax > by$

Tógáil ghrafach

Má thugtar graf na feidhme nó má tá sé éasca é a thógail, teicníc bhreise is ea é sin a chabhraíonn le héagothromóidí a thuiscint agus a réiteach.

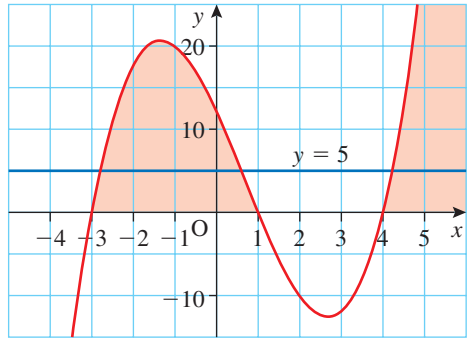
Má tá $\boldsymbol{f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 4) \geqslant 0}$,

is iad na pointí $x = -3$, $x = 1$ agus $x = 4$ na pointí criticiúla chun an tacar réitigh a chinneadh.

Is féidir na luachanna ar x ina bhfuil

$$f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 4) \geqslant 5$$

a mheas freisin.



Nóta:

(i) Agus éagothromóidí á réiteach, is minic nach mbíonn feidhm ag an réiteach ach maidir le córais uimhreacha ar leith, i.e. $\in \mathbb{N}$, $\in \mathbb{Z}$, $\in \mathbb{R}$, agus an réimse uimhreacha a bhreactar dá thoradh ar an uimhirlíne. m.sh. $5x - 1 > 14$, $x \in \mathbb{N}$.

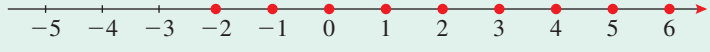
(ii) Cruthaíonn éagothromóid ordphéire (a, b);
Má tá $a > b$, má aisiompaítear an t-ord (b, a), aisiompaítear an éagothromóid freisin, i.e. $b < a$.

Sampla 1

Réitigh an éagothromóid $3x + 7 \geq x + 2$, $x \in \mathbb{Z}$, agus breac an réiteach ar uimhirlíne.

$$3x + 7 \geqslant x + 2$$
$$2x + 7 \geqslant 2 \quad \text{… ag dealú } x \text{ ón dá thaobh}$$
$$2x \geqslant -5 \quad \text{… ag dealú 7 ón dá thaobh}$$
$$x \geqslant \frac{-5}{2}, x \in \mathbb{Z}.$$

(Sásóidh gach luach slánuimhriúil níos mó ná nó cothrom le $-2\frac{1}{2}$ an éagothromóid tosaigh.)



Sampla 2

Réitigh an éagothromóid $\frac{1}{6}(x - 1) \geq \frac{1}{3}(x - 4)$, $x \in \mathbb{R}$.

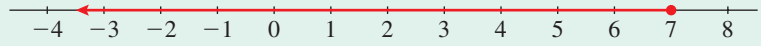
Graf do réiteach ar uimhirlíne.

$\frac{1}{6}(x - 1) \geqslant \frac{1}{3}(x - 4)$

$\Rightarrow\ x - 1 \geqslant 2x - 8$ … ag iolrú an dá thaobh faoi 6

$\Rightarrow\ -x \geqslant -7$ … ag suimiú 1 leis an dá thaobh agus ag dealú $2x$ ón dá thaobh

$\Rightarrow\ x \leqslant 7$ … ag iolrú an dá thaobh faoi (-1) agus ag aisiompú an chomhartha éagothroime.



(**Nóta:** Tugann ciorcal dúnta ar 7 le fios go bhfuil 7 san áireamh sa réimse.)

Sampla 3

Réitigh an éagothromóid $-9 < 3 - 4x \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Graf do réiteach ar an uimhirlíne.

$-9 < 3 - 4x \leqslant 1$

$\Rightarrow\ -12 < -4x \leqslant -2$ … ag dealú 3 ó gach páirt den éagothromóid

$\Rightarrow\ 3 > x \geqslant \frac{1}{2}$ … ag roinnt gach páirt den éagothromóid ar -4 agus ag aisiompú an chomhartha éagothroime

$\Rightarrow\ \frac{1}{2} \leqslant x < 3$ … ag aisiompú an oird

(**Nóta:** Tugann ciorcal oscailte ar 3 le fios nach bhfuil sé san áireamh.)

Sampla 4

(i) Faigh an tacar réitigh A, $\{x \mid 7 \leq 10 - 3x, x \in \mathbb{R}\}$.

(ii) Faigh an tacar réitigh B, $\{x \mid 2 > \frac{4}{3} - 2x, x \in \mathbb{R}\}$.

(iii) Faigh an tacar $A \cap B$ agus graf an réiteach ar an uimhirlíne.

$A:\ 7 \leqslant 10 - 3x$	$B:\ 2 > \frac{4}{3} - 2x$
$3x \leqslant 3$	$2x > \frac{4}{3} - 2$
$x \leqslant 1$	$2x > \frac{-2}{3}$
	$x > \frac{-1}{3}$

$\therefore$ is é $A \cap B$ an tacar luachanna $-\frac{1}{3} < x \leq 1$.

Cleachtadh 7.1

1. Graf ar uimhirlíne an tacar luachanna ar $x \in \mathbb{N}$ mar a bhfuil

(i) $3x - 5 > x + 3$ (ii) $6x - 5 \leqslant 2x - 1$ (iii) $1 - 3x > 10$.

2. Réitigh na héagothromóidí seo a leanas agus breac an tacar réitigh ar uimhirlíne.

(i) $\frac{x}{2} + 2 < 7, x \in \mathbb{N}$ (ii) $\frac{1}{6}(x - 1) \geqslant \frac{1}{3}(x - 4), x \in \mathbb{Z}$

(iii) $\frac{4 - x}{2} > \frac{2 - x}{3}, x \in \mathbb{R}$

3. Breac réiteach na n-éagothromóidí seo a leanas ar uimhirlíne, $x \in \mathbb{R}$.

(i) $12x - 3(x - 3) < 45$ (ii) $x(x - 4) \geqslant x^2 + 2$ (iii) $x - 2(5 + 2x) < 11$

4. Breac ar uimhirlíne an tacar luachanna ar $x \in \mathbb{R}$ mar a bhfuil

(i) $-2 \leqslant x + 1 \leqslant 3$ (ii) $-11 > 1 - 3x \geqslant 7$ (iii) $3 \geqslant 4x + 1 > -1$.

5. Réitigh gach ceann de na héagothromóidí seo a leanas, $x \in \mathbb{R}$.

(i) $3 > \frac{3}{5}(x - 2) > 0$ (ii) $-4 \leqslant \frac{2}{5}(1 - 3x) \leqslant 1$ (iii) $3 \leqslant 2 - \frac{x}{7} < 4$

6. Faigh an tacar luachanna mar a bhfuil $3(x - 2) > x - 4$ agus $4x + 12 > 2x + 17$, $x \in \mathbb{R}$, agus breac do fhreagraí ar uimhirlíne.

7. (i) Faigh an tacar réitigh A do $2x - 5 < x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
(ii) Faigh an tacar réitigh B do $7(x + 1) > 23 - x$, $x \in \mathbb{R}$.
(iii) Breac an tacar réitigh $A \cap B$ ar uimhirlíne.

8. (i) Faigh an tacar réitigh C do $2x - 3 > 2$, $x \in \mathbb{R}$.
(ii) Faigh an tacar réitigh D do $3(x + 2) < 12 + x$, $x \in \mathbb{R}$.
(iii) Breac an tacar réitigh $C \cap D$ ar uimhirlíne.

9. (i) Faigh an tacar réitigh E do $15 - x < 2(11 - x)$, $x \in \mathbb{Z}$.
(ii) Faigh an tacar réitigh F do $5(3x - 1) > 12x + 19$, $x \in \mathbb{Z}$.
(iii) Faigh an tacar luachanna $E \cap F$.

10. (i) Faigh an tacar luachanna G mar a bhfuil $3x + 8 \leq 20$, $x \in \mathbb{N}$.
(ii) Faigh an tacar luachanna H mar a bhfuil $2(3x - 7) \geq x + 6$, $x \in \mathbb{N}$.
(iii) Faigh an tacar luachanna $G \cap \mathrm{H}$.

11. Úsáidtear rópa atá 38 m ar fad chun limistéar dronuilleogach a chruthú lá spóirt.
Má chaithfidh leithead na dronuilleoige a bheith 2 m ar a laghad, agus má chaithfidh an fad a bheith 1 m go díreach níos faide ná an leithead, faigh uastoisí na dronuilleoige.

12. Má tá $a < n < b$, agus $100 < 2^n < 200$,
faigh luachanna ar a agus b, nuair atá $a, n, b \in \mathbb{N}$.

13. Tabhair sampla amháin chun a thaispeáint má tá $a > b > 0$ agus $n > 0 \Rightarrow a^n > b^n$.
Anois tabhair sampla chun a thaispeáint má tá $a > b > 0$ agus $n < 0 \Rightarrow a^n < b^n$.

Scríobh síos tacar coibhéiseach tátal dóibh seo:

Má tá $a < b < 0$ agus $n > 0$ .....,

ach má tá $a < b < 0$ agus $n < 0$ .....

14. Faigh x má tá $x \in \mathbb{Z}$ agus $Z = \{5 - 3x < -10\} \cap \{4x + 6 < 32\}$.

Mír 7.2 Éagothromóidí cearnacha agus cóimheasta

1. Éagothromóidí cearnacha

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c \geqslant 0}$, seo sampla d'éagothromóid chearnach.

Chun éagothromóid chearnach san fhoirm $ax^2 + bx + c \geq 0$ (nó ≤ 0) a réiteach, déan mar seo:

1. Réitigh $ax^2 + bx + c = 0$ chun fréamhacha (réadacha) na cothromóide cearnaí a fháil.
2. Tarraing sceitse garbh den ghraf leis na fréamhacha sin.
   (i) Má tá $a > 0$, tá cruth $\cup$ ar an ngraf.
   (ii) Má tá $a < 0$, tá cruth $\cap$ ar an ngraf.
3. Úsáid an graf chun tacar luachanna ar x a fháil a shásaíonn an éagothromóid.

Sampla 1

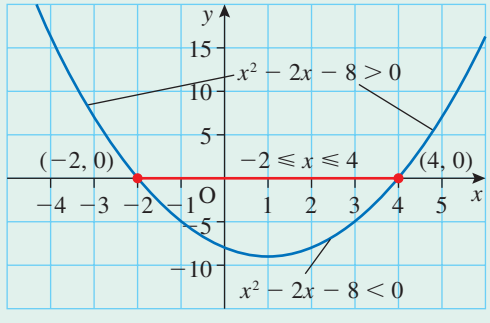
Réitigh an éagothromóid $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

Céim 1. Réitigh $x^2 - 2x - 8 = 0$.

$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4) = 0$

$\Rightarrow x = -2$ nó $x = 4$

Céim 2. Ó tharla go bhfuil $a = +1$, i.e. > 0, $\therefore$ graf a bhfuil cruth $\cup$ air.



Céim 3. Is é réiteach na héagothromóide an tacar luachanna ar x a thugann na pointí ar an ngraf atá ar an x-ais nó fúithi, i.e. $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.
Is é an réiteach ná $-2 \leq x \leq 4$.

I gcás ceisteanna ina bhfuil luachanna a bhfuil fréamhacha na cothromóide réadach dóibh, i.e. $b^2 - 4ac \geqslant 0$, faightear éagothromóidí cearnacha mar a léirítear sa chéad sampla eile.

Sampla 2

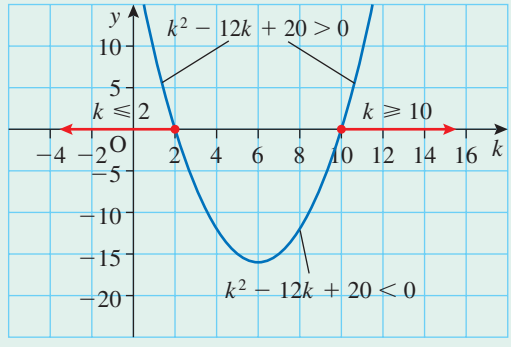
Faigh réimse luachanna ar k a bhfuil fréamhacha réadacha ag an gcothromóid $x^2 + (k - 4)x + (k - 1) = 0$ dó.

Coinníoll do fhréamhacha réadacha:
$b^2 - 4ac \geq 0$.

$a = 1, b = (k - 4), c = (k - 1)$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac = (k - 4)^2 - 4(1)(k - 1)$$
$$= k^2 - 8k + 16 - 4k + 4$$
$$= k^2 - 12k + 20$$

$b^2 - 4ac \geqslant 0 \Rightarrow k^2 - 12k + 20 \geqslant 0.$



(i) Ag réiteach $k^2 - 12k + 20 = 0$;

$\Rightarrow (k - 2)(k - 10) = 0$

$\Rightarrow$ is iad $k = 2$ agus $k = 10$ na fréamhacha.

(ii) Sceitseáil an graf; $a = +1$, i.e. > 0,

$\therefore$ graf a bhfuil cruth $\cup$ air.

Is é réiteach na héagothromóide an tacar luachanna ar k a thugann na pointí ar an ngraf atá ar an k-ais nó os a cionn, i.e. $k^2 - 12k + 20 \geq 0$.

Is é an réiteach ná $k \leq 2$ agus $k \geq 10$.

2. Éagothromóidí cóimheasta

Feidhm chóimheasta é $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$ toisc gur iltéarmaigh in x iad an t-ainmneoir agus an t-uimhreoir araon.

Éagothromóid chóimheasta é $\dfrac{3x - 2}{x + 1} \geqslant 2$

Ó tharla nach bhfuil a fhios againn an bhfuil $(x + 1)$ deimhneach nó diúltach, ní féidir linn an dá thaobh a iolrú faoi $(x + 1)$ chun réiteach ar x a fháil mar go mbeadh orainn an tsiombail éagothroime a aisiompú dá mbeadh $(x + 1)$ diúltach.

Ach má iolraímid an dá thaobh faoi $(x + 1)^2$, féadfaimid an comhartha éagothroime céanna a choinneáil ó tharla go mbíonn $(x + 1)^2$ deimhneach i gcónaí.

$$\Rightarrow \frac{3x - 2}{x + 1} \times (x + 1)^2 \geqslant 2 \times (x + 1)^2$$

$$\Rightarrow (3x - 2)(x + 1) \geqslant 2(x^2 + 2x + 1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x - 2 \geqslant 2x^2 + 4x + 2$$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$, ag cruthú éagothromóid chearnach (leis an tacar réitigh céanna) ón éagothromóid chóimheasta.

Sampla 3

Faigh an réimse luachanna ar x mar a bhfuil $\frac{2x+1}{x+2} < \frac{1}{2}$.

Ó tharla go bhfuil $\frac{2x+1}{x+2} < \frac{1}{2}$,
iolraigh an dá thaobh faoi $(x+2)^2$.
[Bíonn $(x+2)^2$ deimhneach i gcónaí do gach luach ar x.]

$\Rightarrow \frac{2x+1}{x+2} \times (x+2)^2 < \frac{1}{2} \times (x+2)^2$

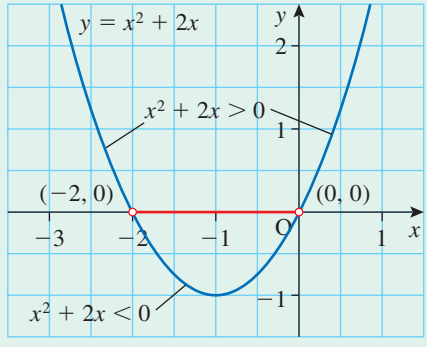
$\Rightarrow (2x+1)(x+2) < \frac{1}{2}(x^2+4x+4)$

$\Rightarrow 2x^2+5x+2 < \frac{1}{2}(x^2+4x+4)$

$\Rightarrow 4x^2+10x+4 < x^2+4x+4$

$\Rightarrow 3x^2+6x < 0$

$\Rightarrow x^2+2x < 0.$



[**Nóta:** Tá an tacar réitigh céanna ag $\frac{2x+1}{x+2} < \frac{1}{2}$ agus atá ag $x^2+2x<0$.]

(i) Agus an chothromóid $x^2+2x=0$ á réiteach:
$\Rightarrow (x)(x+2)=0$
$\Rightarrow$ is iad $x=0$ agus $x=-2$ na fréamhacha.

(ii) Sceitseáil an graf; $a=+1$, i.e. >0,
$\therefore$ graf a bhfuil cruth $\cup$ air.

$\Rightarrow$ Is é réiteach na héagothromóide an tacar luachanna ar x a thugann na pointí ar an ngraf atá faoin x-ais (i.e. $x^2+2x<0$).

Is é an réiteach ná $-2<x<0$.

Cleachtadh 7.2

I ngach ceann de na ceisteanna seo a leanas, tá $x \in \mathbb{R}$ mura ndeirtear a mhalairt.

1. Réitigh gach ceann de na héagothromóidí cearnacha seo a leanas:
(i) $x^2-x-6 \geqslant 0$ (ii) $x^2+3x-10 \leqslant 0$ (iii) $2x^2-5x+2<0$.

2. Réitigh gach ceann de na héagothromóidí seo a leanas do x:
(i) $6-x-x^2 \geqslant 0$ (ii) $12-5x-2x^2>0$ (iii) $-2x^2-7x \geqslant 0$.

3. Faigh an tacar luachanna ar x mar a bhfuil
(i) $6x^2-x>15$ (ii) $16-x^2 \leqslant 0$ (iii) $2(x^2-6) \geqslant 5x$.

4. Faigh an tacar luachanna ar x mar a bhfuil $(4-x)(1-x)<x+11$.

5. Má tá $x^2-6x+2 \leq 0$, taispeáin go bhfuil $3-\sqrt{7} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{7}$.

6. Faigh an réimse luachanna ar k a bhfuil fréamhacha réadacha ag an gcothromóid $x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$ dó.

7. Faigh an réimse luachanna ar k a bhfuil fréamhacha réadacha ag an gcothromóid $kx^2 + 4x + 3 + k = 0$ dó.

8. Faigh an réimse luachanna ar p a bhfuil fréamhacha réadacha ag an gcothromóid chearnach $px^2 + (p + 3)x + p = 0$ dó. Más fréamh de chuid na cothromóide é $x = -2$, faigh luach p.

9. Réitigh gach ceann de na héagothromóidí cóimheasta seo a leanas do x.

(i) $\dfrac{x+3}{x+2} < 2, x \neq -2$ (ii) $\dfrac{x+5}{x-3} > 1, x \neq 3$ (iii) $\dfrac{2x-1}{x+3} > 3, x \neq -3$

10. Faigh an réimse luachanna ar x mar a bhfuil

(i) $\dfrac{3x+4}{x-5} > 2, x \neq 5$ (ii) $\dfrac{1-2x}{4x+2} > 2, x \neq \dfrac{-1}{2}$ (iii) $\dfrac{3+4x}{5x-1} > 3, x \neq \dfrac{1}{5}$

11. Faigh an tacar luachanna ar x a bhfuil gach ceann de na héagothromóidí seo a leanas fíor dó.

(i) $\dfrac{x}{2x-3} \leqslant 1, x \neq \dfrac{3}{2}$ (ii) $\dfrac{2x-4}{x-1} < 1, x \neq 1$ (iii) $\dfrac{x-5}{x-1} \leqslant 3, x \neq 1$

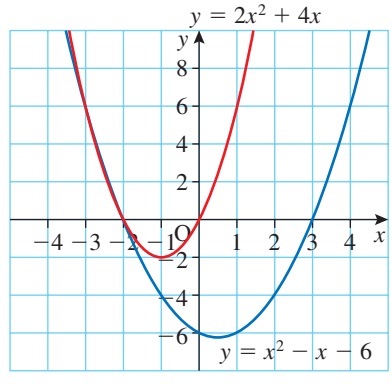
12. Réitigh na cothromóidí seo.

(i) $\dfrac{2x-7}{x+3} < 1, x \neq -3$ (ii) $\dfrac{2x-3}{x-5} < \dfrac{3}{2}, x \neq 5$ (iii) $\dfrac{x+2}{x-1} \leqslant 3, x \neq 1$

13. Imscrúdaigh na graif $y = 2x^2 + 4x$ agus $y = x^2 - x - 6$ agus meas an réimse luachanna ar x mar a bhfuil

$$2x^2 + 4x > x^2 - x - 6.$$

Simpligh an éagothromóid chearnach agus faigh an réimse luachanna ar x mar a bhfuil $2x^2 + 4x > x^2 - x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.



TFC: Imscrúdaigh na feidhmeanna i gCeist 13 le bogearraí grafaice. Méadaigh an scála ar an x-ais agus dírigh go sonrach ar an bhfearann $-3 < x < -2$.

14. Taispeáin go bhfuil $x^2 + x + 1 > 0$ do gach luach ar x.

15. Conair liathróide is ea an slonn $f(t) = -11 + 13t - 2t^2$, nuair a sheasann t don am. Faigh an réimse luachanna ar t a shásaíonn na héagothromóidí seo a leanas.

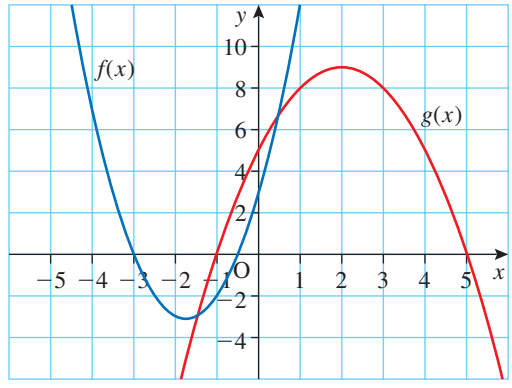
(i) $f(t) \leqslant 4$

(ii) $f(t) \geqslant 7$, agus uaidh sin oibrigh amach an tacar luachanna ar t a shásaíonn

(iii) $4 < f(t) < 7$.

16. Imscrúdaigh graif na bhfeidhmeanna cearnacha seo a leanas.
Faigh, chomh beacht agus is féidir leis an ngraf, an réimse luachanna ar x a shásaíonn na héagothromóidí seo a leanas.

(i) $f(x) > 0$
(ii) $g(x) \leqslant 8$
(iii) $f(x) \leqslant g(x)$
(iv) $g(x) > 0$

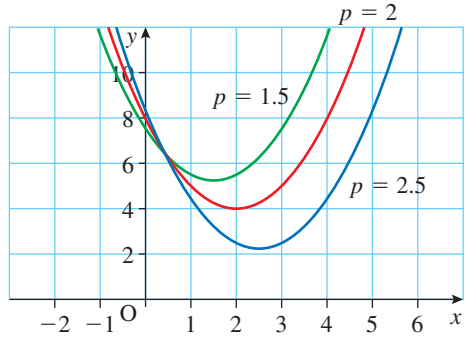


17. Tá leithead dronuilleoige le bheith 3 m níos giorra ná a fad. Má tá cóimheas an fhaid leis an leithead le bheith níos lú ná 5, faigh an réimse toisí féideartha

(i) d'fhad na dronuilleoige
(ii) do leithead na dronuilleoige.

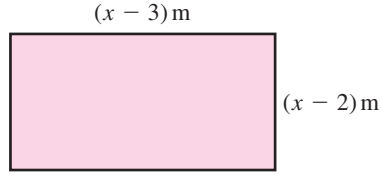
18. Taispeántar na graif $x^2 - 2px + p + 6$ do $p = 1.5, 2, 2.5$.

Faigh an réimse luachanna ar p a bhfuil na graif deimhneach dó i gcónaí, do gach luach réadach ar x.

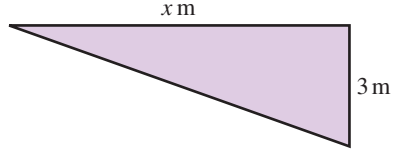


19. Faigh an réimse luachanna ar x mar a bhfuil

(i) imlíne na dronuilleoige seo níos lú ná 50 m
(ii) achar na dronuilleoige seo níos mó ná 12 m^2
(iii) imlíne na dronuilleoige seo níos lú ná 50 m agus an t-achar níos mó ná 12 m^2.



20. Faigh an réimse luachanna ar x, $x \in \mathbb{Z}$, le go mbeidh imlíne an triantáin seo idir 8 m agus 12 m ar fad.



Mír 7.3 Modal

1. Cothromóidí modalacha

Is é modal uimhreach tomhas a méide nó luacha agus scríobhtar mar $|x|$ é.

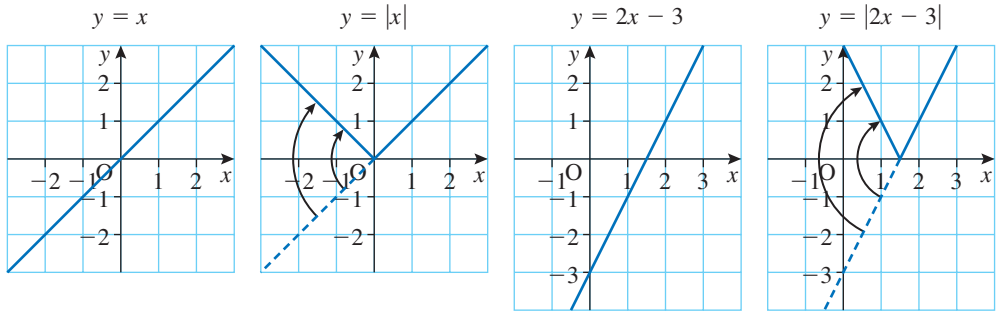
> Má tá $|x| = a$, tá $x = +a$ nó $-a$ agus $|x|^2 = a^2$.

$|3| = 3$, $|-4| = 4$, $|15.5| = 15.5$, $|-6.2| = 6.2$ .... i bhfocail eile, do gach $x \in \mathbb{R}$, is é $|x|$ luach deimhneach na huimhreach.

Ar an láimh eile, má tá $|x| = 6$, tá $x = +6$ nó -6.
Agus dá bhrí sin, $|x|^2 = 36$.

Go céimseatúil, iolraíonn an fheidhm mhodail aon pháirt dhiúltach den ghraf faoi (-1).

Cuir na graif seo a leanas i gcomparáid le chéile:



Faightear an graf $f(x) = |x|$ ón ngraf $f(x) = x$ tríd an bpáirt sin den ghraf ina bhfuil $f(x) < 0$ a fhrithchaitheamh san x-ais.

Sampla 1

Sceitseáil an graf $f(x) = |3x + 5|$ agus uaidh sin réitigh an chothromóid $|3x + 5| = 2$

(i) go céimseatúil agus (ii) go hailgéabrach.

(i) Go céimseatúil:

Tugtar $f(x) = 3x + 5$.

Ag $x = 0$, $f(x) = 5 \Rightarrow$ is é $(0, 5)$ an idirlíne $f(x)$.

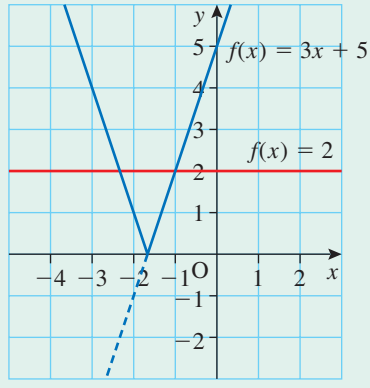
Ag $f(x) = 0; 0 = 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3} \Rightarrow$is é $\left(\frac{-5}{3}, 0\right)$ idirlíne na x-aise.

Is é $f(x) = 3x + 5$ an líne a ghabhann trí $(0, 5)$ agus $\left(\frac{-5}{3}, 0\right)$.

Má fhrithchaitear réigiún diúltach an ghraif ar an x-ais cruthaítear an graf $f(x) = |3x + 5|$.

Tugann x-chomhordanáidí na bpointí trasnaithe do $f(x) = |3x + 5|$ agus $f(x) = 2$ an réiteach don chothromóid $|3x + 5| = 2$.

Is iad na x-chomhordanáidí ná $x = -1$ agus $x \cong -2.3$.



(ii) Go hailgéabrach:

Modh 1

Ó tharla go bhfuil $|3x + 5| = 2$,

$\Rightarrow 3x + 5 = +2 \qquad \therefore x = -1$

nó $3x + 5 = -2 \qquad \therefore x = \frac{-7}{3}$

Is é an réiteach ná $x = \frac{-7}{3}$ nó $x = -1$

Modh 2

$|3x + 5| = 2$

$\Rightarrow (3x + 5)^2 = (2)^2$

$\Rightarrow 9x^2 + 30x + 25 = 4$

$\Rightarrow 9x^2 + 30x + 21 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 10x + 7 = 0$

$\Rightarrow (3x + 7)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow$ Is é an réiteach ná $\left(-\frac{7}{3}, -1\right)$

Nóta 1: Bíonn an modh ina "gcearnaítear an dá thaobh" de chothromóid mhodalach úsáideach nuair a bhíonn an comhartha modail ar an dá thaobh den chothromóid, m.sh. $|3x + 5| = |x - 2|$.

Nóta 2: **Luach uimhriúil** sloinn a fháil, a deirtear uaireanta, mar mhalairt ar mhodal sloinn a fháil.

2. Éagothromóidí modalacha

Má tá $|x| < 1$, caithfidh luach x a bheith idir $+1$ agus -1, i.e. $-1 < x < +1$.

Má tá $|x| > 1$, caithfidh luach x a bheith lasmuigh den réimse seo, i.e. $x > 1$ nó $x < -1$.

Sampla 2

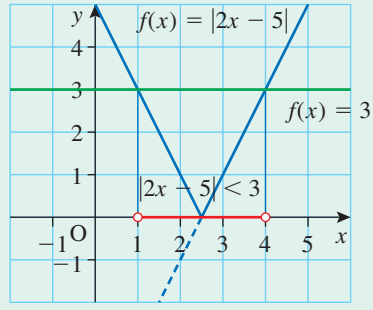
Sceitseáil an graf $f(x) = |2x - 5|$ agus uaidh sin réitigh an éagothromóid

$|2x - 5| < 3$.

tarraingítear $f(x) = 2x - 5$ ar dtús trí dhá phointe ar an líne a úsáid, m.sh. (2.5,0) agus (4, 3).

Ansin tarraingítear $f(x) = |2x - 5|$ tríd an gcuid dhiúltach den ghraf a fhrithchaitheamh ar an x-ais mar a rinneamar cheana.

Nuair a tharraingítear an líne $f(x) = 3$ ar na haiseanna céanna, seasann an mhír dhearg don áit a bhfuil $|2x - 5| < 3$.



Is iad na x-luachanna a chruthaíonn an chuid sin den ghraf ná $1 < x < 4$.

Nóta: Má tá $|2x - 5| = 3$, tá $2x - 5 = 3$ nó $2x - 5 = -3$.

Má tá $|2x - 5| < 3$, tá $-3 < 2x - 5 < 3$.

$\therefore \quad 2 < 2x < 8$ … ag suimiú 5 le gach páirt den éagothromóid

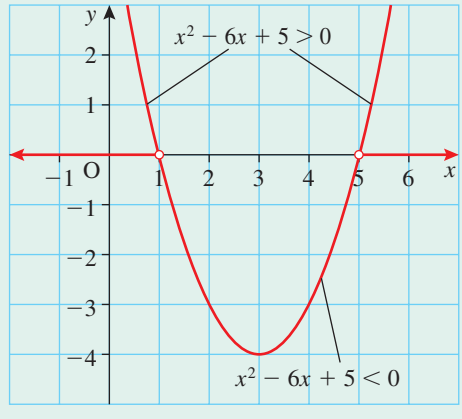
$1 < x < 4$ … ag roinnt gach páirt den éagothromóid ar 2

Tugann sé seo an tacar réitigh céanna agus atá thuas.

Sampla 3

Tarraing graf $f(x) = |x + 3|$ agus $f(x) = |3x - 7|$.
Réitigh an éagothromóid $|x + 3| < |3x - 7|$ go hailgéabrach agus cuir an tacar réitigh in iúl go grafach.

$$|x + 3| < |3x - 7|$$
$$\Rightarrow (x + 3)^2 < (3x - 7)^2$$
$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 < 9x^2 - 42x + 49$$
$$\Rightarrow -8x^2 + 48x - 40 < 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 > 0.$$

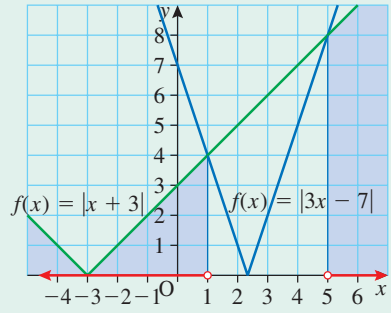


Ag réiteach $x^2 - 6x + 5 = 0$,

$$(x - 5)(x - 1) = 0$$

$\Rightarrow x = 5$ nó $x = 1$

Dá bhrí sin, is iad na luachanna ar x mar a bhfuil $x^2 - 6x + 5 > 0$ ná $x < 1$ agus $x > 5$.



Cleachtadh 7.3

1. Réitigh gach ceann de na héagothromóidí seo a leanas do $x \in \mathbb{R}$.

(i) $|x + 3| = 1$ (ii) $|x - 2| = 4$ (iii) $|2x - 1| = 5$

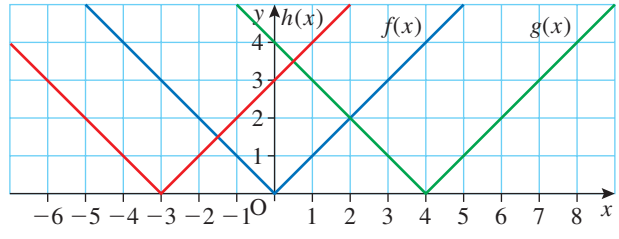
(iv) $|3x - 2| = x$ (v) $2|x - 3| = 2$ (vi) $|x - 5| = |x + 1|$

2. Cóipeáil agus comhlánaigh an tábla seo a leanas agus uaidh sin sceitseáil graf de $f(x) = |3x - 2|$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \lvert 3x - 2 \rvert$							

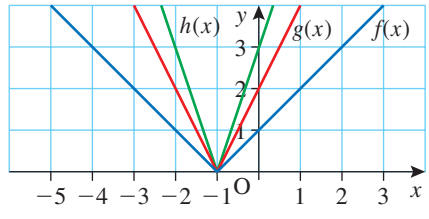
Úsáid do ghraf chun an chothromóid $|3x - 2| = 5$ a réiteach.

3. Scríobh cothromóid le haghaidh gach ceann de ghraif na bhfeidhmeanna modalacha gaolmhara, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, a thugtar sa léaráid.
Faigh luach $f(-2)$, $h(-5)$ agus $g(2)$ agus fíoraigh uaidh sin go bhfuil gach cothromóid ceart.



4. Tugtar graif trí cinn d'fheidhmeanna modalacha fsan fhoirm $f(x) = |ax + b|$.

Faigh luach a agus luach b do gach ceann de na trí ghraf. Fíoraigh gach cothromóid ag $x = -2$.



5. Ar an tacar céanna aiseanna, sceitseáil graif na bhfeidhmeanna

$$f : x \to |x - 2| \text{ agus } g : x \to |x - 6|.$$

Uaidh sin réitigh an chothromóid $|x - 2| = |x - 6|$.

Fíoraigh do fhreagra go hailgéabrach.

6. Réitigh gach ceann de na héagothromóidí seo a leanas do $x \in \mathbb{R}$.

(i) $|x - 6| < 2$ (ii) $|x + 2| \leqslant 4$ (iii) $|2x - 1| \geqslant 5$

(iv) $|2x - 1| \geqslant 11$ (v) $|3x + 5| < 4$ (vi) $|x - 4| < 3$

7. Réitigh gach ceann de na héagothromóidí seo a leanas, $x \in \mathbb{R}$.

(i) $|2x - 1| \geqslant 7$ (ii) $|3x + 4| \leqslant |x + 2|$ (iii) $2|x - 1| \leqslant |x + 3|$

8. Ar an tacar céanna aiseanna, sceitseáil graf na bhfeidhmeanna

$$f(x) = |x| - 4 \text{ agus } g(x) = \tfrac{1}{2}x.$$

Uaidh sin réitigh an éagothromóid $|x| - 4 \leq \frac{1}{2}x$.

9. Sceitseáil graf na feidhme $f(x) = |\frac{1}{4}x + 3|$ agus uaidh sin réitigh an éagothromóid $|\frac{1}{4}x + 3| \geq 3$.

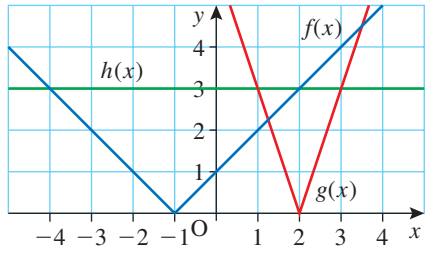
10. Réitigh an éagothromóid $|1 + 2x| < |x + 2|$ do $x \in \mathbb{R}$.

11. Cé na luachanna réadacha ar $x \in \mathbb{R}$ a bhfuil $\left|\dfrac{1}{1 + 2x}\right| = 1, x \neq -\dfrac{1}{2}$?

Uaidh sin réitigh an éagothromóid $\left|\dfrac{1}{1 + 2x}\right| < 1$.

12. Úsáid graf na bhfeidhmeanna $f(x) = |x + 1|$, $g(x) = |3x - 6|$ agus $h(x) = 3$ chun an réimse luachanna ar x a sásaíonn na héagothromóidí seo a leanas a mheas.

(i) $f(x) < h(x)$
(ii) $h(x) < f(x)$
(iii) $g(x) < f(x)$
(iv) $g(x) < h(x) < f(x)$
(v) $g(x) < f(x) < h(x)$
(vi) $f(x) > h(x) > g(x)$
(vii) $f(x) > g(x) > h(x)$



13. Réitigh gach ceann de na héagothromóidí seo a leanas do $x \in \mathbb{R}$.

(i) $\dfrac{x}{2x - 1} < -2$ (ii) $|x - 3| = 2|x - 1|$ (iii) $|x - 1| - |2x + 1| > 0$

Mír 7.4 Cruthúnas matamaiticiúil

Sa mhatamaitic, úsáidimid réasúnaíocht dhéaduchtach chun a chruthú go bhfuil ráiteas fíor *i gcónaí*.

Teoirim a thugtar ar ráiteas a cruthaíodh a bheith fíor.
m.sh. teoirim De Moivre, teoirim Phíotagarás, srl.

I measc na modhanna éagsúla cruthaithe tá cruthúnas díreach, cruthúnas trí bhréagnú agus cruthúnus trí ionduchtú (féach Mír 7.12).

1. Cruthúnas díreach

I gcruthúnas díreach úsáidtear aicsímí, sainmhínithe agus teoirimí cruthaithe eile chun an ráiteas nua a fhíorú.

Sampla 1

Cruthaigh go bhfuil suim dhá ré-shlánuimhir x agus y ina ré-uimhir i gcónaí.

Cruthúnas:
Ó tharla gur ré-uimhir é x, is féidir é a scríobh mar $x = 2a$, mar a bhfuil $a \in \mathbb{Z}$.

Chomh maith leis sin, ó tharla gur ré-uimhir é y, tá $y = 2b$, mar a bhfuil $b \in \mathbb{Z}$.

Dá bhrí sin, $x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$.

Ó tharla gur fachtóir de $x + y$ é $2 \Rightarrow$ caithfidh $x + y$ a bheith ina ré-uimhir.

$\therefore$ Bíonn suim dhá ré-shlánuimhir ina ré-uimhir i gcónaí.

2. Cruthúnas trí bhréagnú

I gcruthúnas trí bhréagnú, taispeánaimid má áitímid go bhfuil ráiteas éigin fíor, go dtarlaíonn bréagnú loighciúil a chruthaíonn go gcaithfidh an chéad ráiteas a bheith bréagach.

Sampla 2

Cruthaigh go mbíonn $\sqrt{2}$ éagóimheasta i gcónaí.

Cruthúnas: Glac leis gur uimhir chóimheasta é $\sqrt{2}$.

$\therefore$ Is féidir $\sqrt{2}$ a scríobh mar $\frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ agus $b \neq 0$, agus níl aon fhachtóir coiteann ag a agus b.

$\therefore$ $2 = \frac{a^2}{b^2}$ … ag cearnú an dá thaobh

$\therefore$ $a^2 = 2b^2$

$\therefore$ tá a^2 ina ré-uimhir ó tharla go bhfuil sé cothrom le $2 \times (b^2)$

$\therefore$ is ré-uimhir é a …. aon slánuimhir a iolraítear faoi 2, is ré-uimhir í

$\therefore$ is féidir a a scríobh mar $a = 2c$ … ó tharla go bhfuil a inroinnte ar 2

$\therefore$ $a^2 = 4c^2 = 2b^2$

$\therefore$ $2c^2 = b^2$

$\therefore$ is ré-uimhir é b freisin

$\therefore$ tá fachtóir coiteann 2 ag a agus b, rud a bhréagnaíonn ár mbonn tuisceana.

$\therefore$ ní uimhir chóimheasta é $\sqrt{2}$.

$\therefore$ is uimhir éagoimheasta é $\sqrt{2}$ i.e. ní féidir é a scríobh mar $\frac{a}{b}$ gan aon fhachtóir coiteann.

Cleachtadh 7.4

1. Cruthaigh trí bhréagnú nach bhfuil aon réiteach ar $x^2 - y^2 = 1$ atá ina shlánuimhir dheimhneach. (Nod: Glac leis gur slánuimhreacha deimhneacha iad x agus y agus úsáid an difríocht idir dhá chearnóg.)

2. Cruthaigh trí bhréagnú más uimhir chóimheasta é a agus más uimhir éagoimheasta é b, gur uimhir éagoimheasta é $a + b$.

3. Cruthaigh trí bhréagnú nach bhfuil aon réiteach ar $x^2 - y^2 = 10$ atá ina shlánuimhir dheimhneach. (Nod: Glac leis gur slánuimhreacha deimhneacha iad x agus y agus úsáid an difríocht idir dhá chearnóg.)

4. Cruthaigh más féidir b a roinnt ar a, agus más féidir c a roinnt ar b, gur féidir c a roinnt ar a.

5. Cruthaigh más féidir b a roinnt ar a, agus más féidir c a roinnt ar a, gur féidir $(b + c)$ a roinnt ar a.

6. Más réaduimhreacha iad a agus b, cruthaigh go bhfuil $a^2 + b^2 \geq 2ab$. (Cruthúnas éagothromóide teibí.)

7. Cruthaigh go bhfuil suim dhá uimhir chóimheasta ina huimhir chóimheasta.

8. Cruthaigh go mbíonn suim dhá chorruimhir ina ré-uimhir i gcónaí.

Mír 7.5 Cruthúnais éagothromóidí teibí

Má tá $a > 0$ agus $b > 0$, is sampla é $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ d'**éagothromóid theibí** (féach Sampla 2).

Chun a chruthú go bhfuil ráiteas éagothromóide fíor, úsáidfimid dhá fhíric thábhachtacha:

(i) (Réaduimhir ar bith)$^2 \geq 0$
(ii) $-$(Réaduimhir ar bith)$^2 \leq 0$.

Más réaduimhreacha iad a agus b,
tá $a^2 \geq 0$ agus $b^2 \geq 0$

$$(a + b)^2 \geqslant 0$$
$$(a - b)^2 \geqslant 0$$
$$-(a + b)^2 \leqslant 0$$
$$-(a - b)^2 \leqslant 0$$

Má chearnaítear dhá thaobh na héagothromóide, ní choinnítear an comhartha éagothroime ach amháin má bhíonn dhá thaobh na héagothromóide deimhneach.

Mar shampla, $4 > 3 \Rightarrow 4^2 > 3^2$, i.e. $16 > 9$.

Ach má bhíonn taobh amháin nó an dá thaobh diúltach, ní bhíonn sé fíor.

M.sh. $2 > -3 \not\Rightarrow 2^2 > (-3)^2$,
i.e. $4 \not> 9$.

Chun éagothromóid theibí a chruthú:

1. Scríobh síos an ráiteas a iarrtar ort a chruthú.
2. Úsáid rialacha na n-éagothromóidí chun an éagothromóid a oiriúnú go dtí …
3. go dtagann tú ar éagothromóid atá fíor go cinnte.

Sampla 1

Cruthaigh go bhfuil $a^2 + b^2 \geq 2ab$ do gach $a, b \in \mathbb{R}$.

Má tá: $a^2 + b^2 \geq 2ab$,

tá $\quad a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$ … ag dealú $2ab$ ón dá thaobh.

$\therefore \quad (a - b)^2 \geqslant 0$ … ag fachtóiriú thaobh na láimhe clé.

atá fíor i gcónaí. $\quad \therefore \quad a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

Sampla 2

Má tá $a > 0$ agus $b > 0$, cruthaigh go bhfuil $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

Má tá: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$,

tá $\quad a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ …iolraigh gach téarma faoin gcomhainmneoir ab.

$\therefore \quad a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$

$\therefore \quad (a - b)^2 \geqslant 0$ … atá fíor i gcónaí.

$\therefore \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

Sampla 3

Taispeáin go bhfuil $x^2 + 4x + 6 > 0$ (i.e. deimhneach) do gach $x \in \mathbb{R}$.

Má tá: $x^2 + 4x + 6 > 0$,

tá $\quad x^2 + 4x \mathbf{+ 4 - 4} + 6 > 0$ … ag suimiú agus ag dealú $(\frac{4}{2})^2$ chun an chearnóg a shlánú.

$\Rightarrow (x + 2)^2 - 4 + 6 > 0$ … ag slánú na cearnóige.

$\Rightarrow (x + 2)^2 + 2 > 0$ … atá fíor do gach luach ar x, ó tharla go bhfuil $(x + 2)^2 > 0$ do gach luach ar x.

$\therefore \quad x^2 + 4x + 6 > 0$ do gach $x \in \mathbb{R}$.

Sampla 4

Taispeáin i gcás gach réaduimhreach $a, b > 0$ go bhfuil $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

Má tá: $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$,

tá $(a + b)\left(\frac{a + b}{ab}\right) \geqslant 4$ … ag úsáid an chomhainmneora ab chun na codáin a shuimiú.

$\therefore \quad \frac{(a + b)^2}{ab} \geqslant 4$ … ag simpliú.

$\therefore \quad (a + b)^2 \geqslant 4ab$ … ag iolrú an dá thaobh faoi ab.

$\therefore \quad a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab$ … ag leathnú thaobh na láimhe clé.

$\therefore \quad a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$ … ag dealú $4ab$ ón dá thaobh.

$\therefore \quad (a - b)^2 \geqslant 0$ … atá fíor do gach $a, b \in \mathbb{R}$.

$\therefore \quad (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

Cleachtadh 7.5

1. Cruthaigh go bhfuil (i) $a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 0$ (ii) $a^2 + 2ab + 2b^2 \geqslant 0$ do gach $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Cruthaigh go bhfuil $(a + b)^2 \geq 4ab$ do gach $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Cruthaigh go bhfuil $-(a^2 + 2ab + b^2) \leq 0$ do gach $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Má tá $a > 0$ agus $b > 0$, taispeáin go bhfuil

(i) $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ (ii) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{2}{a + b}$.

5. Cruthaigh go bhfuil $a^2 - 6a + 9 + b^2 \geq 0$ do gach luach réadach ar a agus b.

6. Cruthaigh do gach luach réadach ar x,

(i) $x^2 + 6x + 9 \geqslant 0$ (ii) $x^2 - 10x + 25 \geqslant 0$ (iii) $x^2 + 4x + 6 \geqslant 0$

(iv) $x^2 - 6x + 10 \geqslant 0$ (v) $4x^2 + 12x + 11 \geqslant 0$ (vi) $4x^2 - 4x + 2 \geqslant 0$.

7. Cruthaigh go bhfuil (i) $-x^2 + 10x - 25 \leqslant 0$ (ii) $-x^2 - 4x - 7 \leqslant 0$ do gach $x \in \mathbb{R}$.

8. Cruthaigh do gach réaduimhir p agus q go bhfuil

(i) $p^2 + 4q^2 \geqslant 4pq$ (ii) $(p + q)^2 \leqslant 2(p^2 + q^2)$.

9. Fachtóirigh $a^3 + b^3$.
Uaidh sin cruthaigh go bhfuil $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$ do gach $a > 0$ agus $b > 0$ réadach.

10. Má tá $a^2 + b^2 \geq 2ab$, oibrigh amach slonn do (i) $a^2 + c^2$ agus (ii) $c^2 + d^2$.
Úsáid na torthaí sin chun a chruthú go bhfuil

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca \text{ do gach luach réadach ar } a, b \text{ agus } c.$$

11. Má tá $p > 0$ agus $q > 0$ agus $p \neq q$, cruthaigh go bhfuil $\dfrac{p+q}{2} > \sqrt{pq}$.

12. Taispeáin go bhfuil $(ax + by)^2 \leqslant (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ do gach $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

13. Cruthaigh go bhfuil $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$ do gach $a, b \in \mathbb{R}$.

14. Más uimhreacha deimhneacha iad a agus b agus má tá $b > a$, taispeáin go bhfuil

$$(a + 2b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b}\right) \geqslant 4.$$

15. Taispeáin i gcás gach réaduimhreach a, go bhfuil $\dfrac{a}{(a+1)^2} < \dfrac{1}{4}, a \neq -1$.

16. (i) Sloinn $a^4 - b^4$ mar thoradh trí fhachtóir.
(ii) Fachtóirigh $a^5 - a^4b - ab^4 + b^5$.
(iii) Úsáid na torthaí ó (i) agus (ii) chun a thaispeáint go bhfuil $a^5 + b^5 > a^4b + ab^4$, nuair is réaduimhreacha deimhneacha éagothroma iad a agus b.

17. Má tá $a^2 + b^2 = 1$ agus $c^2 + d^2 = 1$, taispeáin go bhfuil $ac + bd < 1$.
(Nod: Úsáid an toradh go bhfuil $a^2 + b^2 \geq 2ab$.)

18. Cruthaigh go bhfuil $\sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$ má tá a agus b deimhneach agus éagothrom.

19. Cruthaigh go bhfuil $a + \dfrac{9}{a+2} \geqslant 4$, mar a bhfuil $a + 2 > 0$.

20. Más uimhreacha deimhneacha iad a, b, c, d agus má tá $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$, cruthaigh go bhfuil $\dfrac{a+c}{b+d} > \dfrac{c}{d}$.

21. Mínigh an fáth a bhfuil $(a^3 - b^3)(a - b)$ deimhneach i gcónaí do $a > b$.
Uaidh sin cruthaigh go bhfuil $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ do gach $a, b \in \mathbb{R}$ and $a > b$.

Mír 7.6 Séana

Nuair a iolraítear uimhir fúithi féin go minic, úsáidimid an fhoirm séan chun an toradh a léiriú.
$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$, i.e. 4 i.e. 4 i gcumhacht 5.

Sa chás seo, is é 5 an **séan** (séana an t-iolra) agus is é 4 an **bhonnuimhir**.

Achoimre ar rialacha na séan.

	Sampla	Riail
1.	$6^3 \times 6^4 = 6^7$	$a^m . a^n = a^{m+n}$
2.	$\frac{4^5}{4^2} = 4^3$, chomh maith le $\frac{4^5}{4^7} = 4^{-2}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3.	$(2^4)^3 = 2^{12}$	$(a^m)^n = a^{m.n}$
4.	$3^0 = 5^0 = 9^0 = (-3)^0 = \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$	$a^0 = 1$
5.	$3^{-1} = \frac{1}{3}$, $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
6.	$7^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{7}$, $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
7.	$8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ nó $(8^2)^{\frac{1}{3}}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
8.	$(2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$ $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^4}$	$(a.b)^n = a^n.b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Is féidir gach ceann de na rialacha seo a fhíorú trí na cumhachtaí a leathnú agus a shimpliú, m.sh.

$$(2^4)^3 = 2^4 \times 2^4 \times 2^4 = 2^{12} = 4096$$

Nóta: $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$ = fréamh chearnach x.

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ = fréamh chiúbach x.

$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ = ceathrú fréamh x … etc.

Nóta: $25^{\frac{3}{2}} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (5)^3 = 125$ (go minic, tá sé níos éasca an fhréamh a fháil ar dtús agus ansin an chumhacht a ardú.)

Sampla 1

Faigh luach gach ceann díobh seo a leanas.

(i) $27^{\frac{1}{3}}$ (ii) $36^{\frac{3}{2}}$ (iii) $64^{-\frac{2}{3}}$ (iv) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(i) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$ … (i.e. 3 iolraithe faoi 3 iolraithe faoi 3 = 27)

(ii) $36^{\frac{3}{2}} = \left(36^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{36}\right)^3 = 6^3 = 216$

(iii) $64^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{(4)^2} = \frac{1}{16}$

(iv) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

Sloinn uimhriúla ina bhfuil codáin chasta agus séana, is féidir iad a shimpliú agus a luach a fháil le háireamhán.

Ó tharla go bhféadfadh an tslí ina ndéantar seo a bheith beagáinín difriúil ar gach áireamhán, tá sé tábhachtach dul i dtaithí ar d'áireamhán féin, go háirithe nuair atá tú ag plé le cumhachtaí codánacha.

Tá sé níos tábhachtaí, áfach, rialacha na séan a thuiscint agus a bheith in ann iad a chur i bhfeidhm ar fhadhbanna ginearálta ina bhfuil athróga.

Sampla 2

Simpligh gach ceann díobh seo (i) $\left(\dfrac{x^2y^{-3}}{x^{-4}y^5}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a} \times \sqrt[3]{a^2}}$

(i) $\left(\dfrac{x^2y^{-3}}{x^{-4}y^5}\right)^{\frac{1}{2}} = (x^6y^{-8})^{\frac{1}{2}} = (x^6)^{\frac{1}{2}}(y^{-8})^{\frac{1}{2}} = x^3y^{-4} = \dfrac{x^3}{y^4}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a} \times \sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3+8}{12}}} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{11}{12}}} = a^{\frac{3}{2} - \frac{11}{12}} = a^{\frac{7}{12}}$

Sampla 3

Taispeáin go bhfuil $\dfrac{5^{n+1} - 4.5^n}{5^{n-2} + 5^n} = \dfrac{25}{26}$.

$$\frac{5^{n+1} - 4.5^n}{5^{n-2} + 5^n} = \frac{5^n.5^1 - 4.5^n}{5^n.5^{-2} + 5^n} = \frac{5.5^n - 4.5^n}{\frac{5^n}{25} + 5^n} = \frac{5^n}{\frac{5^n + 25.5^n}{25}} = \frac{5^n}{\frac{26.5^n}{25}} = \frac{25}{26}$$

Cleachtadh 7.6

1. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $a^2 \times a^3$ (ii) $x.x.x^2$ (iii) $2x^3 \times 3x^3$ (iv) $\dfrac{x^5}{x^2}$ (v) $\dfrac{x^4}{x^5}$

(vi) a^0 (vii) $\sqrt[3]{27}$ (viii) $(a^3)^2$ (ix) $\dfrac{(x^3)^2}{x^3}$ (x) $(3ab)^2$

2. Sloinn gach ceann díobh seo a leanas mar uimhir chóimheasta:

(i) $\sqrt[3]{64}$ (ii) 3^{-2} (iii) $\dfrac{1}{2^{-3}}$ (iv) $\dfrac{2^{-2}}{3^{-2}}$ (v) $\dfrac{1}{4^{-\frac{1}{2}}}$

3. Sloinn iad seo a leanas mar uimhreacha cóimheasta:

(i) $8^{\frac{2}{3}}$ (ii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iii) $27^{\frac{2}{3}}$ (iv) $81^{\frac{3}{4}}$ (v) $125^{\frac{2}{3}}$.

4. Simpligh gach ceann díobh seo:

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (iii) $\left(\frac{9}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$ (iv) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (v) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

5. Sloinn $\dfrac{4^2 \times 16^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{2}{3}} \times 4^3}$ san fhoirm 4^n, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Faigh luach na réaduimhreach p mar a bhfuil $\dfrac{3^{\frac{1}{4}} \times 3 \times 3^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{3}} = 3^p$.

7. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas, agus scríobh do fhreagraí le séana deimhneacha.

(i) $\dfrac{(xy^2)^3 \times (x^2y)^{-2}}{xy}$ (ii) $\left(\dfrac{p^2q}{p^{-1}q^3}\right)^4$ (iii) $a^{\frac{1}{4}} \times a^{-\frac{5}{4}}$

(iv) $\left(\dfrac{y^{-2}}{y^{-3}}\right)^{\frac{2}{3}}$ (v) $\dfrac{(a\sqrt{b})^{-3}}{\sqrt{a^3b}}$ (vi) $\dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt{x^3}}$

8. Simpligh gach ceann díobh seo

(i) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ (ii) $\left(x + x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x - x^{\frac{1}{2}}\right)$ (iii) $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}$

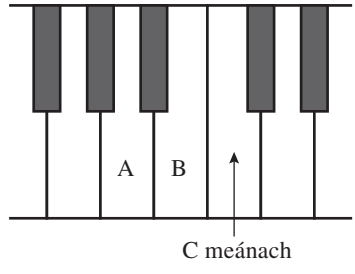
9. Iolraigh an t-uimhreoir agus an t-ainmneoir faoi $(x - 1)^{\frac{1}{2}}$, ansin simpligh

$$\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

10. Is féidir an slonn $\sqrt{3^{2n+1}} \times \sqrt[3]{3^{-3n}}$ a scríobh san fhoirm 3^k; faigh k.

11. Cuirtear pianó i dtiúin le go gcasfaidh gach eochair (idir dhubh agus bhán) nóta a bhfuil minicíocht aici atá $2^{\left(\frac{1}{12}\right)}$ uair níos airde ná an nóta roimhe.

Má thiúntar an A-eochair (2 eochair faoi C meánach) ag minicíocht 220 Hz, faigh, ceart go dtí an tslánuimhir is gaire, minicíocht (i Hz) C meánach.



12. Tugtar achar dromchla sféir mar

$A = 4\pi r^2$ agus a thoirt V mar $\frac{4}{3}\pi r^3$, nuair is é r ga an sféir.

Taispeáin má tá dhá sféar againn a bhfuil ga r_1 agus r_2 faoi seach acu, gur féidir cóimheas na n-achar dromchla a scríobh mar $\dfrac{A_1}{A_2} = \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Má tá toirt 162 cm^3 agus 384 cm^3 faoi seach ag dhá sféar mar seo, faigh cóimheas a n-achar, ag sloinneadh do fhreagra san fhoirm $\frac{a}{b}$, nuair atá $a, b \in \mathbb{N}$.

13. Má tá $f(n) = 3^n$, faigh sloinn le haghaidh (i) $f(n + 3)$ (ii) $f(n + 1)$.
Uaidh sin faigh luach k mar a bhfuil $f(n + 3) - f(n + 1) = k\,f(n)$, nuair atá $k \in \mathbb{N}$.

14. Má tá $f(n) = 3^n - 1$, faigh luach k mar a bhfuil $f(n + 3) + f(n) = k\,f(n)$, nuair atá $k \in \mathbb{N}$.

Mír 7.7 Cothromóidí easpónantúla

Sampla d'fheidhm easpónantúil é $y = 3^x$.
Sampla de **chothromóid easpónantúil** é $3^x = 27$.

Mar a bhí sa mhír dheireanach, is é 3 an **bhonnuimhir** agus is é x an **séan** (cumhacht) nó **easpónant**.

Agus cothromóidí easpónantúla á réiteach, tá sé tábhachtach an bhonnuimhir (uimhir phríomha de ghnáth) atá i bpáirt ag gach téarma sa chothromóid a shainaithint.

m.sh. $3^x = 27$; is é 3 an bhonnuimhir don dá thaobh. … ($3^x = 3^3$)
$25^x = 125$; is é 5 an bhonnuimhir. … ($5^x = 5^3$)

Sampla 1

Réitigh na cothromóidí seo. (i) $\frac{1}{8^x} = 16^{\frac{1}{3}}$ (ii) $27^{x-3} = 3 \times 9^{x-2}$

(i) $\frac{1}{8^x} = 16^{\frac{1}{3}}$ (is é 2 an bhonnuimhir)

$$\frac{1}{(2^3)^x} = (2^4)^{\frac{1}{3}}$$

$$2^{-3x} = 2^{\frac{4}{3}} \Rightarrow -3x = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{4}{9}$$

(ii) $27^{x-3} = 3 \times 9^{x-2}$
(is é 3 an bhonnuimhir)

$$(3^3)^{x-3} = 3 \times (3^2)^{x-2}$$

$$\Rightarrow 3^{3x-9} = 3^1 \times 3^{2x-4}$$

$$\Rightarrow 3^{3x-9} = 3^{2x-3}$$

$$\Rightarrow 3x - 9 = 2x - 3$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Ach **athrú athróige** oiriúnach a úsáid, is féidir cothromóid chearnach a dhéanamh de chothromóid easpónantúil agus í a réiteach ansin.

Nóta: Má tá $2^x = y$,
$\Rightarrow 3 . 2^x = 3y$
$\Rightarrow 2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$
$\Rightarrow 2^{x+2} = 2^x . 2^2 = 4y$

Sampla 2

Má tá $y = 3^x$, sloinn 3^{2x} i dtéarmaí y.

Uaidh sin réitigh an chothromóid $3^{2x} - 4.3^x + 3 = 0$.

(i) $3^{2x} = (3^x)^2 = y^2$

(ii) Tá $3^{2x} - 4.3^x + 3 = 0$.

$\Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$ … ag úsáid an ionadaithe $3^x = y$ agus $3^{2x} = y^2$

$\Rightarrow (y - 1)(y - 3) = 0$

$\Rightarrow y = 1$ or $y = 3$ … is iad sin réitigh na cothromóide cearnaí nua

$\Rightarrow 3^x = 1$ or $3^x = 3$ … ag athionadú chun luachanna x a fháil

$\Rightarrow 3^x = 3^0$ or $3^x = 3^1$ … ag úsáid na bonnuimhreach 3

$\therefore$ is iad $x = 0$ nó $x = 1$ na réitigh.

Cleachtadh 7.7

1. Faigh luach x i ngach ceann de na cothromóidí seo:

(i) $2^x = 32$ (ii) $16^x = 64$ (iii) $25^x = 125$ (iv) $3^x = \frac{1}{27}$

2. Réitigh gach ceann de na cothromóidí séan (easpónantúla) seo.

(i) $9^x = \frac{1}{27}$ (ii) $4^x = \frac{1}{32}$ (iii) $4^{x-1} = 2^{x+1}$ (iv) $\frac{1}{9^x} = 27$

3. Faigh luach x i ngach ceann de na cothromóidí seo:

(i) $2^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ii) $25^x = \frac{125}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{8^x} = \sqrt{2}$ (iv) $7^x = \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

4. Scríobh $\sqrt{32}$ i gcumhacht 2 agus uaidh sin réitigh an chothromóid $16^{x-1} = 2\sqrt{32}$.

5. Má tá $27^x = 9$ agus $2^{x-y} = 64$, faigh luach x agus luach y.

6. Sloinn (i) 2^{x+2} agus (ii) $2^x + 2^x$ san fhoirm $k2^x$, nuair atá $k \in \mathbb{N}$.
Uaidh sin réitigh do c sa chothromóid $2^x + 2^x = 2^{x+2}(c - 2)$.

7. Má tá $3^x = y$, réitigh an chothromóid $3^{2x} - 12(3^x) + 27 = 0$.

8. Réitigh an chothromóid $2^{2x} - 3(2^x) - 4 = 0$ agus fíoraigh do fhreagra trí ionadú.

9. Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo: (i) $2^{2x} - 9(2^x) + 8 = 0$ (ii) $3^{2x} - 10(3^x) + 9 = 0$

10. Má tá $y = 2^x$, scríobh (i) 2^{2x} (ii) 2^{2x+1} agus (iii) 2^{x+3} i dtéarmaí y.
Uaidh sin réitigh an chothromóid $2^{2x+1} - 2^{x+3} - 2^x + 4 = 0$.

11. Úsáid an t-ionadú $y = 3^x$ chun an dá luach ar x a fháil mar a bhfuil $3.3^x + 3^{-x} = 4$ agus fíoraigh gach réiteach trí ionadú sa chéad chothromóid easpóntantúil.

12. Réitigh an chothromóid $2(4^x) + 4^{-x} = 3$.

13. Réitigh an chothromóid $3^x - 28 + 27(3^{-x}) = 0$.

14. Má tá $2^x = y$, réitigh an chothromóid $2^{x+1} + 2(2^{-x}) - 5 = 0$.

15. Réitigh an chothromóid easpónantúil $3^x + 81(3^{-x}) - 30 = 0$.

Mír 7.8 Feidhmeanna easpónantúla

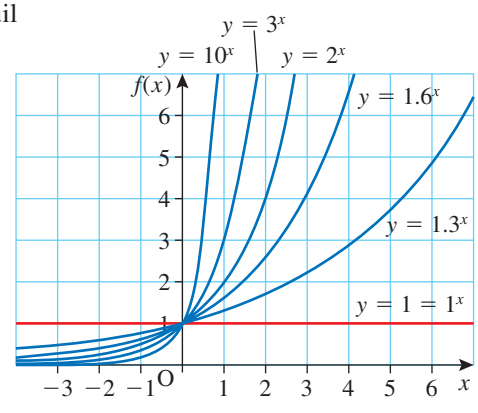
Úsáidtear feidhmeanna easpónantúla ar nós $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ chun rudaí éagsúla a tharlaíonn sa ghnáthshaol a shamhaltú.

Áirítear orthu sin:

(i) fás cille bitheolaíche
(ii) athruithe ar dhaonra, m.sh. fás algaí ar bhodharuisce
(iii) ús iolraithe agus dímheas
(iv) meath radaighníomhach
(v) an ráta ag a gcailleann corp teas (dlí fuaraithe Newton).

TFC: Is féidir staidéar grafach a dhéanamh ar fheidhmeanna san fhoirm $y = a^x$, $a =$ tairiseach. Ná déan dearmad, nuair atá méarchlár in úsáid agat, an cnaipe "^" a úsáid chun cumhacht (easpónant) a ardú, i.e. $y = 2 \wedge x$. Ní mór na lúibíní a úsáid i gceart, i.e. $y = 2 \wedge (2x) = 2^{2x}$.

Tá cruth saintréitheach ar gach graf a ghabhann le feidhmeanna easpónantúla agus is féidir iad a shainaithint go héasca. Ón léaráid seo, feicimid go bhfuil na saintréithe seo a leanas ag graif na foirme $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, nuair atá $a > 0$ agus $a \neq 1$:



1. Ag $x = 0$, $f(0) = a^0 = 1$.
$\Rightarrow$ Pointe ar gach graf is ea $(0, 1)$.

2. Ag $x = 1$, $f(1) = a^1 = a$.
$\Rightarrow$ Pointe ar gach graf is ea $(1, a)$.

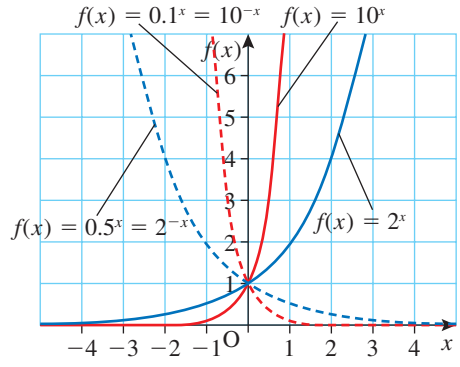
3. Ag $x = -1$, $f(-1) = a^{-1} = \frac{1}{a}$.
$\Rightarrow$ Pointe ar gach graf is ea $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$

4. Sainítear iad do gach luach réadach ar x.

5. Asamtóit chothrománach í an x-ais leis na cuair ar fad $\Rightarrow$ bíonn $f(x) = a^x$ deimhneach i gcónaí.

6. Má tá $\boldsymbol{a > 1}$, méadaíonn na cuair ar fad de réir mar a mhéadaíonn x. De réir mar a mhéadaíonn a, téann ardú na gcuar i ngéire.

7. Má tá $\mathbf{0 < a < 1}$, frithchaitheann an cuar $f(x) = a^x$ sa y-ais, ag cruthú tacar cuar a laghdaíonn go tapa de réir mar a mhéadaíonn x.



Nóta: Má tá $a = \left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-1}$

$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$

Nóta: Is é an ghnáthfhoirmle d'fheidhm easpónantúil mhéadaitheach ná $f(x) = \mathrm{A}a^x$, nuair is é A an luach ag an tús, i.e. nuair atá $x = 0$.

Feidhmeanna easpónantúla $f(x) = \mathrm{A}.a^x$

Feidhmeanna easpónantúla méadaitheacha $a > 1$.

Feidhmeanna easpónantúla laghdaitheacha $0 < a < 1$.

Is é (0, A) idirlíne na y-aise.

Is féidir feidhmeanna laghdaitheacha a scríobh san fhoirm

$$f(x) = \mathrm{A}.a^{-x}$$

Sampla 1

Méadaíonn coilíneacht bhaictéarach faoi dhó gach uair an chloig. Má bhí 10 gcill bhaictéaracha ann ag tús an turgnaimh, (i) comhlánaigh an tábla seo a leanas (ii) tarraing graf den líon baictéar a bheadh ann suas go dtí 5 uair an chloig.

Am in uaireanta	0	1	2	3	4	5
Líon baictéar						

(iii) Cén méadú a thiocfadh ar an daonra sa 6ú huair?

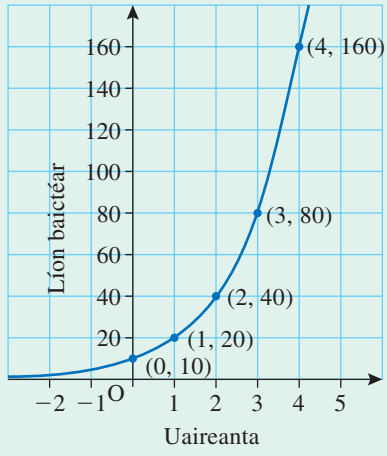
(iv) Cén céatadán d'ardú sa daonra a tharla sa 6ú huair le hais na chéad uaire?

(v) Scríobh slonn do mhéid an daonra (N) tar éis t uair an chloig.

(i)

Am in uaireanta	0	1	2	3	4	5
Líon baictéar	10	20	40	80	160	320

(ii)



(iii) Ag $t = 5$ huaire, tá 320 baictéar ann.
Ag $t = 6$ huaire, tá 640 baictéar ann.
$\Rightarrow$ méadú 320 baictéar.

(iv) Céatadán ardaithe
$= \left(\frac{320}{10}\right) \times \frac{100}{1}\%$
$= 3200\%$

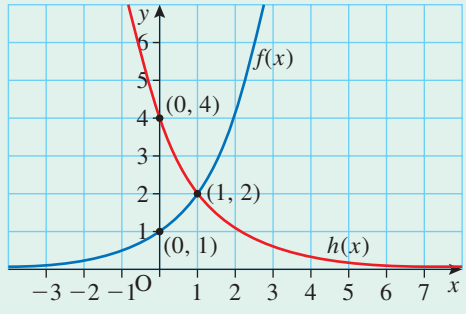
(v) Tar éis t uair, $N = A.a^t$.
Ag $t = 0$, $N = 10 = A.a^0$.
$\Rightarrow 10 = A$.
Ag $t = 1$, $N = 10.a^1 = 20$.
$\Rightarrow a = 2$.
$\therefore \quad N = 10.2^t$.

Sampla 2

Tugtar graif dhá fheidhm easpónantúla, $y = Aa^x$, sa léaráid seo.
Faigh luach A agus luach a do gach graf.

(i) $f(x) = Aa^x$
$f(0) = 1, \therefore Aa^0 = 1 \Rightarrow A = 1.$
$f(1) = 2, \therefore a^1 = 2 \Rightarrow a = 2$
[$\therefore$ Feidhm mhéadaitheach é $f(x)$]
$\therefore f(x) = 2^x$

(ii) $h(x) = Aa^x$
$f(0) = 4, \therefore Aa^0 = 4 \Rightarrow A = 4.$
$f(1) = 2, \therefore 4a^1 = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$
[$\therefore$ Feidhm laghdaitheach é $f(x)$]
$h(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4.2^{-x}$



Le linn creathanna talún, tomhas de dhéine an chreatha é aimplitiúid ghluaiseacht an domhain.

Más é M *méid* an chreatha ar an scala Richter, agus más é *A aimplitiúid* ghluaiseachtaí an domhain, tugtar déine an chreatha talún leis an bhfoirmle easpónantúil $\mathbf{A = 10^M}$, agus is ionann an *fuinneamh* a scaoileann an crith talún dar méid M agus
$\mathbf{E \cong 10^{1.5M + 4.8}}$ giúl.

Sampla 3

Ó tharla go seasann an fhoirmle $A = 10^M$ do dhéine creatha talún, agus go seasann an fhoirmle $E \cong 10^{1.5M + 4.8}$, don fhuinneamh a scaoiltear le linn creatha, nuair is é A an aimplitiúid agus M an méid ar an scála Richter, déan comparáid idir
(i) déine (ii) fuinneamh dhá chrith talún, dar méid 6.1 agus 4.7 faoi seach ar an scála Richter.

(i) $M_1 = 6.1 \Rightarrow A_1 = 10^{6.1}$
$M_2 = 4.7 \Rightarrow A_2 = 10^{4.7}$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{10^{6.1}}{10^{4.7}} = 10^{1.4} \cong 25$$

$A_1 \cong 25A_2$

(ii) $E_1 \cong 10^{1.5M + 4.8} = 10^{1.5 \times 6.1 + 4.8} = 10^{13.95}$
$E_2 \cong 10^{1.5M + 4.8} = 10^{1.5 \times 4.7 + 4.8} = 10^{11.85}$

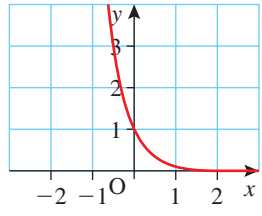
$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{13.95}}{10^{11.85}} = 10^{2.1} \cong 126$$

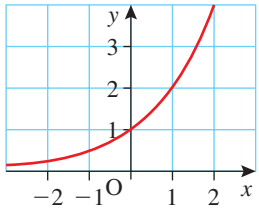
$E_1 \cong 126E_2$

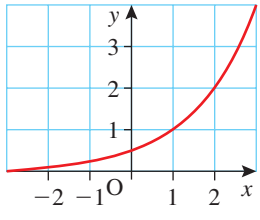
Cleachtadh 7.8

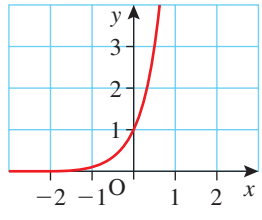
1. Meaitseáil gach ceann de na feidhmeanna easpónantúla seo le ceann de na graif.

(i) $y = 2^x$
(ii) $y = (0.1)^x$
(iii) $y = 10^x$
(iv) $y = (0.5)2^x$

A


B


C


D


2. Tugann feithideolaí atá i mbun monatóireachta ar phlá dreoilíní teaspaigh faoi deara go dtugtar achar an cheantair ina bhfuil na dreoilíní teaspaigh mar $A(n) = 1000 \times 2^{0.2n}$ heicteár, nuair is é n an líon seachtainí ó cuireadh tús leis an mbreathnóireacht. Faigh

(i) an t-achar ina raibh na dreoilíní teaspaigh ar dtús
(ii) an t-achar ina bhfuil na dreoilíní teaspaigh tar éis (a) 10 seachtaine (b) 12 sheachtain.
(iii) Tarraing graf de $A(n)$ in aghaidh n do $0 \leq n \leq 10$.
(iv) Ón ngraf, nó ar bhealach eile, ríomh an t-am a thógann sé ar an gcoilíneacht dúbailt.

3. Abair an bhfuil na graif seo a leanas ag méadú nó ag laghdú.

(i) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (ii) $y = (0.8)^x$ (iii) $y = 4 \times 2^x$ (iv) $y = 3 \times 4^{-x}$

4. Céard í an y-idirlíne do gach ceann de na cuair seo a leanas?

(i) $y = (0.6)2^x$ (ii) $y = 3.2^{-x}$ (iii) $y = 8.2^x$ (iv) $y = 6.4^{-x}$

5. Do gach ceann díobh seo a leanas, úsáid tacar amháin aiseanna chun na graif ($-2 \leq x \leq 4$) a sceitseáil.

(i) $y = 2^x$ agus $y = 3^x$ (ii) $y = 2^{-x}$ agus $y = 3^{-x}$ (iii) $y = 3.2^x$ agus $y = 2.3^{-x}$

(iv) Cé na luachanna ar x a bhfuil $2^x > 3^x$?

(v) Cé na luachanna ar x a bhfuil $2^x < 3^x$?

(vi) Cén luach/cé na luachanna ar x a bhfuil $2^x = 3^x$?

(vii) Cé na luachanna ar x a bhfuil $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

6. Is é an líon laethanta, D, a fhanann iógart úr, má stóráiltear é ag an teocht T °C, ná

$$D = 18(0.72)^T.$$

(i) An sampla d'fhás nó de mheath easpónantúil é seo? Mínigh do fhreagra.

(ii) Cé mhéad lá a bhfanfaidh an t-iógart úr má stóráiltear é ag
(a) 5°C (b) 2°C (c) 0°C ?

(iii) Meas an teocht a theastaíonn chun an t-iógart a choinneáil úr ar feadh 5 lá ar a laghad.

7. Meathann Carbón 14, dúil radaighníomhach carbóin, de réir na foirmle $P = 100(0.99988)^n$, nuair is é P an céatadán de bhunmhais an Charbóin 14 atá ann fós tar éis n bliain.

(a) Faigh céatadán an Charbóin 14 a bheadh ann fós tar éis (i) 200 bliain (ii) 500 bliain.

(b) Meas (trí thriail is earráid) an fad a thógfadh sé ar an sampla Charbón 14 meath go leath a bhunmhaise. Bíodh do fhreagra ceart go dtí na 10 mbliana is gaire.

(c) I bportach i gContae Uíbh Fhailí, thángthas ar chnámh ina raibh 79% dá bhun-Charbón 14. Meas a aois.

8. Tugann taighdeoir eolaíochta atá i mbun monatóireachta ar phlá muiscítí faoi deara go dtugtar achar an cheantair ina bhfuil na muiscítí mar $A(n) = 1000 \times 2^{0.2n}$ heicteár, nuair is é n an líon seachtainí ó cuireadh tús leis an mbreathnóireacht.

(i) Faigh an t-achar ina raibh na muiscítí ar dtús.

(ii) Faigh an t-achar ina bhfuil na muiscítí tar éis (a) 5 seachtaine (b) 10 seachtaine (c) 12 sheachtain

(iii) Úsáid na freagraí ar (i) agus (ii) chun graf $A(n)$ in aghaidh n a tharraingt.

9. Tugtar ráta cuisle reathaí, $P(t)$, t nóiméad i ndiaidh dó críochnú lena thraenáil, mar

$$P(t) = 90 \times 3^{-0.25t} + 50.$$

(i) Sceitseáil graf $P(t)$ ag úsáid na luachanna $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ nóiméad.

(ii) Faigh an ráta cuisle díreach i ndiaidh na traenála.

(iii) Cá fhad a thóg sé ar a chuisle titim go
(a) 70 buille in aghaidh an nóiméid (b) 55 buille in aghaidh an nóiméid?

(iv) Céard é gnáthráta cuisle an reathaí? Mínigh do fhreagra.

10. Tugtar an fuinneamh a scaoileann crith talún mar $E \cong 10^{1.5M + 4.8}$ uair is é A an aimplitiúid agus M an méid ar an scála Richter. Cé chomh mór is atá an fuinneamh a scaoileann crith talún dar méid 7 le hais an fhuinnimh a scaoileann crith talún dar méid 5?

11. Infheistíonn Clíona €5000 i gcuntas téarma sheasta a íocann ús iolraithe 0.55% sa mhí. Más é €A an tsuim airgid tar éis t mí, faigh an tsuim tar éis

(i) 1 mhí amháin (ii) 2 mhí (iii) 3 mhí (iv) t mí.

12. I dturgnamh a bhain le daonra cuileog, bunaíodh an tsamhail $P(t) = 40b^t$ don daonra $P(t)$ tar éis t lá ó thús an turgnaimh, $t \geq 0$.

(i) Cé mhéad cuileog a bhí ann ar dtús?
(ii) I ndiaidh lá amháin bhí 48 cuileog ann. Faigh luach b agus faigh míniú air.
(iii) Sceitseáil graf $P(t)$ in aghaidh t do $0 \leq t \leq 5$.

Mír 7.9 Feidhmeanna logartamacha

Feidhm é an **logartam** a dhíríonn ar shéan (nó easpónant) uimhreach.

Má tá $y = 2^5$, is féidir $y = 32$ a ríomh go héasca.
Ach má tá $200 = 2^x$, níl sé chomh héasca céanna an séan x a fháil a bhfuil 200 mar thoradh air.
Chun x a fháil, úsáidimid logartaim (nó **log** go gairid).

Cuimhnigh ar an toradh $32 = 2^5$; má úsáidtear nodaireacht logartaim tá $\mathbf{\log_2 32 = 5}$.
Léitear seo mar "log 32 ar bhonn 2, cothrom le 5",
i.e., **is é 5 an séan (an chumhacht)** a gcaithfear an bhonnuimhir 2 a ardú ann chun 32 a fháil.

Ar an gcaoi chéanna, is féidir $10^2 = 100$ a athscríobh ag úsáid logartam mar $\log_{10} 100 = 2$
(log 100 ar bhonn 10, cothrom le 2),
i.e., **is é 2 an séan (an chumhacht)** a gcaithfear an bhonnuimhir 10 a ardú ann chun 100 a fháil.

Dá bhrí sin, tá na cothromóidí $2^3 = 8$ agus $\log_2 8 = 3$ **comhionann agus in-idirmhalartaithe**.

Foirm an tséin	Foirm an logartaim
$32 = 2^5$	$\log_2 32 = 5$
$100 = 10^2$	$\log_{10} 100 = 2$
$200 = 2^x$	$\log_2 200 = x$

Is é **logartam** uimhreach an **chumhacht** a gcaithfear an bhonnuimhir a ardú inti chun an uimhir sin a fháil.

Tá $\boldsymbol{a^x = y}$ coibhéiseach le $\mathbf{\log_a y = x}$

Ón sainmhíniú seo ar logartam, is léir go bhfuil

(i) $\log_5 25 = 2$ (ii) $\log_3 27 = 3$ (iii) $\log_2 16 = 4$ (iv) $\log_3 81 = 4$,

i.e. cén chumhacht a gcaithfear 5 a ardú inti, chun 25 a fháil …? Freagra = 2 … etc.

Mura slánuimhir an logartam nó an bonn, lean ar aghaidh mar seo a leanas.

Sampla 1

Faigh luach (i) $\log_9 27$ (ii) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ (iii) $\log_{\sqrt{2}} 8$.

(i) Bíodh $\log_9 27 = x$.

$$\Rightarrow 9^x = 27$$
$$\Rightarrow (3^2)^x = 3^3$$
$$\Rightarrow 2x = 3$$
$$\Rightarrow x = \tfrac{3}{2}$$

(ii) Bíodh $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$.

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{3}\right)^x = 9$$
$$\Rightarrow (3^{-1})^x = 3^2$$
$$\Rightarrow -x = 2$$
$$\Rightarrow x = -2$$

(iii) Bíodh $\log_{\sqrt{2}} 8 = x$.

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^x = 8$$
$$\Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^3$$
$$\Rightarrow \frac{x}{2} = 3$$
$$\Rightarrow x = 6$$

1. Dlíthe na logartam

Nuair a shloinntear dlíthe na séan i bhfoirm logartaim, táirgimid dlíthe na logartam atá thar a bheith tábhachtach.

Ligeann na dlíthe seo dúinn go leor cothromóidí casta a réiteach.

Dlíthe na Logartam

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^n = n\log_a x$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Úsáid d'áireamhán chun gach ceann díobh seo a leanas a fhíorú.

1. $\log_{10}4 + \log_{10}3 = \log_{10}12 = 1.0792$
2. $\log_{10}8 - \log_{10}6 = \log_{10}\left(\frac{8}{6}\right) = 0.1249$
3. $\log_{10}8^3 = 3\log_{10}8 = 2.7093$
4. $\log_{10}10 = 1$
5. $\log_{10}1 = 0$

Tá dlíthe na logartam infheidhmithe ar aon bhonn, ach is iad an bonn 10 agus an bonn e (2.718) na boinn is mó a úsáidtear i logartaim.

Úsáidtear logartaim bhonn 10, m.sh. $\mathbf{\log_{10} 1000}$, chun críche ríomha agus glaoitear **logartaim chomónta** orthu.

Úsáidtear bonn e (= 2.718), m.sh. $\mathbf{\log_e 1000}$, nuair atáthar ag plé le himeachtaí nádúrtha, m.sh. creathanna talún, fás coilíneachtaí, srl., agus dá bhrí sin glaoitear **logartaim nádúrtha** orthu agus scríobhtar iad mar $\mathbf{\log_e x = \ln x}$.

Sampla 2

Gan áireamhán a úsáid, simpligh an uimhir seo a leanas:

$$2\log_{10}3 + \log_{10}16 - 2\log_{10}\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}
2\log_{10}3 + \log_{10}16 - 2\log_{10}\left(\frac{6}{5}\right) &= \log_{10}3^2 + \log_{10}16 - \log_{10}\left(\frac{6}{5}\right)^2 \\
&= \log_{10}(3^2 \times 16) - \log_{10}\left(\frac{36}{25}\right) \\
&= \log_{10}\frac{9 \times 16}{\left(\frac{36}{25}\right)} \\
&= \log_{10}100 = 2
\end{aligned}$$

Sampla 3

Gan áireamhán a úsáid, simpligh an uimhir seo a leanas:

$$\log_2 128 + \log_3 45 - \log_3 5$$

$$\log_2 128 + \log_3 45 - \log_3 5 = \log_2 128 + \log_3\left(\frac{45}{5}\right) = \log_2 128 + \log_3 9$$

(Ó tharla go bhfuil na boinn difriúil, ní féidir na logartaim seo a shuimiú!)

Bíodh $\log_2 128 = x \Rightarrow 128 = 2^x$, $2^7 = 2^x$, $7 = x$

chomh maith leis sin, bíodh $\log_3 9 = y \Rightarrow 9 = 3^y$, $3^2 = 3^y$, $2 = y$

$$\therefore \quad \log_2 128 + \log_3 9 = 7 + 2 = 9$$

Sampla 4

Faigh luach na huimhreach seo a leanas ceart go dtí dhá fhigiúr bhunúsacha:

$$\log_8 11 - \log_6 4$$

$$\log_8 11 = \frac{\log_{10}11}{\log_{10}8} \quad \ldots \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$= \frac{1.041}{0.903} = 1.153$$

also, $\log_6 4 = \dfrac{\log_{10}4}{\log_{10}6}$

$$= \frac{0.602}{0.778} = 0.774$$

$$\therefore \quad \log_8 11 - \log_6 4 = 1.153 - 0.774 = 0.38$$

Nóta: I gcás gach boinn,

(i) má tá $\log_e(e)^k = x$ chomh maith leis sin (ii) má tá $a^{(\log_a n)} = x$

$\Rightarrow k \log_e(e) = x$

ach $\log_e(e) = 1$

$\Rightarrow k = x$

Is é log uimhreach ar a bonn féin ná 1.

$\Rightarrow \log_a a^{(\log_a n)} = \log_a x$ … ag tógáil log an dá thaobh.

$\therefore \log_a n . \log_a a = \log_a x$

$\therefore \log_a n . 1 = \log_a x$

$\Rightarrow n = x$

Más slánuimhir dheimhneach é e, tá $e \geq 2$, $k > 0$ (i) $\log_e(e)^k = k$ agus (ii) $e^{(\log_e k)} = k$

2. Cothromóidí logartamacha a réiteach

- Nuair atá cothromóidí logartamacha á réiteach, seiceáil i gcónaí go bhfuil an bonn céanna ag gach téarma. Mura bhfuil, caithfear *an riail i dtaobh bonn a athrú* a úsáid ar dtús chun iad a athrú go bonn comónta.
- Mura dtugtar bonn, bíonn an chothromóid fíor do gach bonn.
- Má tá $\log_a b = \log_a c$, tá $b = c$.
- Má tá $\log_a b = k$, tá $b = a^k$.
- Seiceáil na réitigh uile chun a chinntiú nach gcruthaíonn siad logartaim uimhreacha diúltacha mar nach sainítear iad sin. (Féach ar leathanach 257.)

Sampla 5

Réitigh an chothromóid $2\log_3 x - \log_3(18 - x) = 1$.

$2\log_3 x - \log_3(18 - x) = 1$

$\Rightarrow \log_3 x^2 - \log_3(18 - x) = 1$

$\Rightarrow \log_3\left(\frac{x^2}{18 - x}\right) = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{18 - x}\right) = 3^1 = 3$

$\Rightarrow x^2 = 54 - 3x$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 54 = 0$

$\Rightarrow (x - 6)(x + 9) = 0$

$\Rightarrow x = 6$ nó $x = -9$.

Má tá $x = -9$, athraíonn an chothromóid go

$2\log_3(-9) - \log_3(18 + 9) = 1$.

Ó tharla go bhfuil $\log_3$ (-9) neamhshainithe, diúltaítear do $x = -9$ mar fhreagra.

$\Rightarrow x = 6$.

Sampla 6

Réitigh an chothromóid $\log_3 x + 3\log_x 3 = 4$.

Tá logartaim a bhfuil boinn dhifriúla acu sa chothromóid seo.
Dá bhrí sin, caithfimid bonn 3 a athrú go bonn x (nó a mhalairt).

$\log_3 x = \dfrac{\log_x x}{\log_x 3} = \dfrac{1}{\log_x 3}$ mar go bhfuil $\log_x x = 1$

$\therefore \quad \log_3 x + 3\log_x 3 = 4 \quad \Rightarrow \dfrac{1}{\log_x 3} + 3\log_x 3 = 4$

Ag úsáid an ionadaithe $\log_x 3 = y$,

$$\frac{1}{y} + 3y = 4$$
$$\Rightarrow 1 + 3y^2 = 4y$$
$$3y^2 - 4y + 1 = 0$$
$$(3y - 1)(y - 1) = 0$$
$$\therefore \quad y = 1 \text{ nó } y = \tfrac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \log_x 3 = 1 \Rightarrow 3 = x^1$$
$$\Rightarrow 3 = x$$
$$\text{nó } \log_x 3 = \tfrac{1}{3} \Rightarrow 3 = x^{\frac{1}{3}}$$
$$\Rightarrow 3^3 = x$$
$$\Rightarrow 27 = x$$

$\therefore \quad x = 3$ nó 27 (tugann an dá réiteach logartaim dheimhneacha agus tá an dá cheann inghlactha mar sin).

(**Nóta:** Is féidir an toradh seo a fhíorú ach an gnáthamh a dhéanamh arís leis an mbonn 3 in áit an bhoinn x: $\log_x 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 x} = \dfrac{1}{\log_3 x}$).

Cleachtadh 7.9

1. Scríobh síos luach gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\log_2 4$ (ii) $\log_3 81$ (iii) $\log_{10} 1000$ (iv) $\log_2 64$

2. Faigh luach gach ceann díobh seo a leanas:

(i) $\log_8 16$ (ii) $\log_9 27$ (iii) $\log_{16} 32$ (iv) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ (v) $\log_{\frac{1}{3}} 81$

3. Athraigh gach ceann díobh seo a leanas go foirm an tséin agus réitigh do x.

(i) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ (ii) $\log_{\sqrt{2}} 4 = x$ (iii) $\log_8 x = 2$ (iv) $\log_{64} x = \frac{1}{2}$

4. Réitigh gach ceann de na cothromóidí seo a leanas:

(i) $\log_2 x = -1$ (ii) $\log_3 \sqrt{27} = x$ (iii) $\log_x 2 = 2$ (iv) $\log_2(0.5) = x$

5. Simpligh gach ceann díobh seo a leanas, ag sloinneadh do fhreagraí gan logartaim.

(i) $\log_4 2 + \log_4 32$ (ii) $\log_6 9 + \log_6 8 - \log_6 2$ (iii) $\log_6 4 + 2\log_6 3$

6. Scríobh gach ceann díobh seo a leanas san fhoirm $\log_a x$ agus ansin simpligh:

(i) $\log_3 2 + 2\log_3 3 - \log_3 18$ (ii) $\log_8 72 - \log_8\left(\dfrac{9}{8}\right)$

7. Má tá $\log_3 5 = a$, faigh i dtéarmaí a,

(i) $\log_3 15$ (ii) $\log_3\left(\frac{5}{3}\right)$ (iii) $\log_3\left(8\frac{1}{3}\right)$ (iv) $\log_3\left(\frac{25}{27}\right)$ (v) $\log_3 75$.

8. Úsáid logartaim chomónta (i.e. logartaim ar bhonn 10) chun luach x a fháil i ngach ceann díobh seo a leanas, ceart go dtí trí fhigiúr bhunúsacha:

(i) $200 = 2^x$ (ii) $5^x = 500$ (iii) $3^{x+1} = 25$ (iv) $5^{2x+3} = 51$

9. Bíodh $y = 2^{x-1} + 3$.

(i) Sloinn x i dtéarmaí y trí logartaim chomónta a úsáid.

(ii) Uaidh sin faigh, ceart go dtí 4 ionad dheachúlacha, luach x mar a bhfuil $y = 8$.

10. Má tá $\log_{10} x = 1 + a$ agus $\log_{10} y = 1 - a$, taispeáin go bhfuil $xy = 100$.

11. Má tá $p = \log_a\left(\frac{21}{4}\right)$, $q = \log_a\left(\frac{7}{3}\right)$ agus $r = \log_a\left(\frac{7}{2}\right)$, taispeáin go bhfuil $p + q = 2r$.

12. Má tá $\log_a x = 4$ agus $\log_a y = 5$, faigh luachanna beachta:

(i) $\log_a x^2 y$ (ii) $\log_a axy$ (iii) $\log_a \frac{\sqrt{x}}{y}$

13. Úsáid an dlí i dtaobh bonn a athrú chun a thaispeáint go bhfuil $\log_{25} x = \frac{1}{2}\log_5 x$.

14. Úsáid áireamhán chun luach gach ceann de na logartaim seo a leanas a fháil ceart go dtí trí fhigiúr bhunúsacha:

(i) $\log_{10} 4$ (ii) $\log_{10} 27$ (iii) $\log_{10} 356$ (iv) $\log_{10} 5600$

(v) $\log_{10} 29\,000$ (vi) $\log_{10} 350\,000$ (vii) $\log_{10} 3\,870\,000$.

15. Má tá $\log_{10} x = 3.123$, bain úsáid as torthaí Cheist 14 chun uasluach agus íosluach x a fháil gan d'áireamhán a úsáid.

16. Coinbhéartaigh go dtí bonn 10 agus faigh, ceart go dtí trí fhigiúr bhunúsacha, luach $\log_3 15 - \log_2 5$.

17. Úsáid an riail i dtaobh bonn a athrú chun luach (i) $\log_{27} 81$ (ii) $\log_{32} 8$ a fháil.

18. Taispeáin go bhfuil $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

19. Má tá $x > 0$ agus $x \neq 1$, taispeáin go bhfuil $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_5 x} = \dfrac{1}{\log_{30} x}$.

20. Má tá $\log_r p = \log_r 2 + 3\log_r q$, úsáid dlíthe na logartam chun p a shloinneadh i dtéarmaí q.

21. Má tá $\log_3 a + \log_9 a = \frac{3}{4}$, $a > 0$, faigh luach beacht a.

22. Faigh luach $3\ln 41.5 - \ln 250$, ceart go dtí trí fhigiúr bhunúsacha.

Réitigh na cothromóidí logartamacha seo a leanas:

23. $\log_2(x - 2) + \log_2 x = 3$

24. $\log_{10}(x^2 + 6) - \log_{10}(x^2 - 1) = 1$

25. $\log 2x - \log(x - 7) = \log 3$

26. $\log(2x + 3) + \log(x - 2) = 2\log x$

27. $\log_{10}(17 - 3x) + \log_{10} x = 1$

28. $\log_{10}(x^2 - 4x - 11) = 0.$

29. Má tá $2\log_2 x = y$ agus $\log_2(2x) = y + 4$, faigh luach x.

30. Má tá $\log_6 x = \log_6 y = 1$, $x, y > 0$, taispeáin go bhfuil $x = \dfrac{6}{y}$.

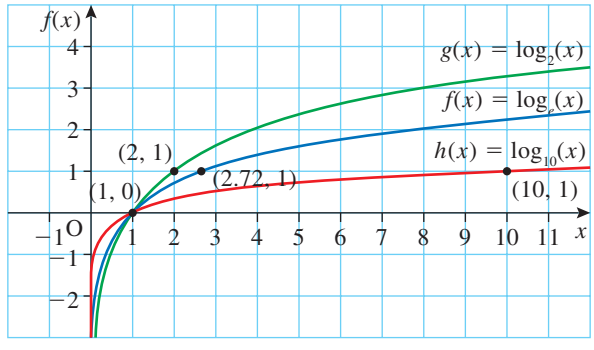
Uaidh sin réitigh na comhchothromóidí $\log_6 x + \log_6 y = 1$
$5x + y = 17.$

31. Úsáid an riail i dtaobh bonn a athrú chun na cothromóidí seo a leanas a réiteach:

(i) $4\log_x 2 - \log_2 x - 3 = 0$ (ii) $2\log_4 x + 1 = \log_x 4.$

Mír 7.10 Graf $y = \log_a(x)$

Úsáidtear bogearraí ríomhaireachta chun graif $\log_{10}(x)$, $\log_e(x)$ [i.e. $\ln(x)$] agus $\log_2(x)$ a tharraingt san fhearann $0 \le x \le 10$.
Tar éis na graif a chur i gcomparáid le chéile, bainimid de thátal astu go bhfuil na hairí seo a leanas ag $y = \log_a(x)$:

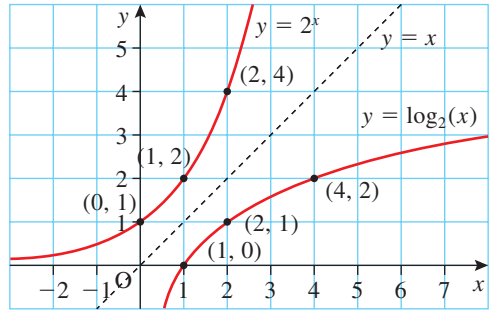


1. $\log_{(\text{aon bhonn ar bith})} 1 = 0.$
2. $\log_2 2 = \log_e e = \log_{10} 10 = 1.$
3. Tá gach graf d'fheidhmeanna logartaim ag méadú.
4. Sainítear $y = \log_a(x)$ do $\boldsymbol{x > 0}$ **amháin**.
5. Ní shainítear $y = \log_a(0)$.
6. Asamtóit ingearach do gach cuar í an y-ais.

Ag cur $\log_a(x)$ i gcomparáid le $y = a^x$

Má deirimid go bhfuil $a = 2$; ag cur $y = 2^x$ i gcomparáid le $y = \log_2(x)$, gheobhaimid

x	$y = 2^x$	x	$y = \log_2 x$
0	$y = 2^0 = 1$	1	$y = \log_2 1 = 0$
1	$y = 2^1 = 2$	2	$y = \log_2 2 = 1$
2	$y = 2^2 = 4$	4	$y = \log_2 4 = 2$
3	$y = 2^3 = 8$	8	$y = \log_2 8 = 3$
4	$y = 2^4 = 16$	16	$y = \log_2 16 = 4$



Tá na pointí (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8), (4, 16), … ar an gcuar $y = 2^x$.
Tá na pointí (1, 0), (2, 1), (4, 2), (8, 3), (16, 4), … ar an gcuar $y = \log_2(x)$.

$\therefore$ is é $y = \log_2(x)$ feidhm inbhéartach $y = 2^x$.

Chomh maith leis sin, is é $y = \log_{10} x$ feidhm inbhéartach $y = 10^x$.

Frithchaitear graif $y = 2^x$ agus $y = \log_2(x)$ sa líne $x = y$.

Cleachtadh 7.10

1. Úsáid an t-eolas atá agat faoi shéana chun airí 1, 2 agus 5 ar an leathanach roimhe seo a mhíniú.

2. Úsáid áireamhán grafaice nó bogearraí ríomhaire chun $y = 10^x$ agus $y = \log_{10} x$ a bhreacadh ar na haiseanna céanna agus faigh ais na siméadrachta.
Ó do ghraf, meas, ceart go dtí ionad amháin deachúlach, luach $y = 10^{1.5}$ tríd an scála ar an y-ais a mhéadú.

3. Cuimhnigh ar an bhfeidhm $y = \log_3 x$.

(i) Comhlánaigh an tábla seo a leanas.

x	$\frac{1}{9}$		1	3	
$y = \log_3 x$		-1			2

(ii) Úsáid na luachanna sa tábla seo chun graf $y = \log_3 x$ a sceitseáil.
(iii) Meas luach $\log_3 2.5$ ó do ghraf.
(iv) Úsáid an riail i dtaobh bonn a athrú, $\log_3 x = \dfrac{\log_{10} x}{\log_{10} 3}$, chun luach $y = \log_3 2.5$ a fháil.

4. Ar na haiseanna céanna, sceitseáil graif

(i) $y = 5^x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ (ii) $y = \log_5 x$, $0 \leqslant x \leqslant 25$
(iii) Céard é an gaol idir an dá ghraf?

5. Ar na haiseanna céanna, sceitseáil graif

(i) $y = \log_2 x$ at $x = 1, 2, 4, 8$.
(ii) $y = \log_2 2x$ ag $x = 1, 2, 4, 8$.
(iii) $y = \log_2(x - 2)$ ag $x = 3, 4, 10$.

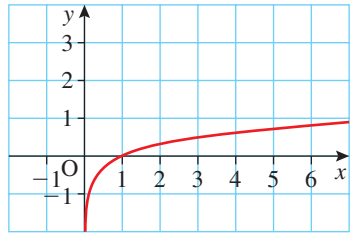
6. Ar na haiseanna céanna, sceitseáil graif $y = \log_{10} x$, $y = \log_{10} \frac{x}{2}$ agus $y = \log_{10}(x + 2)$.

7. Má tá $y = 3^{x+2} - 5$,

(i) sloinn x i dtéarmaí y trí logartaim chomónta a úsáid.
(ii) Má tá $y = 30$, faigh luach x ceart go dtí 3 ionad dheachúlacha.

8. Cóipeáil graf na feidhme $y = \log_{10} x$ ar dheis i do chóipleabhar (nó úsáid ríomhaire) agus úsáid é chun sceitsí garbha a tharraingt de na feidhmeanna seo a leanas:

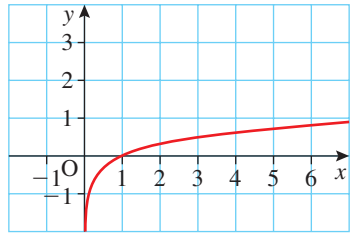
(i) $y = \log_{10} x + 2$ (ii) $y = \log_{10}(x + 2)$
(iii) $y = \log_{10} x - 2$ (iv) $y = 2\log_{10} x$
(v) $y = -\log_{10} x$



9. Cóipeáil graf na feidhme $y = \log_{10}x$ ar dheis i do chóipleabhar agus úsáid é chun sceitsí garbha a tharraingt de na feidhmeanna seo a leanas:

(i) $y = \log_{10}(2x)$

(ii) $y = \log_{10}\left(\frac{x}{2}\right)$



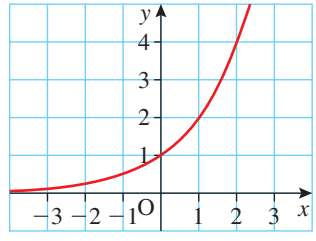
10. Cóipeáil graf na feidhme $y = 2^x$ ar dheis i do chóipleabhar agus úsáid é chun sceitsí garbha a tharraingt de na feidhmeanna seo a leanas:

(i) $y = 2^x + 1$

(ii) $y = 1 - 2^x$

(iii) $y = 2^{x+1}$

(iv) $y = \left(\frac{1}{2}\right).2^x$



Mír 7.11 Fadhbréiteach le feidhmeanna easpónantúla agus logartamacha

Mar a dúradh cheana, úsáidtear feidhmeanna easpónantúla agus logartamacha chun réimse mór fadhbanna a shamhaltú. Tá treise fuaimeanna, aigéadacht tuaslagáin agus déine creatha talún ar an scála Richter i measc an iliomad samplaí dá gcur i bhfeidhm.

Sampla 1

Cinntear aigéadacht substainte le foirmle tiúchan iain $pH = -\log[H^+]$, mar a shainítear pH 7 mar neodrach, <7 mar aigéadach agus >7 mar alcaileach.
Cinn aigéadacht na substaintí seo a leanas.

(a) Sú úill a bhfuil tiúchan iain $[H^+]$ de 0.0003 aige.

(b) Amóinia a bhfuil tiúchan iain $[H^+]$ de 1.3×10^{-9} aige.

(a) $[H^+] = 0.0003 \Rightarrow pH = -\log[H^+]$
$= -\log[0.0003]$
$= 3.52 \quad \therefore$ tá an sú úill aigéadach

(b) $[H^+] = 1.3 \times 10^{-9} \Rightarrow pH = -\log[H^+]$
$= -\log[1.3 \times 10^{-9}]$
$= 8.87 \quad \therefore$ tá an tuaslagán amóinia alcaileach

Sampla 2

Tugtar treise fuaime a bhfuil déine I aici leis an bhfoirmle $\text{dB} = 10\log\left(\frac{I}{I_o}\right)$, áit a dtomhaistear dB ina dheicibeilí agus áit arb é I_o tairiseach déine na héisteachta ($I_o = 1 \times 10^{-12}\,\text{Wm}^{-2}$).

(a) Faigh treise (ina deicibeilí) fuaime ag tairseach na héisteachta.

(b) Más féidir le nochtadh fada d'fhuaimeanna thar 85 deicibeil dochar a dhéanamh don éisteacht, agus má tá déine $I = 2.5 \times 10^{13}\, I_o$ ag urchar gunna raidhfil .22, ar cheart duit cluaschosaint a chaitheamh agus an gunna seo in úsáid agat?

(a) Tairiseach na héisteachta $= 1 \times 10^{-12}\,\text{Wm}^{-2}$

$$\text{dB} = 10\log\left(\frac{I}{I_o}\right) = 10\log\left(\frac{1 \times 10^{-12}}{1 \times 10^{-12}}\right) = 10\log 1 = 0\,\text{dB},$$ i.e. níl treise fuaime i gceist.

(b) $I = 2.5 \times 10^{13}\, I_o$

$$\text{dB} = 10\log\left(\frac{I}{I_o}\right) = 10\log\frac{2.5 \times 10^{13}\, I_o}{I_o} = 10\log 2.5 \times 10^{13} = 134\,\text{dB}.$$

Ba cheart duit cluaschosaint a chaitheamh mar go bhfuil an treise fuaime i bhfad níos airde ná 85 dB.

Ús iolraithe (luach méadaitheach)

Tugtar luach cumaisc, €A, suim airgid, €P, a infheistítear ag ráta úis iolraithe $i\%$ ar feadh t bliain, leis an bhfoirmle $A = P(1 + i)^t$. Go minic, caithfear an t-am, t (an séan), a thógfaidh sé ar infheistíocht shonrach teacht in aibíocht, a ríomh. Is féidir é seo a dhéanamh le logartaim mar seo a leanas:

Má tá $A = P(1 + i)^t$,

$\Rightarrow \quad \frac{A}{P} = (1 + i)^t$ … ag roinnt an dá thaobh ar P

$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{A}{P}\right) = \ln(1 + i)^t$ … ag tógáil log nádúrtha an dá thaobh

$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{A}{P}\right) = t.\ln(1 + i)$ … $\ln B^n = n.\ln B$

$$\Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{A}{P}\right)}{\ln(1 + i)} = t.$$

Sampla 3

Cá fhad a thógfadh sé ar €5000 méadú go €6000, dá n-infheisteofaí é i gcomhar creidmheasa ag ráta úis iolraithe 2% sa bhliain?

Ó tharla go bhfuil $A = P(1 + i)^t$, nuair a infheistítear €P ar feadh t bliain ag i%,

$A = €6000 \qquad P = €5000 \qquad i = 2\% = 0.02 \qquad \therefore \quad 1 + i = 1.02$

$$\Rightarrow €6000 = €5000(1.02)^t$$

$$\frac{6000}{5000} = (1.02)^t$$

$$1.2 = (1.02)^t$$

$$\ln 1.2 = \ln(1.02)^t$$ … ag tógáil log nádúrtha an dá thaobh

$$\ln 1.2 = t.\ln 1.02$$

$$\frac{\ln 1.2}{\ln 1.02} = t$$

9.21 bliain $= t \cong 9$ mbliana agus 77 lá

Dímheas (luach laghdaitheach)

Má laghdaíonn cainníocht de shuim sheasta thar théarma socraithe (m.sh. in aghaidh na bliana), is féidir an chothromóid chéanna a oiriúnú chun an luach laghdaitheach le himeacht aimsire a rianú.

Athraíonn an daonra reatha P go $P = P_0(1 - i)^t$ nuair ba é P_0 an daonra ag an tús.

Mar shampla, má tá daonra ioraí rua ag laghdú ag ráta 5% in aghaidh na bliana, is é $P = P_0(1 - 0.05)^t = P_0(0.95)^t$ líon na n-ioraí rua tar éis "t" bliain.

Sampla 4

Meastar daonra ioraí rua i réigiún sonrach ag 5000 ag tús 2003. Ag glacadh le ráta laghdaithe 5% sa bhliain, meas méid an daonra in 2013.

Ó tharla go bhfuil $P = P_0(1 - i)^t$ agus $i = 5\% = 0.05$,

agus má thugtar go bhfuil $P_0 = 5000$ agus $t = 10$ mbliana,

$\therefore \quad P = 5000(1 - 0.05)^{10} = 5000(0.95)^{10} = 2994$ iora rua

Am dúbailte

Is é an t-**am dúbailte** an t-am a theastaíonn chun go méadóidh méid nó luach cainníochta faoi dhó. Má tá cainníocht ag fás go heaspónantúil, is féidir an líon (nó luach) ag am t a shloinneadh le $y = A.e^{bt}$, nuair is é A an líon nó luach ag an tús (i.e. $t = 0$) agus is tairiseach fáis é b, a bhaineann go sonrach le horgánach faoi leith.

Má dhúblaíonn an chainníocht seo, tá 2A i láthair.

$\therefore \quad 2A = Ae^{bT}$, nuair is é T an t-am a thógann sé chun 2A a tháirgeadh, i.e. an t-am dúbailte.

$\therefore \quad 2 = e^{bT}$

$\therefore \quad \ln 2 = \ln e^{bT} = bT \ln e = bT$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\ln 2}{b} = T$, an t-am dúbailte.

$\ln x^n = n.\ln x$
agus $\ln e = 1$

Sampla 5

Tá cineál áirithe baictéar ag fás go heaspónantúil, nuair is é $y = A\,e^{bt}$ an líon baictéar atá i láthair tar éis t (uair an chloig) agus is é b an tairiseach fáis. Faoi chúinsí áirithe, dúblaíonn daonra na mbaictéar gach 6.5 uair an chloig. Má tá 100 baictéar i láthair ag tús an turgnaimh faoi na cúinsí sin, faigh (i) an tairiseach fáis b (ii) an méid baictéar a bheidh i láthair tar éis 2 lá.

Ó tharla go bhfuil $y = A\,e^{bt}$, tá $200 = 100e^{6.5b}$ … ó tharla go ndúblaíonn 100 go 200 in 6.5 uair an chloig

$\therefore \quad 2 = e^{6.5b}$

$\therefore \quad \ln 2 = \ln e^{6.5b} = 6.5b \ln e = 6.5b.$

(i) An tairiseach fáis $b = \dfrac{\ln 2}{6.5} = 0.1066$ uair an chloig

(ii) Dhá lá = 48 uair an chloig

An líon i láthair tar éis 48 uair an chloig $= 100\ e^{0.1066 \times 48}$

$= 16\,734$ baictéar.

Cleachtadh 7.11

1. Infheistíonn Áine €5000 i gcuntas téarma sheasta a íocann ús iolraithe 0.6% sa mhí. Faigh

(i) an méid airgid i gcuntas Áine tar éis
(a) 1 mhí amháin (b) 2 mhí (c) 3 mhí

(ii) foirmle don mhéid a bheidh coigilte ag Áine tar éis t mí

(iii) an íostréimhse a gcaithfidh Áine a cuid airgid a infheistiú lena haghaidh má theastaíonn uaithi a cuid airgid a dhúbailt.

2. Cuireann bitheolaí 100 baictéar i dtimpeallacht rialaithe ag tús turgnaimh. Sé huaire níos déanaí, filleann sí agus comhaireann sí 450 baictéar sa choilíneacht. Ag glacadh le fás easpónantúil san fhoirm $y = Ae^{bt}$ nuair is é b an tairiseach fáis, faigh luach ar b, ceart go dhá ionad dheachúlacha.

3. Fágtar bainne do leanbh, a téadh go 45°C, ar leataobh go bhfuaróidh sé. Tugtar teocht T°C an bhainne, tar éis t nóiméad ag fuarú, leis an riail $T = 15 + 30 \times 10^{-0.02t}$.

(i) Fíoraigh gurb é 45˚C an teocht ag an tús.
(ii) Má tá an bainne le tabhairt don leanbh nuair a bheidh sé fuaraithe go 35˚C, faigh amach cá fhad a thógfaidh sé air fuarú go dtí an teocht seo.
(iii) Úsáid an riail seo chun teocht an tseomra a fháil, agus mínigh do fhreagra.

4. Tugtar treise L (tomhaiste i dB) fuaime leis an bhfoirmle $L = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_o}\right)$ nuair is é I_o tairseach na héisteachta ($1 \times 10^{-12}\text{Wm}^{-2}$) agus is é I déine na fuaime.

(i) Má tá réimse treise idir 100 agus 110 dB ag toirneach, céard é an réimse comhfhreagrach déine i Wm^{-2}?
(ii) Glactar leis gurb é 10 Wm^{-2} tairiseach na péine. Faigh i dB treise fuaime a thosaíonn ag cur pian ar dhuine.

Vatanna in aghaidh
$\text{m}^2 = \text{Wm}^{-2}$

5. Tugtar aimplitiúid creatha talún mar $A = 10^M$, nuair is é M méid an chreatha ar an scála Richter. Is é an fuinneamh a scaoileann an crith talún $E \cong 10^{1.5M+4.8}$ giúl. Úsáid rialacha logartam chun a agus b a fháil mar a bhfuil $E = 10^{ab}$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

6. Tomhaiseann an praghasinnéacs tomhaltóirí (CPI) costas earraí agus seirbhísí ar bhonn bliantúil. Ag glacadh leis go raibh luach €100 ar thráchtearra in 2000, agus go bhfuil an CPI ag ardú go heaspónantúil ag 4.5% ón mbliain sin i leith, faigh

(i) luach an tráchtearra sin in €, t bliain tar éis 2000
(ii) costas tuartha an tráchtearra sin in 2010.
(iii) Ag úsáid an ráta chéanna thuartha méadaithe, cén luach a bhí ar an tráchtearra sin i 1995?

7. Le linn na luathchéimeanna forbartha, tugtar meáchan W kg mamaigh áirithe, t mí tar éis a bhreithe, leis an bhfoirmle $W = 0.6 \times 1.15^t$.

(i) Cén meáchan a bhí sa mhamach nuair a rugadh é?
(ii) Luaigh an tairiseach fáis in aghaidh na bliana mar chéatadán.
(iii) Cá fhad a thógann sé ar an mamach seo a mheáchan a dhúbailt?

8. Tugtar meath Polóiniam-210, substaint radaighníomhach, leis an bhfoirmle

$M = M_0 e^{-kt}$, nuair is é M_0 an mhais ag an tús,
nuair is é M an mhais tar éis t lá,
nuair is tairiseach meatha é k a bhaineann go sonrach le Polóiniam.

Má tá M = 10 g nuair atá $t = 0$, agus má tá M = 5 g nuair atá $t = 140$ lá, faigh

(i) luach M_0 agus k
(ii) mais an Pholóiniam tar éis 70 lá
(iii) an líon laethanta go dtí nach mbeidh ach 2 g Polóiniam fanta.

Mír 7.12 Cruthúnas trí ionduchtú

Cruthaítear go leor teoirimí sa mhatamaitic a bheith fíor trí ionduchtú matamaiticiúil.

Chun a chruthú go bhfuil ráiteas fíor trí ionduchtú, leanaimid céimeanna a shainítear go soiléir.

(i) Tá an ráiteas fíor do luach seasta éigin, de ghnáth $n = 1$ nó $n = 2$.

(ii) Glactar leis ansin go bhfuil an ráiteas fíor do luachanna suas le $n = k$.

(iii) Bunaithe ar an mbonn tuisceana sin, caithfimid a thaispeáint go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k + 1$.

(iv) Mar chonclúid, cruthaítear "cruthúnas rollach":

a. Ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 1$,

b. tá sé fíor anois do $n = 1 + 1 = 2$.

c. Ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 2$, tá sé fíor do $n = 2 + 1 = 3$, srl.

d. Dá bhrí sin tá sé fíor do gach luach n.

Sampla 1

Cruthaigh go bhfuil $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . n = \frac{n}{2}(n + 1)$ **do gach luach ar *n*.**

Cruthúnas:

(i) Cruthaigh go bhfuil an ráiteas fíor do $n = 1$.

$$\Rightarrow 1 = \tfrac{1}{2}(1 + 1) = \tfrac{1}{2}(2) = 1, \text{ atá fíor.}$$

(ii) Glac leis go bhfuil sé fíor do $n = k$.

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . k = \frac{k}{2}(k + 1).$$

(iii) Bunaithe ar an mbonn tuisceana sin, caithfimid a thaispeáint go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k + 1$.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . k + (\boldsymbol{k + 1}) = \frac{k}{2}(k + 1) + (\boldsymbol{k + 1})$$ … ag suimiú $(k + 1)$ leis an dá thaobh.

$$= (k + 1)\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$ … ag fachtóiriú $(k + 1)$ ó thaobh na láimhe deise.

$$= (k + 1)\left(\frac{k + 2}{2}\right)$$ … ag fáil chomhainmneora.

$$= \left(\frac{k + 1}{2}\right)(k + 2)$$ … ag atheagrú an ainmneora.

$$= \left(\frac{k + 1}{2}\right)[(k + 1) + 1]$$

$\therefore$ Tá sé fíor do $n = k + 1$.

(iv) Ach ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 1$, caithfidh sé a bheith fíor anois do $n = 1 + 1 = 2$. Agus má tá sé fíor do $n = 2$, tá sé fíor do $n = 2 + 1 = 3$,… srl.

(v) Dá bhrí sin tá sé fíor do gach luach ar n.

Nóta 1: Cé go bhféadfaimis a chruthú go bhfuil an ráiteas seo fíor do go leor luachanna scoite n, is é an ghné thábhachtach den mhodh cruthúnais seo go gcruthaíonn sé go bhfuil an ráiteas fíor **do gach luach ar n**.

Nóta 2: Ní modh é ionduchtú matamaiticiúil chun toradh a aimsiú, ach nuair a bhíonn toradh againn a bhfuil an chuma air go bhfuil sé fíor, tugann an modh seo cruthúnas beacht dúinn.

Nóta 3: Is féidir cruthúnas trí ionduchtú a chur i bhfeidhm ar chúpla catagóir dhifriúil torthaí, lena n-áirítear:

(i) Torthaí ina bhfuil **sraitheanna uimhreacha** m.sh. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . n = \frac{n}{2}(n + 1)$.

(ii) Torthaí ina bhfuil **fachtóirí slonn** m.sh. is féidir $10^n - 7^n$ a roinnt ar 3.

(iii) Torthaí ina bhfuil **éagothromóidí** m.sh. $3^n > 3n + 1$, do $n \geqslant 2$.

Sampla 2

Cruthaigh go bhfuil $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots . 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ do gach luach ar $n \in \mathbb{N}$.

Cruthúnas:

(i) Cruthaigh go bhfuil an ráiteas fíor do $n = 1$.

$$3^1 = \tfrac{3}{2}(3^1 - 1) = \tfrac{3}{2}(2) = 3 \quad \text{... atá fíor.}$$

(ii) Glac leis go bhfuil sé fíor do $n = k$.

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots . 3^k = \tfrac{3}{2}(3^k - 1).$$

(iii) Bunaithe ar an mbonn tuisceana sin, caithfimid a thaispeáint anois go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k + 1$.

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots . 3^k + \mathbf{3^{k+1}} = \tfrac{3}{2}(3^k - 1) + \mathbf{3^{k+1}}. \quad \text{... ag suimiú } 3^{k+1} \text{ leis an dá thaobh.}$$

$$= \tfrac{3}{2}(3^k - 1) + 3^k.3^1$$

$$= 3\left(\frac{(3^k - 1)}{2} + 3^k\right) \quad \text{... ag fachtóiriú 3.}$$

$$= 3\left(\frac{3^k - 1 + 2.3^k}{2}\right) \quad \text{... comhainmneoir}$$

$$= \tfrac{3}{2}(3.3^k - 1) \quad \text{... ag atheagrú.}$$

$$= \tfrac{3}{2}(3^{k+1} - 1)$$

$\therefore$ Tá sé fíor do $n = k + 1$.

(iv) Ach ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 1$, caithfidh sé a bheith fíor anois do $n = 1 + 1 = 2$. Agus má tá sé fíor do $n = 2$, tá sé fíor do $n = 2 + 1 = 3$, … srl.

(v) Dá bhrí sin tá sé fíor do gach luach ar n.

Sampla 3

Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots . \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

Cruthúnas:

(i) Cruthaigh go bhfuil an ráiteas fíor do $n = 1$.

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$ … atá fíor.

(ii) Glac leis go bhfuil sé fíor do $n = k$.

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots . \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}, k \in \mathbb{N}.$$

(iii) Bunaithe ar an mbonn tuisceana sin, caithfimid a thaispeáint anois go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k + 1$.

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots . \frac{1}{k(k+1)} + \mathbf{\frac{1}{(k+1)(k+2)}} = \frac{k}{k+1} + \mathbf{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{\cancel{(k+1)}(k+1)}{\cancel{(k+1)}(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+1)+1}$$

$\therefore$ Tá sé fíor do $n = k + 1$.

(iv) Ach ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 1$, caithfidh sé a bheith fíor anois do $n = 1 + 1 = 2$. Agus má tá sé fíor do $n = 2$, tá sé fíor do $n = 2 + 1 = 3$, … srl.

(v) Dá bhrí sin tá sé fíor do gach luach ar n.

Cleachtadh 7.12(A)

I ngach ceann de na ceisteanna seo a leanas, cruthaigh na torthaí trí ionduchtú matamaiticiúil do gach luach slánuimhriúil deimhneach ar n.

1. $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots . 2n = \sum_{n=1}^{n} 2n = n(n+1)$.

2. $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots . (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$.

3. $1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \ldots . n(n+1) = \sum_{n=1}^{n} n(n+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$.

4. $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \ldots . \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$.

5. $\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \ldots . \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$.

6. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots . n^3 = \sum_{n=1}^{n} n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2.$

7. $\sum_{n=1}^{n} n(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$

8. $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots . x^n = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}, x \neq 1.$

Cruthúnais inroinnteachta

Sampla 4

Cruthaigh do gach $n \in \mathbb{N}$ go bhfuil 3 ina fhachtóir de chuid $4^n - 1$.

Cruthúnas:

(i) Cruthaigh go bhfuil an ráiteas fíor do $n = 1$.

Tá 3 ina fhachtóir de chuid $4^1 - 1 = 3$ … fíor.

(ii) Glac leis go bhfuil sé fíor do $n = k$.

$\Rightarrow$ Tá 3 ina fhachtóir de chuid $4^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Bunaithe ar an mbonn tuisceana sin, caithfimid a thaispeáint anois go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k + 1$.

An bhfuil 3 ina fhachtóir de chuid $4^{k+1} - 1$?

$$\begin{aligned} &= 4^k.4^1 - 1 \\ &= 4^k.(3 + 1) - 1 \\ &= 3.4^k + 1.4^k - 1 \\ &= 3.4^k + (4^k - 1). \end{aligned}$$

Ó tharla go bhfuil 3.4^k inroinnte ar 3 agus go nglactar leis go bhfuil $(4^k - 1)$ inroinnte ar 3,

$\therefore$ Tá $3.4^k + (4^k - 1)$ inroinnte ar 3.

$\therefore$ Tá sé fíor do $n = k + 1$.

(iv) Ach ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 1$, caithfidh sé a bheith fíor anois do $n = 1 + 1 = 2$.

Agus má tá sé fíor do $n = 2$, tá sé fíor do $n = 2 + 1 = 3$, … srl.

(v) Dá bhrí sin tá sé fíor do gach luach ar n.

Sampla 5

Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil $8^n - 7n + 6$ inroinnte ar 7 do gach $n \in \mathbb{N}$.

Cruthúnas:

(i) Cruthaigh go bhfuil an ráiteas fíor do $n = 1$.

Tá 7 ina fhachtóir de chuid $8^1 - 7.1 + 6 = 7$ … atá fíor.

(ii) Glac leis go bhfuil sé fíor do $n = k$.

$\Rightarrow$ Tá 7 ina fhachtóir de chuid $8^k - 7k + 6$, $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Bunaithe ar an mbonn tuisceana sin, caithfimid a thaispeáint anois go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k + 1$.

An bhfuil 7 ina fhachtóir de chuid $8^{k+1} - 7(k + 1) + 6$?

$$\begin{aligned} &= 8^k.8^1 - 7k - 7 + 6 \\ &= 8^k.(7 + 1) - 7k - 7 + 6 \\ &= 7.8^k + 1.8^k - 7k - 7 + 6 \\ &= 7.8^k + (8^k - 7k + 6) - 7 \end{aligned}$$

Ó tharla go bhfuil 7.8^k inroinnte ar 7, glactar leis go bhfuil $(8^k - 7k + 6)$ inroinnte ar 7 agus tá -7 inroinnte ar 7,

$\therefore$ Tá $8^{k+1} - 7(k + 1) + 6$ inroinnte ar 7.

$\therefore$ Tá sé fíor do $n = k + 1$.

(iv) Ach ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 1$, caithfidh sé a bheith fíor anois do $n = 1 + 1 = 2$.

Agus má tá sé fíor do $n = 2$, tá sé fíor do $n = 2 + 1 = 3$, … srl.

(v) Dá bhrí sin tá sé fíor do gach luach ar n.

Sampla 6

Taispeáin go bhfuil $n(n + 1)(n + 2)$ inroinnte ar 3 do $n \in \mathbb{N}$.

Cruthúnas:

(i) Cruthaigh go bhfuil an ráiteas fíor do $n = 1$.

Tá 3 ina fhachtóir de chuid $n(n + 1)(n + 2) = 1(1 + 1)(1 + 2)$
$= 6$. … atá fíor.

(ii) Glac leis go bhfuil sé fíor do $n = k$.

$\Rightarrow$ Tá 3 ina fhachtóir de chuid $k(k + 1)(k + 2)$, $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Bunaithe ar an mbonn tuisceana sin, caithfimid a thaispeáint anois go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k + 1$.

An bhfuil 3 ina fhachtóir de chuid $(\boldsymbol{k+1})(\boldsymbol{k+1}+1)(\boldsymbol{k+1}+2)$?

$$= (k+1)(k+2)[k+3]$$
$$= (k+1)(k+2)k + (k+1)(k+2)3$$
$$= k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)$$

Ó tharla go nglactar leis go bhfuil 3 ina fhachtóir de chuid $k(k+1)(k+2)$, agus go bhfuil 3 ina fhachtóir de chuid $3(k+1)(k+2)$,

$\therefore$ Tá $(k+1)(k+2)(k+3)$ inroinnte ar 3.

$\therefore$ Tá sé fíor do $n = k + 1$.

(iv) Ach ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 1$, caithfidh sé a bheith fíor anois do $n = 1 + 1 = 2$. Agus má tá sé fíor do $n = 2$, tá sé fíor do $n = 2 + 1 = 3$, … srl.

(v) Dá bhrí sin tá sé fíor do gach luach ar n.

Cleachtadh 7.12(B)

Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil

1. $6^n - 1$ inroinnte ar 5 do $n \in \mathbb{N}$.
2. $5^n - 1$ inroinnte ar 4 do $n \in \mathbb{N}$.
3. $9^n - 5^n$ inroinnte ar 4 do $n \in \mathbb{N}$.
4. $3^{2n} - 1$ inroinnte ar 8 do $n \in \mathbb{N}$.
5. $7^n - 2^n$ inroinnte ar 5 do $n \in \mathbb{N}$.
6. $7^{2n+1} + 1$ inroinnte ar 8 do $n \in \mathbb{N}$.
7. $2^{3n-1} + 3$ inroinnte ar 7 do $n \in \mathbb{N}$.
8. $5^n - 4n + 3$ inroinnte ar 4 do $n \in \mathbb{N}$.
9. $7^n + 4^n + 1$ inroinnte ar 6 do $n \in \mathbb{N}$.
10. $n(n+1)(2n+1)$ inroinnte ar 3 do $n \in \mathbb{N}$.
11. $n^3 - n$ inroinnte ar 3 do $n \in \mathbb{N}$.
12. $13^n - 6^{n-2}$ inroinnte ar 7 do $n \in \mathbb{N}$.

Cruthúnais ar éagothromóidí

Nuair a bhíomar ag plé le héagothromóidí, thugamar dhá asbheirt thábhachtacha faoi deara, eadhon

(i) Má tá $a > b$, tá $a - b > 0$

(ii) (réaduimhir ar bith)$^2 > 0$.

Sampla 7

Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil $2^n > n^2$ do $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$.

Cruthúnas:

(i) Cruthaigh go bhfuil an ráiteas fíor do $n = 5$.

$2^5 > 5^2$

$32 > 25$ … atá fíor.

(ii) Glac leis go bhfuil sé fíor do $n = k$, $k \geq 5$.

$\Rightarrow\ 2^k > k^2, k \in \mathbb{N}$ agus $k \geqslant 5$.

(iii) Bunaithe ar an mbonn tuisceana sin, caithfimid a thaispeáint anois go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k + 1$.

An bhfuil $2^{k+1} > (k + 1)^2$?

Ó tharla go bhfuil $2^k > k^2$ (glactar leis sin)

$\therefore\ 2^k . 2 > 2k^2$

$\therefore\ 2^{k+1} > 2k^2$

$\therefore$ caithfimid a chruthú go bhfuil $2k^2 > (k + 1)^2$.

$$2k^2 > k^2 + 2k + 1$$

$$k^2 - 2k - 1 > 0$$

$$k^2 - 2k \mathbf{+ 1 - 1} - 1 > 0$$ … ag slánú na cearnóige trí leath chomhéifeacht k chearnaithe a shuimiú agus a dhealú

$$k^2 - 2k + 1 - 2 > 0$$

$$(k - 1)^2 - 2 > 0$$ atá fíor do $k \geq 5$.

$\therefore\ 2^{k+1} > 2k^2 > (k + 1)^2$

$\therefore$ Tá sé fíor do $n = k + 1$.

(iv) Ach ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 5$, caithfidh sé a bheith fíor anois do $n = 5 + 1 = 6$. Agus má tá sé fíor do $n = 6$, tá sé fíor do $n = 6 + 1 = 7$, … srl.

(v) Dá bhrí sin tá sé fíor do gach luach $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$.

Sampla 8

Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil $n! > 2^n$, $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

Cruthúnas:

(i) Cruthaigh go bhfuil an ráiteas fíor do $n = 4$.

$4! > 2^4$

$24 > 16$ … atá fíor.

(ii) Glac leis go bhfuil sé fíor do $n = k, k \geq 4$.

$\Rightarrow k! > 2^k, k \in \mathbb{N}$ agus $k \geqslant 4$.

(iii) Bunaithe ar an mbonn tuisceana sin, caithfimid a thaispeáint anois go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k + 1$.

An bhfuil $(k + 1)! > 2^{k+1}$?

An bhfuil $(k + 1)k! > 2^k.2$? … $(k + 1)k! = (k + 1)!$

Ó tharla go bhfuil $k! > 2^k$ (glactar leis sin),

$\therefore \quad (k + 1)k! > (k + 1)2^k$

$\therefore$ caithfimid a chruthú go bhfuil $(k + 1)2^k > 2^k.2$

$(k + 1)2^k > 2.2^k$ atá fíor cinnte má tá $k > 1$.

$\therefore \quad (k + 1)! > 2^{k+1}$

$\therefore$ Tá sé fíor do $n = k + 1$.

(iv) Ach ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 4$, caithfidh sé a bheith fíor anois do $n = 4 + 1 = 5$. Agus má tá sé fíor do $n = 5$, tá sé fíor do $n = 5 + 1 = 6$, … srl.

(v) Dá bhrí sin tá sé fíor do gach luach $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$.

Sampla 9

Cruthaigh go bhfuil $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ do $n \geq 1, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

Cruthúnas:

(i) Cruthaigh go bhfuil an ráiteas fíor do $n = 1$.

$\Rightarrow (1 + x)^1 \geqslant 1 + 1.x$ … atá fíor.

(ii) Glac leis go bhfuil sé fíor do $n = k, k \geq 1$.

$(1 + x)^k \geqslant 1 + kx, \ k \in \mathbb{N}$ agus $k \geqslant 1$.

(iii) Bunaithe ar an mbonn tuisceana sin, caithfimid a thaispeáint anois go bhfuil an ráiteas fíor do $n = k + 1$.

An bhfuil $(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)x$?

An bhfuil $(1 + x)^k(1 + x) \geqslant 1 + kx + x$?

Ó tharla go bhfuil $(1 + x)^k \geqslant 1 + kx$ … (glactar leis sin).

$\therefore \quad (1 + x)^k(1 + x) \geqslant (1 + kx)(1 + x)$

$\therefore$ caithfimid a chruthú go bhfuil $(1 + kx)(1 + x) \geqslant 1 + kx + x$

$1 + x + kx + kx^2 \geqslant 1 + kx + x.$

$\Rightarrow kx^2 \geq 0$ atá fíor do $k \geq 1$ agus $x \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ Tá sé fíor do $n = k + 1$.

(iv) Ach ó tharla go bhfuil sé fíor do $n = 1$, caithfidh sé a bheith fíor anois do $n = 1 + 1 = 2$. Agus má tá sé fíor do $n = 2$, tá sé fíor do $n = 2 + 1 = 3$, … srl.

(v) Dá bhrí sin tá sé fíor do gach luach $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

Cleachtadh 7.12(C)

Cruthaigh na ráitis seo a leanas trí ionduchtú:

1. $2^n > 2n + 1$ do $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.
2. $3^n > n^2$ do $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
3. $3^n > 2n + 2$ do $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.
4. $n! > 2^{n-1}$ do $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.
5. $(n + 1)! > 2^n$ do $n \in \mathbb{N}$.
6. $(1 + 2x)^n \geqslant 1 + 2nx$ do $x > 0, n \in \mathbb{N}$.
7. $(1 + ax)^n \geqslant 1 + 2ax$ do $a > 0, x > 0, n \in \mathbb{N}$.

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. Faigh na luachanna ar x a shásaíonn an éagothromóid seo a leanas:

$$-1 \leqslant \frac{2x + 4}{3} \leqslant 2, x \in \mathbb{R}.$$

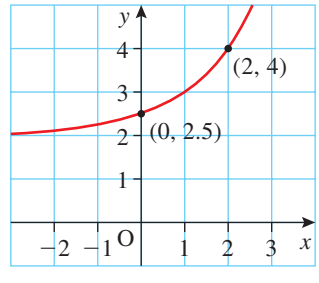
2. (a) Úsáid na cnaipí log agus 10^x ar d'áireamhán chun iad seo a leanas a mheas:
   (i) $10^{3.5}$ (ii) $\log_{10}4.5$ (iii) 10^{3t}, nuair atá $t = 0.04$ (iv) $\log_5 n$, nuair atá $n = 100$.
   (b) Úsáid na cnaipí ln agus e^x ar an áireamhán chun iad seo a leanas a mheas
   (i) $e^{3.4}$ (ii) $ln\ 589$ (iii) $e^{-0.02t-4}$, nuair atá $t = 40$ (iv) $\ln\left(\frac{10}{k}\right)$, nuair atá $k = 3.7$.

3. Sainítear feidhm easpónantúil le $f(x) = 3 \times 4x$. Faigh
   (i) luach a má tá $(a, 6)$ ar $f(x)$
   (ii) luach b má tá $\left(\frac{-1}{2}, b\right)$ ar $f(x)$.

4. Réitigh an chothromóid $|x - 8| = 3$.

5. Réitigh gach ceann díobh seo a leanas:
   (i) $5^{2n} \times 25^{2n-1} = 625$ (ii) $27^{n-2} = 9^{3n+2}$

6. Taispeántar sa léaráid graf den chuar easpónantúil $y = a2^x + b$.
   (i) Scríobh síos dhá chothromóid i dtéarmaí a agus b.
   (ii) Réitigh na comhchothromóidí chun luachanna a agus b a fháil.



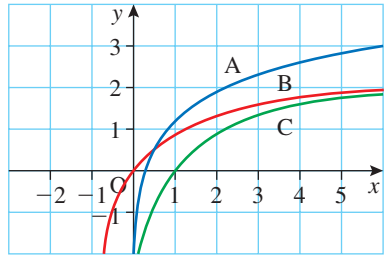
7. Taispeántar graif na bhfeidhmeanna logartamacha

(i) $\ln(x)$

(ii) $\ln(x + 1)$

(iii) $\ln(x) + 1$

sa léaráid seo. Sainaithin gach cuar, agus tabhair cúis le do fhreagraí.



8. Réitigh an chothromóid $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln(6x - 8)$.

9. $y = Ae^{bt}$. Má tá $y = 6$ nuair atá $t = 1$, agus $y = 8$ nuair atá $t = 2$, faigh luachanna A agus b.

10. Faigh luachanna a agus b má théann an graf $y = a\log_2(x - b)$ trí na pointí (5, 2) agus (7, 4).

11. Réitigh $32^{x-1} = 28$ do x, ceart go dhá ionad dheachúlacha.

12. Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil

$$3 + 6 + 9 + 12 + \ldots \; . 3n = \frac{3n}{2}(n + 1), \text{ do gach luach slánuimhriúil deimhneach.}$$

13. Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil

$8^n + 6$ inroinnte ar 7 do $n \in \mathbb{N}$.

14. Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil

$n^2 > 4n + 3$ do $n \geqslant 5, n \in \mathbb{N}$.

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. Faigh an réimse luachanna do x a shásaíonn

$3x + 4 < x^2 - 6 < 9 - 2x$.

2. Tugtar mais M ábhair radaighníomhaigh atá fanta tar éis t bliain leis an bhfoirmle

$M = 30 \times 2^{-0.001t}$ gram. Faigh

(i) an mhais ag an tús

(ii) an fad a thógfaidh sé ar an ábhar meath go dtí 10 ngram

(iii) an fad a thógfaidh sé air meath go dtí an "leibhéal sábháilte", i.e. 1% dá mhais ag an tús.

3. Tomhaiseann an cuar easpónantúil $I = I_0 \times 10^{0.1S}$ treise fuaimeanna i gcomparáid le tairiseach déine na héisteachta I_0, nuair is é S an treise bhraite (ina deicibeilí).

(i) Cé mhéad níos airde ná an tairiseach déine atá 30 deicibeil?

(ii) Cé mhéad níos airde atá fuaim 28 dB ná fuaim 15 dB? Tabhair do fhreagra ceart go dtí an tslánuimhir is gaire.

4. Roghnaigh bonn oiriúnach agus réitigh an chothromóid seo a leanas do x.

$$\log_5 x - 1 = 6\log_x 5$$

5. Réitigh $0.7^x \geq 0.3$ do x, ag tabhairt do fhreagra ceart go dtí 3 fhigiúr bhunúsacha.

6. Úsáid na haiseanna céanna chun sceitse a tharraingt de gach ceann díobh seo a leanas san fhearann $-3 \leq x \leq 3$.

(i) $f(x) = |x|$
(ii) $g(x) = |x| + 2$
(iii) $h(x) = |x + 2|$.
(iv) Faigh luachanna x a shásaíonn $f(x) \cap h(x)$.
(v) Cé na luachanna ar x a fhágann go bhfuil $g(x) > h(x)$?

7. Sceitseáil graf $y = \ln(x - 3)$.
Sloinn x i dtéarmaí y agus uaidh sin sceitseáil íomhá $y = \ln(x - 3)$ sa líne $y = x$.

8. Sceitseáil graf na feidhme $f(x) = |\frac{1}{4}x + 3|$ agus uaidh sin réitigh an éagothromóid $|\frac{1}{4}x + 3| \geq 3$.

9. Simpligh $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{-1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{-1}{2}}}$.

10. Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil

$$\frac{1}{(1 + r)^n} \leqslant \frac{1}{1 + nr} \text{ do } r > 0 \text{ agus } n \in \mathbb{N}.$$

11. Cruthaigh go bhfuil $\dfrac{4x}{(x + 1)^2} \leqslant 1$ do gach $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$.

12. Más réaduimhir é k, faigh an tacar luachanna do k a fhágfaidh i gcás fhréamhacha na cothromóide cearnaí $(1 + 2k)x^2 - 10x + (k - 2) = 0$

(i) gur réaduimhreacha iad
(ii) go bhfuil a suim níos mó ná 5

13. Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil

$$1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \ldots . n.2^{n-1} = (n - 1)2^n + 1.$$

14. Má tá $u_n = (n - 20)2^n$ do gach slánuimhir n, scríobh slonn do u_{n+1}, u_{n+2}.
Uaidh sin fíoraigh go bhfuil $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$.

15. Réitigh na comhchothromóidí seo a leanas do $x, y \geq 0$.

$$2 \log y = \log 2 + \log x \quad \text{agus} \quad 2^y = 4^x$$

16. Fásann daonra cathrach de réir an dlí $P = 40\,000\,(1.03)^n$, nuair is é n an tréimhse ama i mblianta agus P méid an daonra.

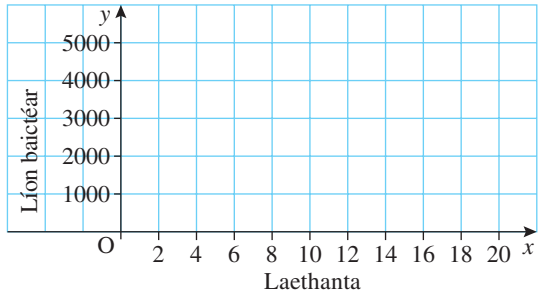
(i) Cén saghas feidhme é sin?
(ii) Meas méid an daonra i gceann 12 bhliain.
(iii) Cérbh é daonra tosaigh na cathrach sular thosaigh an chathair ag fás?
(iv) Cinn nuair a bheidh an daonra dúbailte (go dtí an leathbhliain is gaire).

17. Ba é 8000 duine daonra baile ag tús na bliana 2000 agus 15 000 duine an daonra ag deireadh na bliana 2007. Ag glacadh leis go raibh an fás easpónantúil,

(i) scríobh slonn d'fhás an daonra, ag sainiú na dtéarmaí a úsáidtear
(ii) faigh an daonra ag deireadh na bliana 2009.
(iii) Cén bhliain a mbeidh an daonra cothrom le dhá oiread dhaonra na bliana 2007?

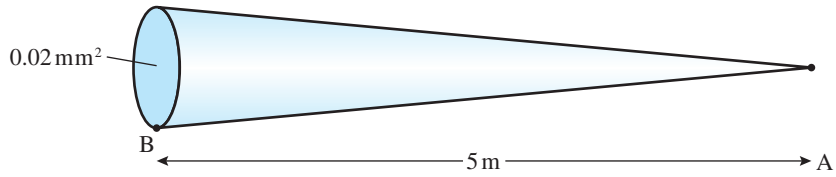
Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. Maíonn déantóir uachtar éadain *GLÉGHLAN* go mbeidh an daonra baictéar a chruthaíonn goiríní laghdaithe de leath laistigh de chúig lá ón uair a úsáidtear an t-uachtar den chéad uair. Le linn trialach ina shaotharlann, faigheann an tOllamh Snape amach go dtugtar líon na mbaictéar N sa daonra leis an bhfoirmle $N = 5000e^{-0.15t}$, nuair is é t an t-am, á thomhas i laethanta.



(i) Úsáid an fhoirmle seo chun an maíomh go laghdóidh daonra na mbaictéar de leath i gcúig lá a thástáil.
(ii) Dar le cothromóid an Ollaimh Snape, cén leibhéal baictéar a bheidh ann tar éis 10 lá?
(iii) Cé mhéad baictéar a bhí ann ag tús na trialach?
(iv) Cé mhéad lá a thógfaidh sé ar an daonra laghdú go 100?
(v) Cóipeáil an eangach seo agus sceitseáil graf de líon na mbaictéar sa daonra le linn triail 20 lá.

2.



Taispeántar snáithín gloine cónúil sa léaráid.
Tá an t-achar trasghearrthach ciorclach ag taobh B cothrom le 0.02 mm^2.
Laghdaíonn an t-achar trasghearrthach feadh an fhaid ó B go A trí fhachtóir $(0.92)^{\left(\frac{1}{10}\right)}$ in aghaidh an mhéadair feadh fhad an tsnáithín.
Tá an snáithín 5.0m ar fad san iomlán.

(i) Scríobh síos riail d'achar trasghearrthach an tsnáithín ag achar x m ó B.
(ii) Céard é achar trasghearrthach an tsnáithín aon trian dá fhad ó B?
(iii) Méadaíonn láidreacht an tsnáithín ó B go A.
Ag fad x m ó B, tugtar láidreacht an tsnáithín leis an bhfoirmle

$$S = (0.92)^{10-3x}.$$

Má thugtar an meáchan is féidir leis an snáithín a iompar ag gach pointe sula mbriseann sé mar Meáchan = Láidreacht × Achar trasghearrthach, scríobh síos slonn, i dtéarmaí x, don mheáchan a iompróidh an snáithín ag fad x m ó B.
(iv) Teastaíonn píosa snáithín gloine chun meáchain suas le $0.02 \times (0.92)^{2.5}$ aonad a iompar. Cé mhéad den 5 m a d'fhéadfaí a úsáid chun na críche sin?

3. Tháinig fadhb chun cinn sna córais soilsithe in dhá charráiste, A agus B, ar thraein thras-Eorpach. Sular tharla sé seo, ba é an déine solais i gcarráiste *A* **I** aonad agus ba é an déine solais i gcarráiste *B* 0.66**I** aonad.
Ag gach stáisiún inar stop an traein, laghdaigh déine an tsolais 17% i gcarráiste *A* agus 11% i gcarráiste B.

(i) Scríobh síos sloinn easpónantúla do dhéine thuartha an tsolais i ngach carráiste tar éis n stop i stáisiún.
(ii) Am éigin i ndiaidh na faidhbe tosaigh, bhí déine an tsolais sa dá charráiste mar an gcéanna. Cé mhéad stáisiún ag ar stop an traein sular tharla sé seo?

4. Tá thart ar dheich n-uaire níos mó ioraí rua ná ioraí liatha i gceantar faoi leith.
Má tá daonra na n-ioraí rua ag laghdú ag ráta 5% in aghaidh na bliana, agus daonra na n-ioraí liatha ag méadú ag ráta 11% in aghaidh na bliana,

(i) scríobh slonn do mhéid dhaonra na n-ioraí liatha tar éis t bliain
(ii) scríobh slonn do mhéid dhaonra na n-ioraí rua tar éis t bliain
(iii) Cé mhéad bliain, ceart go hionad amháin deachúlach, a thógfaidh sé ar dhaonraí an dá speiceas a bheith cothrom (ag glacadh leis go leanfaidh na rátaí méadaithe/laghdaithe reatha ar aghaidh mar atá)?
(iv) Cé mhéad bliain a thógfaidh sé (arís, ag glacadh leis go leanfaidh na rátaí méadaithe/laghdaithe reatha ar aghaidh mar atá) sula mbeidh comhréireanna dhaonraí na n-ioraí droim ar ais?
(v) Úsáid na haiseanna céanna chun graif easpónantúla a tharraingt ag cur do fhreagraí ar (i), (ii), (iii), (iv) thuas in iúl.

5. Tugtar líon baictéar i gcoilíneacht leis an bhfoirmle $n = \mathrm{A}(1 - e^{-bt})$, nuair is é n méid an daonra tar éis t uair an chloig.
Tairisigh dheimhneacha iad A agus b.

(i) An graf fáis nó meatha é seo? Mínigh do fhreagra.

(ii) Má tá $t = 2$ nuair atá $n = 10000$, agus $t = 4$ nuair atá $n = 15000$, taispeáin go bhfuil
$2e^{-4b} - 3\mathrm{e}^{-2b} + 1 = 0$.

(iii) Úsáid an t-ionadú $a = e^{-2b}$ chun a thaispeáint go bhfuil
$2a^2 - 3a + 1 = 0$.

(iv) Réitigh an chothromóid seo do a.

(v) Faigh luach beacht b.

(vi) Faigh luach beacht A.

(vii) Sceitseáil graf n in aghaidh t.

(viii) Cé mhéad uair an chloig a thógfaidh sé go dtí go mbeidh daonra na mbaictéar ag 18,000?

Freagraí

Caibidil 1: Ailgéabar 1

Cleachtadh 1.1

1. (i) 3 (ii) -9 (iii) 5
2. (i) 2 (ii) 3 (iii) 4
3. (i) Ní slánuimhir í $\frac{3}{2}$.
(ii) $-4x^{-1}$, ní cumhacht dhearfach í -1
4. (i) $8x^2 - 4x - 2$ (ii) $4x^3 + 2x^2 - 6x$
(iii) $7x^2 - 5x$ (iv) $9x^2 - 9x - 19$
5. (i) $22x^3 - 19x^2$ (ii) $9x^4 - 26x^3$
(iii) $7x^4 - 5x^3 + 5x^2$ (iv) $15x^3 - 31x^2 + 3x$
6. (i) $2x^2 + 13x + 20$ (ii) $2x^2 - x - 6$
(iii) $3x^2 + 7x - 6$ (iv) $12x^2 - 11x + 2$
(v) $6x^2 + 13x - 5$ (vi) $8x^2 - 22x - 6$
(vii) $x^2 - 4$ (viii) $4x^2 - 25$
(ix) $a^2x^2 - b^2y^2$
7. (i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $x^2 - 6x + 9$
(iii) $x^2 + 10x + 25$ (iv) $a^2 + 2ab + b^2$
(v) $x^2 - 2xy + y^2$ (vi) $a^2 + 4ab + 4b^2$
(vii) $9x^2 - 6xy + y^2$ (viii) $x^2 - 10xy + 25y^2$
(ix) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
8. (i) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ (ii) $8x^2 - 4x + \frac{1}{2}$
(iii) $-x^2 + 2x - 1$
9. (i), (ii) Ní slánchearnóg í (iii) Is slánchearnóg í.
Ní féidir codanna (i) agus (ii) a shloinneadh san fhoirm $(ax + b)^2$
10. $p = 4$ **11.** $t = 20$ **12.** $s = 16$
13. (i) $x^3 + 4x^2 + 10x + 12$
(ii) $2x^3 - 5x^2 - 13x + 4$
(iii) $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$
(iv) $6x^3 - 16x^2 + 14x - 4$
14. Cruthúnas
15. Cruthúnas
16. 14
17. $2x^3 - x^2 - 25x - 12$
18. $2x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 5x - 2$
19. -47
20. (i) $x + 2$ (ii) $x + 2$
(iii) $x^2 - 2x$ (iv) $3x - 2y$
21. (i) $2x + 3y - 1$ (ii) $2x^2 - 3x + 4$
22. (i) $4a$ (ii) $4ab$ (iii) $2yz$ (iv) $\frac{y}{x}$
23. (i) $x + 3$ (ii) $2x + 4$ (iii) $2x + 3$
24. (i) $x^2 - 7x + 12$ (ii) $x^2 - 1$
(iii) $x^2 - 1$ (iv) $4x^2 + 5x - 6$
(v) $x^2 - 5x + 3$ (vi) $2x^2 + 3x + 6$
25. (i) $x - 2$ (ii) $x - 3$
(iii) $3x - 1$ (iv) $x + 2$
26. (i) $x^2 + 2x + 4$ (ii) $4x^2 + 6xy + 9y^2$

Cleachtadh 1.2

1. (i) $x^2 + 4x$ (ii) $4x + 8$
2. (i) $2x + 2$ (ii) $10x + 2$
3. (a) $2x^3 + 5x^2 + 3x$
(b) $8x^2 + 15x + 6$
(c) (i) $390\,\text{cm}^3$ (ii) $281\,\text{cm}^2$
4. (a) -4 (b) -8 (c) -14
(d) $54a^3 - 9a^2 - 15a - 4$
5. (a) 6 (b) 46 (c) 7.75
(d) $\frac{a^2}{16} - \frac{3a}{4} + 6$
6. (a) $2x^2 + xy - 3y^2$ (b) $6x + 4y$
7. (a) $2x^3 - 10x^2$ (b) $18x^2 - 50x$
8. (i) Líon na dtrasnán i bpolagán a bhfuil 4 shlios air (2)
(ii) Líon na dtrasnán i bpolagán a bhfuil 5 shlios air (2), (5), (9)
Níl aon trasnán i dtriantán
9. $a^2 - 3a - 8$
10. (i) $4t^2 + 6t + 6$ (2) (ii) $t^4 - 3t^2 + 6$ (4)
(iii) $t^2 - 7t + 16$ (2)
11. (i) $1372\pi\,\text{cm}^3$ (ii) $\frac{1}{3}\pi r^3$ (iii) $\frac{4}{3}\pi h^3$
12. $36, 28, 4x + 7$
13. $\frac{40}{\pi^2}$ m
14. 3 m
15. (i) 10 (ii) 15 (iii) 45; 7

Cleachtadh 1.3

1. $5x(x - 2)$
2. $6b(a - 2c)$
3. $3x(x - 2y)$
4. $2x^2(y - 3z)$
5. $2a(a^2 - 2a + 4)$
6. $5xy(y - 4x)$
7. $2ab(a - 2b + 6c)$
8. $3xy(x - 3y + 5z)$
9. $2\pi r(2r + 3h)$
10. $(3a - 4)(2b - c)$
11. $(x - 9)(x + 3)$
12. $(c - 2d)(2c + 1)$
13. $(2x + y)(4a - 3b)$
14. $(y - 3b)(7y + 2a)$
15. $(2x - 3y)(3y - 4z)$
16. $(2x - 3y)(3x - 2a)$
17. $(x - y)(x + y)(3a - 4b)$
18. $(a - b)(a + b)$
19. $(x - 2y)(x + 2y)$
20. $(3x - y)(3x + y)$
21. $(4x - 5y)(4x + 5y)$

22. $(6x - 5)(6x + 5)$
23. $(1 - 6x)(1 + 6x)$
24. $(7a - 2b)(7a + 2b)$
25. $(xy - 1)(xy + 1)$
26. $(2ab - 4c)(2ab + 4c)$
27. $3(x - 3y)(x + 3y)$
28. $5(3 - x)(3 + x)$
29. $5(3a - 2)(3a + 2)$
30. $(2x + y - 2)(2x + y + 2)$
31. $(3a - 2b - 3)(3a - 2b + 3)$
32. $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$
33. $(x + 2)(x + 7)$
34. $(2x + 1)(x + 3)$
35. $(2x + 7)(x + 2)$
36. $(x - 2)(x - 7)$
37. $(x - 4)(x - 7)$
38. $(2x - 1)(x - 3)$
39. $(3x - 5)(x - 4)$
40. $(7x - 4)(x - 2)$
41. $(2x + 3)(x - 5)$
42. $(3x - 4)(x + 5)$
43. $(4x - 5)(3x + 1)$
44. $(3x + 5)(2x - 3)$
45. $(3x - 2)(x + 5)$
46. $(3x - 1)(2x - 3)$
47. $(9x - 4)(4x + 1)$
48. $(5x + 2)(3x - 4)$
49. $(3y - 5)(2y + 7)$
50. $(4x - y)(3x + 5y)$
51. (i) $(x + 2\sqrt{3})(x + \sqrt{3})$
(ii) $(x + 3\sqrt{5})(x - \sqrt{5})$
(iii) $(2x + \sqrt{2})(x - 3\sqrt{2})$
52. (i) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
(ii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
(iii) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$
53. (i) $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$
(ii) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
(iii) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
54. (i) $(2 + 3k)(4 - 6k + 9k^2)$
(ii) $(4 - 5a)(16 + 20a + 25a^2)$
(iii) $(3a + 4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2)$
55. (i) $(a - 2bc)(a^2 + 2abc + 4b^2c^2)$
(ii) $5(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$
(iii) $(x + y - z)((x + y)^2 + z(x + y) + z^2)$

Cleachtadh 1.4

1. (i) $\frac{3}{y^2}$ (ii) $\frac{a}{2b}$ (iii) x
(iv) $\frac{7 + 2y}{7}$ (v) $\frac{x}{3 + 2a}$

2. (a) $\frac{26x}{15}$ (b) $\frac{x}{10}$
(c) $\frac{2x + 9}{12}$ (d) $\frac{13x + 1}{20}$
(e) $\frac{-(x + 6)}{6}$ (f) $\frac{3x + 5}{12}$
(g) $\frac{17x + 11}{20}$ (h) 0
(i) $\frac{11x + 4}{20}$ (j) $\frac{8}{15x}$
(k) $\frac{1}{8x}$ (l) $\frac{2x + 3}{x(x + 3)}$
(m) $\frac{5x + 14}{(x + 2)(x + 4)}$ (n) $\frac{7x - 8}{(x - 2)(2x - 1)}$
(o) $\frac{17 - x}{(3x - 1)(x + 3)}$ (p) $\frac{13x + 13}{(2x - 7)(5x + 2)}$
(q) $\frac{13 - 3x}{4(3x - 5)}$ (r) $\frac{-x - 7}{(2x - 1)(x - 2)}$
(s) $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ (t) $\frac{4x + 9y - 2}{3xy}$
(u) $\frac{x - 7}{x(x - 1)}$

3. (i) $\frac{z - 2}{z - 5}$ (ii) $\frac{y + 2}{y - 5}$
(iii) $\frac{t + 4}{t - 2}$ (iv) $\frac{2}{(x + 2)(x - 2)}$
(v) $\frac{a - 8}{(a + 3)(a - 3)}$ (vi) $\frac{2x + 1}{(x + 2)(x - 2)}$

4. (i) $\frac{-4}{(2x + 1)}$ (ii) $\frac{-1}{2x + 1}$

5. (i) $\frac{-x - 4}{(x + 3)(x - 3)(x + 2)}$
(ii) $\frac{x + 5}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)}$
(iii) $\frac{5}{(3x + 4)(3x - 4)(2x + 1)}$
(iv) $\frac{1}{xy}$

6. (i) 5 (ii) 4 (iii) $x - 1$

7. (i) $\frac{1 + x}{1 - x}$ (ii) $\frac{1 + 2x}{x}$ (iii) xy

8. (i) $\frac{8y - 3}{4}$ (ii) $\frac{2x - 1}{2x}$
(iii) $\frac{3x^2 + 1}{2x}$ (iv) $\frac{4y + 1}{2}$

9. (i) $\frac{6z - 2}{6z - 3}$ (ii) $\frac{8x + 2}{4x + 1}$
(iii) $\frac{6z^2 - 3}{6z^2 - 2}$ (iv) $\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

10. (i) $\frac{x - 2}{x}$ (ii) $\frac{1}{x^2}$ (iii) $x + 2$

11. (i) $\frac{2b}{9 - b}$ (ii) $\frac{x^2}{x^2 - 3}$ (iii) $\frac{3y - 1}{3y + 1}$

12. Cruthúnas (tairiseach = 3)

Cleachtadh 1.5

1. $a = 6, b = -1, c = -12$
2. $p = 13, q = -10$
3. $a = 3, b = 7$
4. $a = 2, b = -10$
5. $p = 2, q = \frac{5}{4}, r = \frac{23}{8}$
6. $a = 3, b = 9$
7. $m = 9, n = 2$
8. (i) $a, b, c, d = 1, 10, 31, 30$
   (ii) $p, q, r = 5, 33, 52$
9. $p = 2, q = -5$
10. $a = 7.5, b = 37.75, c = 4.5$
11. $p = -12, q = 48$
12. $a = -3, b = 1$
13. $b = 4, c = 3$
14. $a = \dfrac{-2c}{5}$
15. $pq = 8$
16. Cruthúnas
17. $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$
18. $C = -\frac{1}{5}, D = \frac{1}{5}$
19. $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$
20. $a = -27, b = 54$
21. $p = -12, q = 16$
22. $c = 3, d = -4; (x - 2)(x + 2)(x + 3)$
23. 5
24. $a = 9 - p^2, b = 9p, p = 8, 1$
25. Cruthúnas
26. Cruthúnas
27. Cruthúnas
28. $2x - 1$
29. $A = 2, B = -1, C = -1$

Cleachtadh 1.6

1. (i) $x = \dfrac{4 + 2y}{3}$ (ii) $x = \dfrac{4c + b}{2}$
   (iii) $x = \dfrac{y + 8}{10}$ (iv) $x = \dfrac{2y + 15}{5}$
   (v) $x = 9y + 6$ (vi) $x = \dfrac{yz}{y - z}$
2. (i) $x = \dfrac{y + 1}{6}$ (ii) $x = \dfrac{y - 3z}{2}$
   (iii) $x = \dfrac{a}{b + c}$
3. (a) $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$ (b) $r = \dfrac{A}{2\pi h}$ (c) Cruthúnas
4. (a) πr^2 (b) $4r^2$
   (c) $r^2(4 - \pi)$ (d) $\dfrac{r^2}{4}(16 - \pi)$
5. (i) $v = \dfrac{c(f^1 - f)}{f^1}$ (ii) $c = \dfrac{f^1 v}{f^1 - f}$
6. (i) $l = \dfrac{T^2 g}{4\pi^2}$ (ii) $l = 2.3\,\text{m}$
7. (i) $a = \dfrac{b(x + y)}{x - y}$ (ii) $a = \dfrac{b}{2}$
8. (i) $v = \dfrac{3u - 4y}{3}$ (ii) $v = \dfrac{2s - ut}{t}$
9. (i) $i = 100\sqrt[3]{\dfrac{A}{P}} - 100$ (ii) 2.0%
10. (i) $c = \dfrac{a - b}{ad^2}$ (ii) $c = \dfrac{b - 1}{b - 2}$
11. (i) $h = \sqrt{225 - r^2}$ (ii) $h = 10\sqrt{2}$
    (iii) $h = 13\,\text{cm}$
12. (i) $L = 300 - 2W$
    (ii) $A = W(300 - 2W)$
    (iii) $W = 50, L = 200$ nó $W = 100, L = 100$

Cleachtadh 1.7

1. (a) Líneach (b) Líneach
   (c) Cearnach (d) Cearnach
   (e) Cearnach (f) Cearnach
   (g) Cearnach (h) Líneach
   (i) Cearnach (j) Cearnach
2. (a) $4x^2 - 1$ (b) $4 - x^2$
3. (i) $5x + 2$ (ii) $4x - 6$ (iii) $3 - x$
   (iv) $-2 - 5x$ (v) $\dfrac{x}{2} + 3$ (vi) $-1 + \dfrac{x}{5}$
4. $2x + 5$
5. $2x + 5$
6. (a) $3x; 45$ (b) $4x; 60$ (c) $2x + 1; 31$
7. $70 + 35x; 125 + 24x; 5$ mhí
8. $f(t) = 2t^2 + t + 4$; sa 16ú huair an chloig

Cleachtadh 1.8

1. (i) Ní de chéim 1 é x^2
   (ii) Ní de chéim 1 é $(x - 1)^{-1}$
   (iii) $y^2 = 3x + 4 \Rightarrow y = \sqrt{3x + 4}$;
   ní de chéim 1 é
2. (i) 7 (ii) 3 (iii) -3
3. (i) 2 (ii) 2 (iii) -1 (iv) 2.5
4. (i) 2 (ii) 11 (iii) 7
5. (i) 2 (ii) 12 (iii) 3
6. (i) 3 (ii) 9 (iii) -5 (iv) 1.5
7. (i) 2.5 (ii) -2

Cleachtadh 1.9

1. (i) $(4, 2)$ (ii) $(2, 5)$ (iii) $(3, 1)$
2. (i) $(3, -2)$ (ii) $(2, 5)$ (iii) $(3, 2\frac{1}{2})$
3. $(10, 5)$
4. $(10, 7)$
5. (i) $(x, y, z) = (2, 3, 1)$
   (ii) $(x, y, z) = (2, -3, 1)$
   (iii) $(x, y, z) = (5, 0, 1)$
6. (i) $(a, b, c) = (1, 4, 2)$
   (ii) $(x, y, z) = (2, 3, -1)$
   (iii) $(x, y, z) = (3, 1, -2)$
7. $(x, y, z) = (-1, 2.5, -0.5)$
8. $(a, b, c) = (1, -1, 2)$

9. $(a, b, c) = (2, 5, -6)$
10. 32 000
11. 17 mbliana, 15 bliana
12. $y = \frac{1}{2}x + 4$
13. $N_1 = 88, N_2 = 22$
14. $a = 1, b = -1$
15. $c = \frac{4}{5}, d = -\frac{4}{5}$
16. 25 lítear
17. $x = 15, y = 11$
18. $a = 0.5, u = -1.5$
19. (4, 26), (8, 13)
20. $(a, b, c) = (3, -2, 1)$
21. (i) $(x, y, z) = (3, 4, 1)$
(ii) $(x, y, z) = (6, 4, -3)$
22. $(a, b, c) = (-2, -2, 1)$

Súil Siar (Croícheisteanna)

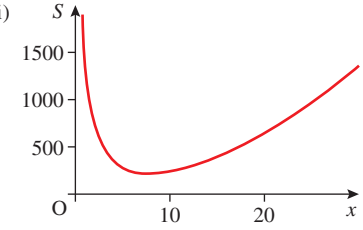
1. (i) $\frac{1}{3m^6n^7}$ (ii) $\frac{3x + 1}{5 + 4x}$ (iii) $\frac{1}{2x - 8}$
2. (i) $(x, y) = (-2, 2)$
(ii) $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right), (-2, 3)$
3. $x^2 + 2x - 1$
4. $3x^3 + 6x^2 + 3x + 33$
5. (i) $(0, 3, -3)$ (ii) $\frac{1}{2}, 2$
6. 5
7. (i) $a = 11, b = 6$ (ii) $a = 2, b = 3$
8. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
9. $(p, q, r) = (2, 3, -13)$
10. $(x, y, z) = (2, -1, 4)$
11. $6b^2 + 2$
12. (i) $3n^2$ (ii) $5n^2$ (iii) $\frac{n^2}{2}$
13. $n^2 + 3n + 2$; 10 302
14. $l = 21$ cm, $w = 15$ cm
15. (i) $r = \frac{2uv}{u + v}$ (ii) $m = \frac{v}{u}$

Súil Siar (Ardcheisteanna)

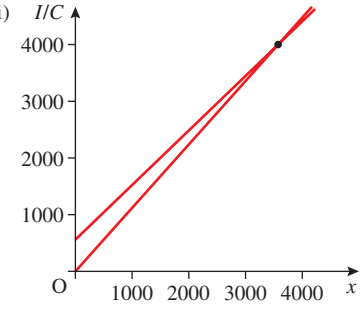
1. $\frac{n(n + 1)}{2}$; 1225
2. 0.5 m^3
3. (i) $x + y = 8.4, 0.6x + 0.4y = 0.5(x + y)$
(ii) 4.2 kg
4. Cruthúnas
5. $-\frac{1}{2}$
6. (i) 7.5 l (ii) 2.5 l
7. (i) $a = 0.28; b = 0.3$ (ii) $\frac{10}{3}$ m\s

Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

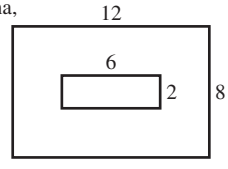
1. (a) (i) 436 (ii) 112 (iii) 0.7956
(b) €58 358
2. (ii) $x + 1.5y = 26$
(iii) 14 tholg bhunúsacha, 8 dtolg deluxe
3. (i) $h = \frac{40}{x^2}$ (ii) Cruthúnas
(iii)



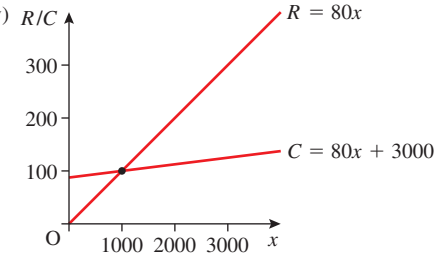
(iv) $x = 4, h = 2.5$ cm nó $x = 2.9, h = 4.76$ cm
4. (i) $C(x) = 3500 + 10.5x$
(ii) $I(x) = 0.5x$
(iii)



(iv) 3500
(v) Brabús
(vi) 5500 cluiche
5. (a) €110.40
(b) 12 chearnóg ghorma,
84 cearnóg bhán



6. (i) $C = 40x + 30\,000$
(ii) €45
(iii) 5000
(iv) $R = 80x$
(v)



(vi) 751
(vii) $P = 40x - 30\,000$

7. Líon na ndaoine sa scuaine

	(a)	(b)
4	2	1
5	3	2
6	2	3
7	3	4
8	4	2
9	3	3
10	4	4
11	5	5
12	4	3
13	5	4
14	6	5
15	5	6
70	24	19

Caibidil 2: Ailgéabar 2

Cleachtadh 2.1

1. (a) (i) $-5, 4$ (ii) $3, 4$ (iii) $-1, 5$
(b) (i) $-3, 5$ (ii) $-5, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{2}{3}, 5$
(c) (i) $-\frac{2}{5}, 3$ (ii) $-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}$ (iii) $-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}$
(d) (i) ± 3 (ii) $0, \frac{10}{3}$ (iii) $0, \frac{8}{5}$
(e) (i) $-5, \frac{3}{2}$ (ii) $-\frac{5}{3}, 2$ (iii) $-2, 1$
(f) (i) $-5, \pm 4$ (ii) $3, \pm 1$
(g) (i) $-\frac{4}{3}, \pm 2$ (ii) $-4, -3, 5$

2. (a) (i) $-0.7, 2.7$ (ii) $-3.6, 0.6$ (iii) $0.6, 2.4$
(b) (i) $0.6, 5.4$ (ii) $0.1, 2.5$ (iii) $-2.9, 0.9$

3. (a) (i) $\dfrac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}$ (ii) $\dfrac{6 \pm \sqrt{46}}{2}$
(iii) $\dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
(b) (i) $-2 \pm 2\sqrt{3}$ (ii) $\dfrac{-2 \pm \sqrt{14}}{5}$
(iii) $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

4. (a) (i) $2, 3$ (ii) $\frac{2}{3}, 2$ (iii) $-2, 3$
(b) (i) $\dfrac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$ (ii) $0, 7$
(iii) $\frac{3}{2}$

5. (a) (i) $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}$ (ii) $\dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$
(iii) $\pm\sqrt{1 \pm \sqrt{3}}$ (iv) $\dfrac{11 \pm \sqrt{41}}{4}$
(b) (i) $-\frac{3}{2}, 4$ (ii) $1, 2$
(c) $1, 2, 4$
(d) $-1, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 5$

6. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}$

7. (a) $-4.2, 1.2$ (b) $-2.3, 1.3$
(c) $-9.5, -0.5$ (d) $-1.6 \leqslant x \leqslant 0.6$
(e) $-1.6, 0.6$ (f) $-3, 1$
(g) $-3.6, 0.6$ (h) $-4.2 \leqslant x \leqslant -0.8$

8. Ní thrasnaíonn an graf an x-ais

9. (a) 21 aonad (b) 25 aonad

10. (a) $-0.5, 2$ (b) -0.8
(c) $-0.5, 2.4$

11. (i) 1 (ii) 4
Níl réadach ach aon réiteach amháin i ngach cás

12. (i) $-\sqrt{7}, 2\sqrt{7}$ (ii) $-3\sqrt{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Cleachtadh 2.2

1. (i) Cuar f (ii) Cuar h (iii) Cuar g
(iv) 1. Tá fréamhacha $= 1.5$ agus 4.5 le cuar f
2. Tá fréamhacha $= 3$ le cuar h
3. Níl fréamh réadach ar bith le cuar g

2. $A = \left(\dfrac{-b - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$

$B = \left(\dfrac{-b + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$

3. (i) $-39 < 0$ $\therefore$ Gan fréamh réadach ar bith
(ii) $17 > 0$ $\therefore$ Réadach agus difriúil atá na fréamhacha
(iii) $16 > 0$ $\therefore$ Réadach agus difriúil atá na fréamhacha
(iv) $-8 < 0$ $\therefore$ Gan fréamh réadach ar bith
(v) 0 $\therefore$ Réadach agus cothrom atá na fréamhacha
(vi) 0 $\therefore$ Réadach agus cothrom atá na fréamhacha

4. $k < -12$ nó $k > 12$

5. (i) $k = 25$ (ii) $k = \pm 12$
(iii) $k = 0, 3$

6. $k = -\frac{1}{3}, 1$

10. $k = -\frac{1}{12}$

12. $a = \dfrac{b^2}{4}; -\dfrac{2}{b}$

Cleachtadh 2.3

1. $x = -3, y = 9$ nó $x = 1, y = 1$
2. $x = -2, y = -1$ nó $x = 1, y = 2$
3. $x = -1, y = 4$ nó $x = \frac{1}{2}, y = 1$
4. $x = 1, y = 0$ nó $x = 4, y = -3$
5. $x = 3, y = 4$ nó $x = 4, y = 3$
6. $x = 2, y = 3$
7. $x = 2, y = 2$ nó $x = 5, y = 11$
8. $x = 3, y = 1$
9. $x = 2, y = 0$ nó $x = 0, y = 1$
10. $x = -2, y = -2$ nó $x = 1, y = 4$
11. $x = 1, y = 1$ nó $x = \frac{7}{2}, y = -4$
12. $x = 0, y = 3$ nó $x = -2, y = 1$
13. $t = 2, s = 3$ nó $t = -\frac{4}{3}, s = -\frac{11}{3}$
14. $t = -7, s = -5$ nó $t = 1, s = -1$
15. $t = 2, s = 1$ nó $t = 11, s = 7$

Cleachtadh 2.4

1. $-6, -5$ nó $5, 6$
2. $-6, -4$ nó $4, 6$
3. (i) $2x + 2y = 62; xy = 198$
(ii) Fad $= 22$ m, leithead $= 9$ m

4. Is iad 3, 4, 5 na sleasa agus imlíne = 12 aonad
5. $t = 2.68$ nó $t = 9.32$
6. $x = -3$ nó $x = 5$
7. 0.25 soicind nó 1.25 soicind
8. 12 cm
9. $-1, 1$ nó $7, 9$
10. 9 cm
11. Fad = 10 m, leithead = 6 m
12. $-1, 0, 1$ nó $7, 8, 9$
13. Leithead = 2m
14. Fad = 24 m, leithead = 10 m
15. 9.35 m
16. $t = 3, s = 5$
Níl luachanna diúltacha bailí
17. $(-2.2, 2.4); (6.2, -0.4)$
$k > 10$

Cleachtadh 2.5

1. (a) (i) -9 (ii) 4
(b) (i) 2 (ii) -5
(c) (i) 7 (ii) 2
(d) (i) 9 (ii) -3
(e) (i) $\frac{7}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$
(f) (i) $-\frac{1}{7}$ (ii) $-\frac{1}{7}$
(g) (i) $-\frac{10}{3}$ (ii) $-\frac{2}{3}$
(h) (i) -2 (ii) $\frac{1}{5}$
(i) (i) -2 (ii) -3
(j) (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{5}{4}$

2. (a) $x^2 + 3x - 1 = 0$
(b) $x^2 - 6x - 4 = 0$
(c) $x^2 - 7x - 5 = 0$
(d) $3x^2 + 2x - 7 = 0$
(e) $2x^2 + 5x - 4 = 0$
(f) $2x^2 + 3x - 10 = 0$
(g) $12x^2 + 3x - 4 = 0$
(h) $6x^2 + 10x + 3 = 0$

3. (i) $x^2 - 10x + 24 = 0$
(ii) $x^2 + x - 6 = 0$
(iii) $x^2 + 6x + 5 = 0$
(iv) $x^2 - (4 + \sqrt{5})x + 4\sqrt{5} = 0$
(v) $x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$
(vi) $25x^2 - 25x + 6 = 0$
(vii) $b^2x^2 - 5bx + 6 = 0$
(viii) $10x^2 - 31x + 15 = 0$

Cleachtadh 2.6

1. (i) 196 (ii) 9 (iii) $\frac{25}{4}$

2. (i) $(x - 4)^2 - 19$ (ii) $(x - 1)^2 - 6$
(iii) $(x - 1)^2$

3. (i) $(x + 2)^2 - 10$ (ii) $(x + \frac{9}{2})^2 - \frac{65}{4}$
(iii) $(x - \frac{7}{2})^2 - \frac{61}{4}$

4. (i) $(-1, -7)$ (ii) $(1, -4)$
(iii) $(-\frac{1}{2}, 2)$

5. $k > 9$
6. $2(x - 3)^2 - 11$
8. (i) $(-1, -5), (2, -1), (4, 1)$
(ii) (a) $y = (x + 1)^2 - 5$
(b) $y = x^2 + 2x - 4$
(a) $y = (x - 2)^2 - 1$
(b) $y = x^2 - 4x + 3$
(a) $y = (x - 4)^2 + 1$
(b) $y = x^2 - 8x + 17$

9. (i) 3 (ii) -2 (iii) $\frac{1}{3}$

10. Uasphointe = (3, 9)
Airde is mó = 9 n-aonad

11. (i) $C; y = (x - 3)^2 - 1$
(ii) $B; y = (x - 3)^2$
(iii) $A; y = (x - 3)^2 + 1$

12. Cuar $C: y = 16 - (x - 2)^2 \Rightarrow p = 16, a = 1, q = 2$
Cuar $D: y = 4 - (x - 2)^2 \Rightarrow p = 4, a = 1,$
$q = 2$

13. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x + 9$ nó
$f(x) = 9 - \frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{2})^2$

14. $f(x) = x^2 + 2x + 4$ nó $f(x) = (x + 1)^2 + 3$

15. (i) $f(x) = 4 - (0.1)(x - 6)^2$
(ii) $(6 - 2\sqrt{10}, 0)$ agus $(6 + 2\sqrt{10}, 0)$
(iii) $4\sqrt{10}$

Cleachtadh 2.7

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $3\sqrt{3}$ (iii) $3\sqrt{5}$
(iv) $10\sqrt{2}$ (v) $9\sqrt{2}$

2. (i) $5\sqrt{2}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $7\sqrt{2}$
(iv) $5\sqrt{3}$ (v) $9\sqrt{2}$ (vi) $7\sqrt{5}$

3. (i) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (iii) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
(iv) $2\sqrt{2}$ (v) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. (i) $4\sqrt{6}$ (ii) 30 (iii) $6 + 2\sqrt{3}$
(iv) 22 (v) 2 (vi) $a^2 - 4b$

5. (i) $\sqrt{5} - 1$ (ii) $\frac{12(3 + \sqrt{2})}{7}$
(iii) $-9 + 4\sqrt{5}$ (iv) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. (i) 2 (ii) 4
7. (i) 7 (ii) $-12 - 2\sqrt{5}$
8. (i) $4\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{6}$
(iii) $\frac{13}{2}$ (iv) $\frac{19 + 8\sqrt{3}}{13}$

10. $5(2 - \sqrt{3})$
11. $\sqrt{2}$

Cleachtadh 2.8

1. $\sqrt{2(x^2 + 4)}$ m
2. (a) $\sqrt{14}$ km
(b) (i) $2(4 - \sqrt{14})$ km
(ii) 12 shoicind

3. $(8 + 2\sqrt{6})$ km

5. $\dfrac{-9 - 5\sqrt{3}}{6}$

6. (i) $2\sqrt{a}$ (ii) $\dfrac{2}{\sqrt{a}}; 2$

7. (i) $x = 4$ (ii) $x = 5$
(iii) $x = 9$ (iv) $x = 2, 3$
(v) $x = 2$ (vi) $x = -2, 8$

8. (i) $x = 4$ (ii) $x = \frac{2}{9}, 2$
(iii) $x = 9$ (iv) $x = 2, 6$

9. $a + \dfrac{1}{a} + 1$

10. $a = 2, b = 5$

11. (i) $\sqrt{2x^2 + 8}$
(ii) $\sqrt{3x^2 + 8}; x = 4$ m

Cleachtadh 2.9

5. Fíor
7. Fíor
8. $k = 8$
9. $p = 11$
10. $(x - 1)(x + 2)$
11. $(x - 2)(x - 3)$
12. (i) $(x - 1)(x - 4)(x + 1)$
(ii) $(x - 1)(x - 3)(x - 4)$
(iii) $(x - 2)(x + 3)(x + 5)$
(iv) $(x - 1)(x + 1)(3x - 4)$
(v) $(x + 1)(x - 3)(2x + 1)$
(vi) $(x - 2)^2(2x + 5)$
13. $(x + 2)(x + 5)(2x - 1)$
14. $a = 2; (x - 1)(x + 1)$
15. $(x - 2)(x - 3)(x + 4); x = 2, 3, -4$
16. $-4, -2$
17. (i) $-1, 1, 4$ (ii) $-1, -4, 3$
(iii) $-1, 1, \frac{4}{3}$ (iv) $-1, -2, 3$
18. $a = 7, b = 2; (2x - 1); -1, -3, \frac{1}{2}$
19. $k = -8; (x - 2)(x + 6)$
20. $a = 3, b = -30; (2x + 5)$
21. $a = -5, b = 19; -1, 3, -\frac{2}{5}$
22. (i) $\left(\dfrac{b + c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}} - b$

Cleachtadh 2.10

1. (i) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
(ii) $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$
2. (i) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$
$g(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
(ii) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$
$g(x) = -2x^3 + 12x^2 - 22x + 12$
3. $a = 6, b = 3, c = -15, d = 6$
4. $a = 0, b = -7, c = -6$
5. (i) $f(x) = x^3 + 2$
(ii) $g(x) = x^3$
(iii) $h(x) = 2x^3$
$A = (2^{\frac{1}{3}}, 4)$
6. $f(2) = 16, f(5) = -5$
7. $f(0) = 6$
$f(\frac{1}{2}) = 3\frac{3}{8}$
$f(2) = -4$
8. (i) $f(x) = -1(x + 1)(x - 1)(x - 2)^2$
(ii) $a = -1, b = 4, c = -3, d = -4, e = 4$
9. (i) $a = -2$
(ii) $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^2$
$g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2(x - 1)^2$
10. (i) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$
(ii) $x^3 + 4x^2 + 3x = 0$
(iii) $4x^3 - 5x^2 - 23x + 6 = 0$
(iv) $2x^3 - 13x^2 + 22x - 8 = 0$
11. (i) $f(x) = 2x^3 - 17x^2 + 27x + 18$
(ii) $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 37x + 20$
12. $a = -\frac{1}{3}, b = -18$
13. (i) $-1, 0, 2$
(ii) $-1\frac{1}{4}, 0, 2\frac{1}{4}$
(iii) $-1.3, 0, 2.3$
14. (i) $V = x(x - 1)(x + 1)$
(ii) $x = 3$ cm
15. $V = \dfrac{\pi}{4}h^3 = ah^3$
$a = 0.79$
$V = 1051.49\ \text{cm}^3$
$d = 6.5$ cm
16. $x = 4.8$ (ón ngraf); $x = 4.84$ (ailgéabar);
$x = 3.6$

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. $x = 1, 5; t = -2, -1, 3, 6$
2. $x = 1 \pm \sqrt{13}$
3. $p > 1$
5. $a = -21, b = 8$
6. (i) Ceann amháin de 2, −3, 5
(ii) $(x - 2)(x + 3)(x - 5)$
(iii) Is iad 2, −3, 5 na fréamhacha
7. (i) Fréamhacha réadacha
(ii) Fréamhacha samhailteacha
(iii) Fréamhacha samhailteacha
8. $y^2 - 12y + 27 = 0; x = 1, 2$

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. $2(x - 1)^2 - 7$
(i) $1 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
(ii) $(1, -7)$
2. $11 - 4\sqrt{6}$
3. $\dfrac{\sqrt{35} + 5}{25}$
4. 7
5. (i) Luach beagán níos nó ná 1 atá ar t
(ii) $t = 0.90$ (iii) 0.486%
6. $p = -\frac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{1 + 4n^2\sigma^2}}{2}$

7.

	$k < 0$	$0 < k < \frac{1}{4}$	$k > \frac{1}{4}$
k	*Diúltach*	*Deimhneach*	*Deimhneach*
$4k$	*Diúltach*	*Deimhneach*	*Deimhneach*
$4k - 1$	*Diúltach*	*Diúltach*	*Deimhneach*
$k(4k - 1)$	*Deimhneach*	*Diúltach*	*Deimhneach*

$0 < k < \frac{1}{4}$

9. $B(-\sqrt{2}, 1 - 5\sqrt{2})$ $A(\sqrt{2}, 1 + 5\sqrt{2})$

10. $-3 \geqslant k > 0$

11. -6

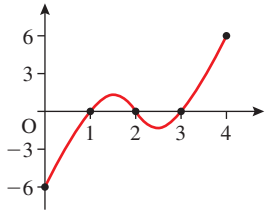
12. $(2, -7), \left(-\frac{13}{5}, \frac{34}{5}\right)$

13. Fad = 18 m, leithead = 6 m

14. $-4 \geqslant y \geqslant 0$

15. $y = -2x^2 - x + 5$

16. (iii) $f(0) = -6, f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0, f(3) = 0, f(4) = 6$



17. (i) 2, 5
(ii) $f(x) = p(x - 2)(x - 5)^2$
(iii) $a = 2, b = -24, c = 90, d = -100$
(iv) $f(x) = -2x^3 + 24x^2 - 90x + 100$
(v) $f(x) = -2x^3 - 24x^2 - 90x - 100$

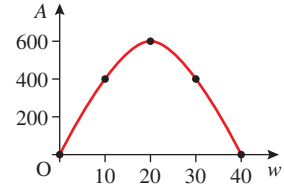
Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. (i) $a = 0.0002$
(ii) 10 n-uair an chloig
(iii) Toisc go bhfuil a chomh beag sin, ní thugtar faoi deara éifeacht at^3 go dtí go bhfuil sé gar do 10

2. (i) $6x^2 + 7xy + 2y^2$
(ii) $k = 7$
(iii) $x = \frac{1}{2}$ m
$3.5y + 2y^2 = 1$
$\Rightarrow y = \frac{1}{4}$ m

3. (a) $V = x(96 - 4x)(48 - 2x) = 8x(24 - x)^2$
(b) (i) $0 < x < 24$
(ii) Ag A atá an uastoirt
Níl aon toirt ann ag B agus C
(iii) Uastoirt = 16 400 cm³; x = 8 cm
(iv) 15 680 cm³ (v) 14 440 cm³
(vi) 9720 cm³
(c) $a = 4, b = 24, c = 48$

4. (ii) Fréamhacha = 0, 40



(iii) $A = 600 - (w - 20)^2$
Uasachar = 600 m²
(iv) w = 20 m
(v) Leithead = 20 m, fad = 15 m

5. (a) (i) 1 soicind nó 3 shoicind
(ii) 4.5 soicind
(b) 4.45 soicind
(c) $h = 6 - (t - 2)^2; (p, q) = (2, 6)$

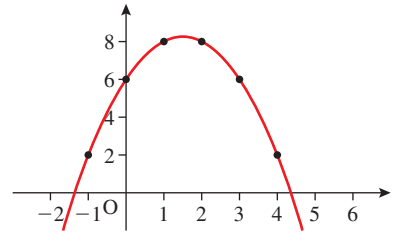
6.

Líon na méaduithe ar an bpraghas	Praghas sa rothar	Líon na rothar	Ioncam iomlán (I)
	€12	36	€432
Méadú amháin	€12.5	34	€425
2 mhéadú	€13	32	€416
3 mhéadú	€13.5	30	€405
x méadú	$12 + 0.5x$	$36 - 2x$	$(12 + 0.5x) \times (36 - 2x)$

(i) $I = (12 + 0.5x)(36 - 2x) = 432 - 6x - x^2$
(ii) $441 - (x + 3)^2$
(iii) €441
(iv) An praghas cíosa a laghdú

7. (a) $A = xy + \frac{\pi}{2}x^2$
(b) (i) $y = 100 - \pi x$
(ii) $A = 100x - \frac{\pi}{2}x^2$
(iii) $0 \leqslant x \leqslant \frac{100}{\pi}$
(c) 12.4 m
(d) (i) $\frac{x^2}{50}\left(100 - \frac{\pi}{2}x\right)$
(ii) 247.6 m²
(iii) 18.8 m

8. (a) $A\left(\frac{3 - \sqrt{33}}{2}, 3 - \sqrt{33}\right)$,
$B\left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2}, 3 + \sqrt{33}\right)$
(b) $d = 6 + 3x - x^2$
(c)

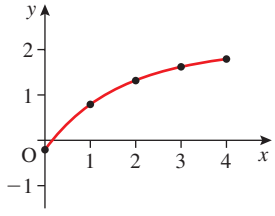


(d) $y = 8\frac{1}{4} - (x - 1\frac{1}{2})^2$

(e) $(1\frac{1}{2}, 8\frac{1}{4})$

(f) $0 \leqslant d \leqslant 8\frac{1}{4}$

9. (iii)



(iv) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

(v) (a) $k < 0$ (b) $k = 0$ (c) $k > 0$

Caibidil 3: Uimhreacha Coimpléascacha

Cleachtadh 3.1

1. (i) $3\sqrt{2}$ (ii) $2\sqrt{3}$ (iii) $3\sqrt{5}$ (iv) $2\sqrt{7}$

2. (i) $8\sqrt{2}$ (ii) $11\sqrt{3}$

3. (i) $\mathbb{Z}\mathbb{N} = \{-3, -5\}$

(ii) $\mathbb{Q}\mathbb{Z} = \{\frac{2}{3}, -\frac{7}{8}\}$

(iii) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \{\sqrt{2}, \pi\}$

4. (i) Is é $\mathbb{Z}$ tacar na slánuimhreacha deimhneacha agus diúltacha, lena n-áirítear nialas.

(ii) Is é $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ tacar na n-uimhreacha cóimheasta (codáin) nach féidir a shimpliú go slánuimhir

(iii) Is é $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{N}$ tacar na n-uimhreacha cóimheasta (codáin) nach féidir a shimpliú go huimhir aiceanta

(iv) Is é $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ tacar na réaduimhreacha go léir ach amháin slánuimhreacha

(v) Is é $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ tacar na réaduimhreacha go léir ach amháin uimhreacha cóimheasta, i.e. uimhreacha éagóimheasta

5. (i) $3\sqrt{5}$ (ii) $-\sqrt{2}$ (iii) $11\sqrt{2}$ (iv) $-3\sqrt{3}$

6. Tógálacha

7. $3\sqrt{2}$, tógáil

8. $2\sqrt{3}$, tógáil

9. Tógáil

10. $9\sqrt{5}$

11. $\sqrt{3}, \pi, e, \sqrt[5]{2}$

12. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$

13. $4\sqrt{2}, 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

14. (i) $x = -1$

(ii) Luach ar bith ar x a fhágann gur slánchearnóg é 3 − x

Cleachtadh 3.2

1. (i) $2i$ (ii) $6i$ (iii) $3\sqrt{3}i$ (iv) $2\sqrt{5}i$

2. (i) $\pm 3i$ (ii) $\pm 2\sqrt{3}i$

3. (i) $8 + i$ (ii) $10 - 6i$ (iii) $3 + 0i$
(iv) $-5 + 5i$ (v) $0 + 3i$ (vi) $3 - 2i$

4. (i) $1 + 2i$ (ii) $1 - 9i$ (iii) $5 - 10i$
(iv) $2 - 4i$ (v) $3 - 10i$ (vi) $-7 + 5i$

5. (i) $0 + 13i$ (ii) $17 - 17i$ (iii) $5 - 31i$
(iv) $25 + 0i$ (v) $26 - 0i$ (vi) $5 - 12i$

6. (i) $6 + 12i$ (ii) $7 - 3i$ (iii) $7 + 7i$
(iv) $-9 + 3i$ (v) $10 + 10i$ (vi) $10 - 10i$
(vii) $2 + 4i$ (viii) $2 + 16i$

7. (i) $1 + 4i, 1 - 4i$ (ii) $2 + 3i, 2 - 3i$
(iii) $5 + i, 5 - i$ (iv) $4 + 6i, 4 - 6i$

8. $2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

9. $i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1$
Ó tá $i^4 = i^8 = i^{12} = \ldots 1$, roinn cumhacht i ar 4 agus faigh an fuílleach,
i.e. $i^{29} = i^{4.7+1} = (i^4)^7 i^1 = i^1$

10. (i) -1 (ii) $-i$ (iii) $-i$
(iv) i (v) 1

11. (i) -2 (ii) 0

12. (i) i (ii) -24 (iii) $8i$

13. $3i$

Cleachtadh 3.3

1. (i) $3 - 4i$ (ii) $2 + 6i$
(iii) $-5 + 2i$ (iv) $-8 - 3i$

2. (i) $2 - 5i$ (ii) $-3 + 4i$
(iii) $1 - 7i$ (iv) $-5 - i$

3. (i) $\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$ (ii) $\frac{23}{26} + \frac{11}{26}i$
(iii) $1 - 2i$ (iv) $\frac{4}{13} - \frac{19}{13}i$

4. (i) $40 + 0i$ (ii) $4 + 0i$
(iii) $0 + 12i$ (iv) $-32 + 24i$

5. (i) $\frac{15}{17} + \frac{25}{17}i$ (ii) $-\frac{9}{4} - \frac{7}{4}i$
(iii) $\frac{12}{5} - \frac{6}{5}i$ (iv) $3 + 2i$
(v) $\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$ (vi) $\frac{43}{85} - \frac{49}{85}i$

6. (i) $x = 4, y = -2$ (ii) $x = 8, y = -1$
(iii) $\frac{13}{5} + \frac{9}{5}i$ (iv) $x = -5, y = -12$

7. (i) $a = -11, b = 22$ (ii) $a = -10, b = -5$

8. $x = \frac{2}{3}, y = 1$

9. $p = -1, q = -2$

10. $2 + i, -2 - i$

11. $x = 3, y = -1$ agus $x = -3, y = 1$

12. (i) $2 - 4i, -2 + 4i$ (ii) $1 + 4i, -1 - 4i$
(iii) $5 - 4i, -5 + 4i$

13. (i) $1 + 2i$ (ii) $13 + 13i$

Cleachtadh 3.4

1. Breac

2. (iii) $2 - i$ (iv) $-4 - 3i$
(v) $-2 + 4i$ (vi) $6 - 2i$
(vii) $-11 + 2i$ (viii) $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

3. (i) 10 (ii) $6 + 0i$
(iii) $\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$ (iv) $10 + 10i$

4. (c) Ach na reanna a cheangal le chéile faighimid comhthreomharán

5. z a shuimiú le gach ceann, aistríonn sé gach pointe

6. (i) $-2 + 3i$ (ii) $-3 - 2i$ (iii) $2 - 3i$

7. (i) $\sqrt{29}$ (ii) $2\sqrt{5}$ (iii) $2\sqrt{5}$ (iv) $\sqrt{10}$
8. $-2+5i, -2-5i, 5+2i$
9. (i) $\sqrt{\frac{10}{13}}$ (ii) $10\sqrt{2}$ (iii) $\frac{\sqrt{34}}{34}$
10. Fíor
11. $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i$
12. $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}$, tá
13. Tá
14. (i) $s = \pm 6$ (ii) $t = \pm 4\sqrt{21}$
15. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
16. Ciorcal, lárphointe (1, 0), ga = 1
17. Caithfidh z_1 agus z_2 a bheith ina n-uimhreacha réadacha araon nó ina n-uimhreacha samhailteacha araon nó $z_2 = az_1$, i.e. caithfidh z_2 agus z_1 a bheith ar an líne chéanna ón mbunphointe

Cleachtadh 3.5

1. Breac
2. Pointí comhlíneacha
3. (i) Aistriú $-3-4i$
   (ii) Breac
   (iii) Rothlú (i^2) agus ansin aistriú (+3)
4. Breac
5. $z_2 = 2+6i, z_3 = -6+2i$
6. (i) $a = 3$
   (ii) $b = i$
   (iii) $c = i^2 = -1$
7. Breac
8. (i) Aistriú de chuid an phlána
   (ii) Ríochan de réir fachtóir k
   (iii) Ríochan agus rothlú
9. Breac
10. (i) Ríochan de réir fachtóir 3
    (ii) Crapadh de réir fachtóir $\frac{1}{2}$

Cleachtadh 3.6

1. $-2-4i$
2. (i) $1 \pm 4i$ (ii) $-2 \pm \sqrt{3}i$
3. (i) $z^2 - 2z + 10 = 0$ (ii) $z^2 + 4z + 5 = 0$
   (iii) $z^2 - 8z + 20 = 0$ (iv) $z^2 + 25 = 0$
4. Cruthúnas
5. $-2-2i, 1$
6. $2-3i, \frac{1}{2}$
7. Níl na comhéifeachtaí réadach
8. $a = 2, b = 2$
9. $a = 1, b = 1$. Is iad na fréamhacha ná 1, $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
10. $z^2 + 4z + 5 = 0, 3, -2 \pm i$
11. $z^2 + 6z + 13 = 0: z^3 + 4z^2 + z - 26 = 0$
12. $z^3 - 2z - 4 = 0$
13. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \beta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Cleachtadh 3.7

1. (i) $0+4i$ (ii) $-\sqrt{3}+i$
   (iii) $-1+i$ (iv) $1+\sqrt{3}i$
2. (i) $2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$ (ii) $3, -\frac{\pi}{2}$
   (iii) $4, 0°$ (iv) $2, \frac{5\pi}{6}$
3. (i) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
   (ii) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
   (iii) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
   (iv) $\sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
   (v) $4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
   (vi) $5(\cos\pi + i\sin\pi)$
   (vii) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$
   (viii) $1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
4. (i) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
   (ii) $1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
5. (i) $-\sqrt{3}+i$ (ii) $-1-\sqrt{3}i$
   (iii) $\sqrt{3}-i$
   (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{5\pi}{6}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$
   (iv) $\frac{11\pi}{6}$, rothlú 90
6. (i) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
   (ii) $2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
   (iii) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
7. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,
   $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
8. $t = -8$

Cleachtadh 3.8

1. (i) $8(\cos\pi + i\sin\pi)$
   (ii) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
2. $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
3. (i) $3, \frac{\pi}{2}$ (ii) $4, \frac{\pi}{3}$
   (iii) $12, \frac{5\pi}{6}$ (iv) $\frac{3}{4}, \frac{\pi}{6}$
4. $12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
5. $\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
6. $2+2\sqrt{3}i$

7. $\cos \pi + i \sin \pi$
8. (a) $8(\cos \pi + i \sin \pi)$
   (b) $16\cos\left(\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right.$
   $\equiv 16\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\Big)$
9. (i) $\frac{1}{3}(\cos(\pi) - i \sin(\pi))$
   (ii) $-\frac{1}{3} + 0i$
10. $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$
   (a) $z^2 = 16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$
   $= 16\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
   $= -8 - 8\sqrt{3}i$
   (b) $z^3 = 64(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = 64 + 0i$
11. Cruthúnas
12. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
13. Cruthúnas

Cleachtadh 3.9

1. (i) $0 + i$ (ii) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
   (iii) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (iv) $1 + 0i$
   (iv) $1 + 0i$ (v) $0 + i$
   (vi) $1 + 0i$ (vii) $0 - i$
   (viii) $0 - i$
2. $-2, -2\sqrt{3}i$
3. $0 + 243i$
4. (i) $\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$
   (ii) $\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
5. (i) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$
   (ii) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$
   (iii) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$
   (iv) $3\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
   (v) $6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$
   (vi) $\frac{2}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$
6. (i) $-4 + 0i$ (ii) $-8 + 0i$ (iii) $-64 + 0i$
7. -4
8. $4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right); -\frac{1}{256} + \frac{1}{256}i$
9. (i) $-1728 + 0i$ (ii) 4096
10. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right); -1$
11. $-128 + 128\sqrt{3}i$

Cleachtadh 3.10

1. (i) $-1 - 0i$ (ii) $+1 + 0i$
   (iii) $-1 + 0i$ (iv) $1 + 0i$
2. (i) $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$
   (ii) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
3. Cruthúnas
4. $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$
5. $-2, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$
6. $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right); \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i$
7. (a) $(\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi), 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$
   $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
8. $-3i, \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
9. (i) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}i$
   (ii) $\sqrt{3} - i, -\sqrt{3} + i$
   (iii) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
10. $\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right),$
   $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Cruthúnas

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. $2\sqrt{5}$
2. $x = 5, y = 4$
3. $-2 \pm 3i$
4. $24 + 10i$, cruthúnas
5. (i) $-2 - 2\sqrt{3}i$ (ii) $p = 2$
6. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right); z^4 = -4 + 0i$
7. $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$
8. $2 - 3i$
9. Tá
10. $1 - 3i$
11. i
12. $f(z) = z^2 - (1 + 7i)z - 14 + 5i$
13. (i) $1 - 2i$ (ii) $3 + 3i$ (iii) $-2 - 5i$
14. (i) Rothlú $(-90°)$ agus ríochan de réir fachtóir $1\frac{1}{2}$
   (ii) An t-aistriú $(4 - i)$
   (iii) Má tá $z = x + iy, z_1 = -1\frac{1}{2}i$
   (iv) $z_3 = (4 - i)$

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$
2. $2 - 3i, \frac{1}{2}$
3. $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right); 2^{10}(\sqrt{3} - i)$
4. $p = -5 - 4i, q = 1 + 7i$

5. $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Cruthúnas

6. $\overline{p} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right), \overline{p}p = 4$

7. $-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$

8. $k = -\frac{1}{3}$

9. i

10. $2 + i$

11. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

12. $p = 30, 1 + 3i, -3$

13. $x = 3, y = -1$ agus $x = -3, y = 1$

14. $t = +\sqrt{2}, -\sqrt{2}; \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i, 1 + 2i, 1 - 2i$

15. $-2 + i, -2 - 3i$

16. $p = 4, q = -1$ nó $p = -4, q = 1; z = -1$ nó $z = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. (i) $pq = 6\sqrt{3} - 6i$
   (ii) $|p| = 3, |q| = 4, |pq| = 12, |p + q| = 5$

2. (i) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
   (iii) $1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
   (iv) Cruthúnas

3. (i) $p - 3q + (3p + q)i$
   (ii) Cruthúnas
   (iii) $p = -4, q = 2$

4. (i) 3 (ii) $\frac{5\pi}{12}$ (iii) 9
   (iv) 1 (v) $\frac{\pi}{3}$ (vi) $\frac{\pi}{2}$
   (a) Fíor (b) Fíor

5. $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i, z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i, z^6 = -64$
   (iii) Rothlú agus ríochan (rothlú 60°)

6. $1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right); -1$

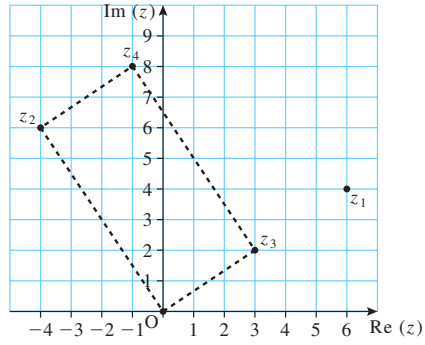
7. Caithfidh na pointí 0, z_1, z_2 a bheith comhlíneach

8. (i) $ac - bd = 1, ad + bc = 0$
   (ii) $b = \frac{-d}{c^2 + d^2}, a = \frac{c}{c^2 + d^2}$
   (iii) Cruthúnas
   (v) Cruthúnas

9. Cruthúnas

10. (a) (i) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
    (ii) $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

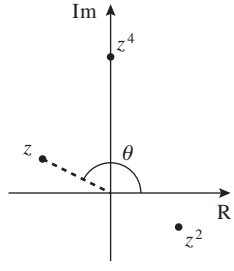
    (b) (i)



    (ii) $k = \frac{1}{2}$
    (iii) $z_3 = kz_1$. Seasann sé seo do ríochan feadh líne tríd an mbunphointe,i.e. is iad z_3 agus z_1 an t-aon dá phointe amháin atá ar aon líne leis an mbunphointe

11. (a) (i) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
    (ii) $16 - 16i$

    (b) (i)



    (ii) $\theta = 150^\circ\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
    (iii) Má tá $|z| > 1$
    tá $|z^2| > |z|$
    agus tá $|z^3| > |z^2|$ i.e. déanann na pointí bís amach ón mbunphointe.

    (c) (i) $z^2 = 2a^2i, z^4 = -4a^4, z^6 = -8a^6i$
    (ii) Déanann na pointí bís amach ón mbunphointe agus tá siad teoranta don ais réadach agus don ais shamhailteach

12. (i) $z^k = (\cos k\theta + i\sin k\theta)$
    (ii) Cruthúnas
    (iii) $\cos k\theta = \frac{1}{2}(z^k + z^{-k})$,
    $\sin k\theta = \frac{1}{2i}(z^k + z^{-k})$
    (iv) Cruthúnas
    (v) $\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\theta, a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{8}$

Caibidil 4: Seichimh – Sraitheanna – Patrúin

Cleachtadh 4.1

1. (i) 30, 36, 42 (ii) 27, 32, 37
(iii) 9.5, 10.7, 11.9 (iv) −10, −13, −16
(v) 38, 51, 66 (vi) 46, 38, 30
(vii) −15, −20, −25 (viii) −28, −19, −10
(ix) 54, 162, 486 (x) 30, 42, 56
(xi) $-\frac{3}{4}, -1\frac{1}{4}, -1\frac{3}{4}$ (xii) 16, 22, 29
(xiii) 35, 48, 63 (xiv) 48, −96, 192
(xv) $\frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{56}$

2. (i) 2, 6, 10, 14 (ii) 4, 9, 16, 25
(iii) −1, 0, 3, 8 (iv) 8, 15, 24, 35
(v) 0, 7, 26, 63 (vi) $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}$
(vii) 2, 4, 8, 16 (viii) −3, 9, −27, 81
(ix) 2, 8, 24, 64

3. (i) 5, 9, 13, 17 (ii) 21 cm

4. (i) 1, 2, 4, 7, 11, 16 (ii) 8

5. $u_1 = 1, u_5 = 17, u_{10} = 37$

6. $u_1 = 4, u_6 = -128, u_{11} = 4096$

7. (i) 5, 9, 13, 17, 21, 25
(ii) 1, 5, 10, 17, 26, 37
(iii) 2, 4, 8, 16, 32, 64

8. (i) C (ii) B (iii) D (iv) A

9. (i) $n + 4$ (ii) $2n$ (iii) $3n - 1$
(iv) n^2 (v) $n^2 + 1$ (vi) $(-1)^n$
(vii) $4n - 3$ (viii) $\frac{1}{n}$ (ix) $\frac{n+1}{n+2}$
(x) $(n + 1)(n + 2)$

10. Déantar an seicheamh ach an dá théarma roimhe sin a shuimiú; 34, 55, 89, 144

11.

1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

(i) 1, 2, 3, 4, 5, … $T_n = n$
(ii) 1, 3, 6, 10, 15, … $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$
(iii) 1, 2, 4, 8, 16, … $T_n = 2^{n-1}$
(iv) 3, 6, 10, 15, 21, … $T_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Cleachtadh 4.2

1. (i) $T_n = 5n + 3, T_{22} = 113$
(ii) $T_n = 20n - 4, T_{22} = 436$
(iii) $T_n = 13 - 3n, T_{22} = -53$

2. 3, 8, 13, 18

3. (i) 21 (ii) 20 (iii) 32

4. (i) $a = 4, d = 3$
(ii) 4, 7, 10, 13, 16
(iii) $T_{20} = 61$

5. (i) 8 dtíl dhearga agus 22 tíl oráiste
(ii) Ní bheidh mar $T_n = 3n + 6 \neq 38$.

6. $a = 3, d = 2$; 3, 5, 7, 9, 11, 13

7. (i) $k = 4$
(ii) $p = -2$

8. (i) 12, 20, 28; $T_n = 8n + 4$
(ii) 124
(iii) cruth 20

9. $d = 4$ i.e. tairiseach ⇒ is seicheamh comhbhreise é.

10. $d = 2n + 3$ ∴ ní tairiseach é.

11. (i) 8
(ii) 49
(iii) $T_n = n^2 + 8$
(iv) Cruthúnas

12. (i) Níl, mar $T_n = 4n + 2 \neq 87$
(ii) Ní tairiseach é $T_n - T_{n-1}$
(iii) 5 leibhéal chríochnaithe agus 32 fágtha.

13. 9 seachtaine

Cleachtadh 4.3

1. (i) $S_n = 2n^2 - n; S_{20} = 780$
(ii) $S_n = 51n - n^2; S_{20} = 620$
(iii) $S_n = \frac{n^2 + 19n}{20}; S_{20} = 39$
(iv) $S_n = 2n^2 - 9n; S_{20} = 620$

2. (i) $n = 12, S_{12} = 336$
(ii) $n = 100, S_{100} = 5050$
(iii) $n = 20, S_{20} = 460$

3. 7 dtéarma

4. $a = 2, d = -3; S_{10} = -115$

5. 10 seachtaine

6. (i) 69 (ii) 54 (iii) 5050

7. (i) $\sum_{n=1}^{31} 4n$ (ii) $\sum_{n=1}^{29} \frac{n-21}{2}$
(iii) $\sum_{n=1}^{451} \frac{n+99}{10}$

8. 3, 7, 11, 15, 19

9. $S_{33} = 1980$

10. (i) 51 fáinne
(ii) 101 fáinne; $S_{20} = 1070$

11. 14 théarma; $d = 4$

12. 4950

13. $a = 3.5, d = 0.1; S_{30} = 148.5$

14. 60

Cleachtadh 4.4

1. (i) $r = 3$; 243, 729
(ii) $r = \frac{1}{3}; \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$
(iii) $r = -2$; −16, 32
(iv) $r = -1$; 1, −1
(v) Ní seicheamh comhbhreise é
(vi) $r = a; a^5, a^6$
(vii) $r = 1.1$; 1.4641, 1.61051
(viii) Ní seicheamh comhbhreise é
(ix) Ní seicheamh comhbhreise é
(x) $r = 6$; 972, 5832

2. (i) $a = 5, r = 2; T_{11} = 5120$
(ii) $a = 10, r = 2.5; T_7 = 2441.41$
(iii) $a = 1.1, r = 1.1; T_8 = 2.1436$
(iv) $a = 24, r = -0.5; T_{10} = -0.046875\left(-\frac{3}{64}\right)$
3. $a = 4, r = 3; 4, 12, 36, 108, 324, \ldots$
4. $r = 3$
5. $-16, 4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}$
6. Is seicheamh comhbhreise é A
Ní seichimh chomhbhreise iad B, C, D
7. $n = 6; 4, 6, 9, 13.5$
8. $a = -7, r = -3; T_n = -7(-3)^{n-1}$
9. 6.75
10. $1, 3, 9, 27$ nó $9, 3, 1, \frac{1}{3}$
11. $3, 6, 12, 24, 48$
12. $6, 4\frac{1}{2}, 3\frac{3}{8}, 2\frac{17}{32}$
13. $40, -20, 10, -5$
14. (i) $x = -1\frac{1}{2}; -4\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ nó $x = 4; 1, 4, 16$
(ii) $x = 3\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}$ nó $x = -2; -1, 2, -4$
(iii) $x = 6; 4, 6, 9$
(iv) $x = 10; 4, 20, 100$
15. Cruthúnas
16. Ní hea.
17. (i) $n = 7$ (ii) $n = 6$
18. (i) $18, 12, 8, \frac{16}{3}$ (ii) $T_n = 27(\frac{2}{3})^n$
(iii) 0.21 m
19. (i) €4000
(ii) €4120, €4243.6, €4370.91, €4502.04
(iii) €5375.67
(iv) 23 bliain
20. $r = 2\%$

Cleachtadh 4.5

1. $S_{10} = 59\,048$
2. $n = 6; S_6 = 2016$
3. $S_8 = 255$
4. $S_{10} = 63.94$
5. -728
6. 8 dtéarma; $S_8 = 546\frac{2}{3}$
7. $4, 16, 64; S_6 = 5460$
8. $S_8 = 19\,680$
9. $S_{10} = 5.994$
10. (i) $\frac{7}{9}$ (ii) $\frac{35}{99}$ (iii) $\frac{7}{30}$
(iv) $\frac{10}{27}$ (v) $\frac{161}{990}$ (vi) $\frac{53}{165}$
11. $S_n = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}; S_\infty = 2, n = 11$

Cleachtadh 4.6

1. (i) $T_n = 4n + 1$ (ii) $T_n = 3n - 2$
(iii) $T_n = 5n + 6$
2. (i) $T_n = 3 - n$ (ii) $T_n = 2 - 2n$
(iii) $T_n = 2n - 8$
3. (i) $10\,150\,\text{mm}^2$ (ii) 560 mm
4. (i) $900\,\text{cm}^2$ (ii) An 21ú dearadh
5. (i) $10\,100\,\text{cm}^2$ (ii) An 15ú triantán
6. (i) $T_n = 2n^3 + n^2 + 4n - 1$
(ii) $T_n = n^3 - 4n^2 + n + 5$
(iii) $T_n = n^3 - 4n + 2$
7. (a) $T_n = n^2 - 1$; 575 til gheal, 1 til dhorcha
(b) $T_n = n^2 - 2$; 574 til gheal, 2 thíl dhorcha
(c) $T_n = n^2 - n$; 552 til gheal, 24 til dhorcha
8. (i) $T_n = 3n^2 + 4$
(ii) $T_n = 2n - n^2$
(iii) $T_n = 2n^3 + n - 4$
(iv) $T_n = 4n - 6$
(v) $T_n = 3n^3 + 2n^2 - 1$

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. (i) $7, 10, 13, 16$ (ii) $5, 11, 17, 23$
(iii) $1, 2, 4, 8$ (iv) $20, 30, 42, 56$
(v) $2, 9, 28, 65$
2. $a = 79, d = -4$
3. $r = \frac{2}{3}$
4. (i) $r = -2; T_n = (-2)^n$
(ii) $r = \frac{1}{2}; T_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
(iii) $r = -3; T_n = 2(-3)^{n-1}$
5. (i) $T_n = 8n + 4$ (ii) 250 ciúb
6. (i) $r = -3$ (ii) $a = -7$
7. Míniú
8. 19 900
9. 195
10. 280

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. (i) 12 lúman (ii) $T_n = 2000\left(\frac{3}{5}\right)^n$
(iii) An 5ú scáthán
2. (i) $t = \dfrac{\ln 2}{\ln(1 + i)}$
(ii) (a) 35 bliain
(b) 14.2 bliain
(c) 7.3 bliain
3. (i) $10 + 2(6 + 3.6 + 2.16 + \ldots)$
(ii) Sraith iolraíoch go héigríoch
(iii) 40 m
4. (i) $T_n = 3(2)^{n-1}$
(ii) An 20ú téarma
5. (i) €4.295×10^7
(ii) €1.845×10^{17}
6. $5, 11, 17$
7. (i) $V = P(1 - i)^a$
(ii) €14 953
(iii) Deireadh an 12ú bliain
8. (i) $1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}$
(iii) $k = -1$
9. (ii) $T_n = 6n - 2$
(iii) $2n(6n^2 + 3n - 1)$
10. $\frac{1}{2}\log_2 x; r = \frac{1}{2}; k = 2$

Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. (i) $T_2 = 4a + 2b + c; T_3 = 9a + 3b + c;$
   $T_4 = 16a + 4b + c$
   An chéad difríocht $= 3a + b; 5a + b; 7a + b$
   An dara difríocht $= 2a, 2a$
   (ii) (a) $2a$ (is tairiseach é a)
   (b) $3a + b$
   (iii) An chéad difríocht = 7, 13, 19
   An dara difríocht = 2
   (iv) $T_n = 3n^2 - 2n + 4$
   (v) $T_{20} = 1164$
2. (i) $T_n = 40(0.69)^n$
   (ii) 69%
   (iii) 27.6, 19.04, 13.14, 9.07, 6.26
   (v) 9 bpreab
   (vi) 9 boreab
3. (i) Scéim 1: $S_n = n(n + 19)$
   (ii) Scéim 2: $S_n = 400\left[\left(\frac{21}{20}\right)^n - 1\right]$
   (ii) Scéim 1
   (iii) An 16ú seachtain
4. (i) 136 lítear (ii) Cruthúnas
   (iii) 872 lítear
5. (i) Cruthúnas (ii) 2020
   (iii) €22 657 (iv) 2.8%

Caibidil 5: Matamaitic an Airgeadais

Cleachtadh 5.1

1. €4031.75
2. €6092.01, €1092.01
3. $r = (1 + i)^{\frac{1}{12}} - 1$
4. (i) 0.49% (ii) 0.21% (iii) 0.33%
5. 4.5%
6.

Bliain	*Príomhshuim*	*Ús*
1	15 000	525
2	15 525	543.83
3	16 068.38	562.39
4	16 630.77	582.07
5	17 212.85	602.45

7. 1.98%
8. €27 830.10
9. (i) €14 375.34
   (ii) €15 892.57
   (iii) €17 220.86
10. €6627.09
11. €16 822.61
12. 20.15 bliain
13. €422 049.95
14. 20.01 bliain
15. 0.4867%; €56.88; 3
16. €15 203.66

Cleachtadh 5.2

1. (i) €13 311.16 (ii) €5906.23
2. €400.82
3. (i) €25 432 (ii) €15 618.43
4. (i) €57 344 (ii) €28 688.075
   (iii) €151 540.50 (iv) €65 508.43
5. $t = 5$ bliana
6. 6166 kg
7. (i) 7.8% (ii) 13.53 bliain
8. (i) €300 (ii) €446.27
9. (i) €12 182.4 (ii) €4547.06
   (iii) €2357.19
10. (i) 36% (iii) −1600
    (iv) (4.2, 1280) (v) €859

Cleachtadh 5.3

1. €790.66; €70.66
2. (i) 0.33% (ii) €1148.55
3. €11 265.95
4. Cruthúnas
5. Cruthúnas
6. $P(1.09) + P(1.09)^2 + \ldots P(1.09)^5; A = €1000$
7. €5257.31
8. €1017.23
9. €371.49
10. Cruthúnas
11. (i) €14 978.13 (ii) €23 768.41

Cleachtadh 5.4

1. €1178.66
2. €103 766.07
3. €614; €565; €536; €72 394; €94 455; €117 798
4. Plean B
5. €17 738.11
6. Is fearr an dara tairiscint
7. €13 068.78

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. €6335.93
2. €36 778.58
3. €1023.78
4. €20 344.37
5. 16.1%; 34.5%
6. $200\,(1.0075) + 200(1.0075)^2 + 200(1.0075)^3 + \ldots$
   $a = 200(1.0075), r = (1.0075)$
   $S_5 = 200(1.0075)\left[\frac{1.0075^5 - 1}{0.0075}\right]$
7. €9560.51
8. (i) €19 000.13 (ii) €33 385.23

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. (i) €211 205.4 (ii) €32 910.04
2. (i) €100 000: tugann sé €964 629.32;
   (ii) €1000: tugann sé €919 857.37
3. $i = 5\%$
4. €74 734
5. $i = 8.75\%$

6.

Ciste pinsin	Ús
127 953	3838.59
116 791.59	3503.75
105 295.38	3158.86
93 454.24	2803.63
81 257.87	2437.74
68 695.61	2060.87
55 756.48	1672.69
42 429.17	1272.88
28 702.01	861.06
14 563.07	436.89

Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. €87 422.1; €11 954.75

2. (i) €673 292.26 (ii) €7173.3
(iii) €13 435.36

3. (i) $€P = \dfrac{€M(i)(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$
(ii) $i = 0.72\%$ go míosúil
(iii) 321
(iv) 26 bliain 9 mí

4. (i) 13 bliana 2 mhí
(ii) €160 034

5. (i) $A + A(1.04) + A(1.04)^2 + A(1.04)^3$
(ii) $S_{26} = A\left(\dfrac{(1.04)^{26} - 1}{1.04 - 1}\right)$
(iii) €485 199.00
(iv) Íocaíocht 1: €485 199;
Íocaíocht 3: €524 791.00
(v) Íocaíocht 2: €481 587;
Íocaíocht 4: €474 443.85
(vi) $\dfrac{485\,199(1.04)^n}{(1.0478)^n}$
(vii) €11 508, 316
(viii) 31%

Caibidil 6: Fad – Achar – Toirt

Cleachtadh 6.1

1. (i) $\dfrac{a}{2+a}$ (ii) $a = 8$

2. (i) $10x^2$ (ii) $5x^2$ (iii) 2 : 1

3. Bonn = 13 cm, airde = 8 cm

4. 9 cm, 40 cm

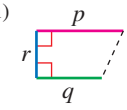
5. 12 m

6. 30°, 45°, 105°

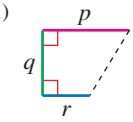
7. (i) Comhthreomharán
(ii) $(|AD| + |BC|) \times h$
(iii) Is ionann achar an traipéisiam agus leath achar na dronuilleoige:
$\text{Achar} = \dfrac{(|AD| + |BC|)}{2} \times h$

8. 15 cm, 21 cm

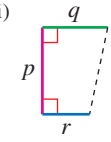
9. (i)



(ii)



(iii)



(iii) a chruthaíonn an t-achar is mó

10. (i) $x = 15.8$ cm
(ii) $y = 4.65$ cm

11. (i) 19.99 cm
(ii) $h = 9.31$ cm, achar $= 50.04\ \text{cm}^2$: freisin achar $= \frac{1}{2}(10.75)(10.75)\sin 60^\circ = 50.04\ \text{cm}^2$

12. 38.605 m²

13. (i) $\angle EOD = 60^\circ$
(ii) $\angle ODE = 60^\circ$
(iii) 64.95 cm²

14. (i) $\alpha = 135^\circ, \beta = 150^\circ, \theta = 120^\circ$
(ii) 134.8 cm²

15. 30 cm²

16. Cruthúnas

Cleachtadh 6.2

1. (i) 29.7 cm (ii) 35.6 cm²

2. (i) 73 cm² (ii) 38 cm

3. (a) $\dfrac{\pi r^2}{2}$ (b) $\pi(R^2 - r^2)$
(c) $(x + 2a)^2 - \pi a^2$ (d) $\dfrac{\pi a^2}{4} + ab$
(e) $\dfrac{a}{2}\sqrt{x^2 - \dfrac{a^2}{4}}$ (f) $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$

4. $r = \dfrac{P}{2 + \theta}$

5. 6.8 cm

6. (i) $2r^2$ (ii) $\dfrac{r^2}{4}(\pi - 2)$

7. Ga $= \dfrac{40}{\pi} \cong 12.73$ m,

Achar $= \dfrac{1600}{\pi} \approx 509.30$ m² mar go n-úsáidimid garluach le haghaidh π

8. (i) 1 : 2 (ii) 4 : 1

9. $\dfrac{42\sqrt{2}}{\pi}$

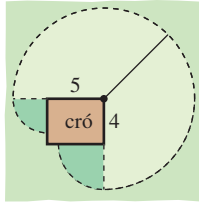
10. (i) $\dfrac{\pi}{3}$ raidian (ii) $6 + \dfrac{4\pi}{3}$ cm
(iii) $\dfrac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$ cm² (iv) $\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}$

11. Achar $= \dfrac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$; $3\pi + 2 : \pi - 2$

12. 153.71 cm²

13. $r = 3.429$ cm

14. 170 m^2

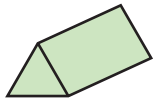
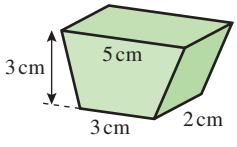


Cleachtadh 6.3

1. (i) (a) 10.5 m^2 (b) 18.5 m^2
(c) 2771.3 cm^2 (d) 560 cm^2
(e) 336 cm^2 (f) 749.4 cm^2
(ii) (a) 2.1 m^3 (b) 4.3 m^3
(c) 8000 cm^3 (d) 800 cm^3
(e) 254 cm^3 (f) 1128.5 cm^3

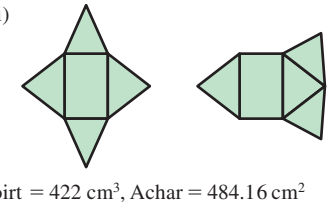
2. (i) f:2427 mm^2, d:2121 mm^2, $b\backslash a$:1257 mm^2, e:905 mm^2, g:805 mm^2, h:720 mm^2, c:283 mm^2, i:153 mm^2
(ii) f:7238 mm^2, d:7069 mm^2, a:4189 mm^2, b:2962 mm^2, e:1810 mm^2, g:1257 mm^2, h:1056 mm^2, c:339 mm^2, i:144 mm^2

3. (i) 4.92 m^3
(ii) rogha 2 (€30 in aghaidh 100kg): €390
(iii) $V = \dfrac{h \tan\theta + 2a}{2}.h.w$
(iv) bun = 1.45 m, barr = 2.65 m

4. (i) $x = 2.5$ cm
(ii)  , priosma triantánach
(iii) 24 cm^3
(iv) 

5. (i) 476.4 cm^3 (ii) 1481.0 cm^3

6. (i) 3 u 23 nóim (ii) 4 u 46 nóim

7. (i) 700 cm^3
(ii)  505 cm^2

8. Toirt = 422 cm^3, Achar = 484.16 cm^2

9. (a) achar (b) fad (c) achar
(d) fad (e) achar (f) fad
(g) toirt (h) toirt

10. (i) comhsheasmhach (ii) ar neamhréir
(iii) ar neamhréir (iv) comhsheasmhach
(v) comhsheasmhach (vi) ar neamhréir
(vii) comhsheasmhach

11. (i) 84 cm^3 (ii) 12 cm, 148 cm^2
(iii) Toirt $= \dfrac{m^3}{6}$, Achar $= \dfrac{m^2}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$

12. (i) (a) 2744 cm^3
(b) $1437\frac{1}{3}$ cm^3
(c) 48%
(ii) níos lú, $33\frac{1}{3}$%

13. 496.4 cm^3

Cleachtadh 6.4

1. 13.10 ha

2. (i) 2.2% (ii) 17.01 cm^2

3. (i) 17.5 u^2 (ii) 17.875 u^2

4. 1.82 u^2

5. (i) 1 : 2.14 (ii) 2.563

6. 81 720 km^2

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. 2 : 1

2. (a) Achar = 1464 cm^2; toirt = 3589 cm^3
(b) Achar = 434 cm^2; toirt = 523 cm^3
(c) Achar = 25 500 cm^2; toirt = 225 000 cm^3

3. (i) 1.28 raid (ii) 16 cm^2 (iii) 1:1.391

4. Toilleadh = 450 m^3, 750 uair an chloig

5. (i) $x = \sqrt{20}$ (ii) $x = 3.96$ cm
(iii) $x = 0.99$ raid

6. Cruthúnas

7. (i) $10.6u^2$ (ii) $16.73u^2$

8. $4 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{6}$

9. (i) 16π cm ≈ 50.3 cm
(ii) 32π $cm^2 \approx 100.5$ cm^2

10. €38 186.72

11. 112.7 cm^3

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. (i) Cruthúnas (ii) $r = 25$
(iii) $\theta = 2$ raidian (iv) $A = 625$ cm^2

2. (i) A : 2500 poll; B : 2822 poll
(ii) A : 21.46%; B : 11.34%

3. (i) $\text{Achar}_{PQO} = \frac{1}{2}r^2 \sin\theta$
(ii) Achar an teascáin $= \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$
(iii) $\text{Achar}_{PQN} = \frac{1}{2}r^2(\sin(\pi - \theta))$

4. (d) Achar an dromchla = 56 077 cm^2; toirt = 133 518 cm^3
(e) Achar an dromchla = 1092 cm^2; toirt = 1767 cm^3
(f) Achar an dromchla = 332 cm^2; toirt = 435.63 cm^3

5. (i) 4.189 cm^2 (ii) 2.4567 cm^2

6. (i) 1.84 raid (ii) 80.96 m
(iii) 26.7 m (iv) 848 m^2

7. Cruthúnas
(i) $r = 3.3$ cm (ii) $A = 24.22$ cm^2

8. (i) $A - B$: ag luasghéarú beagnach go haonfhoirmeach

$C - D$: tosaíonn sí ag moilliú
$E - F$: Tar éis don veain a bheith stopaithe, tosaíonn sí ag gluaiseacht arís

(ii) Fad

(iii) 5.47 km

9. Cruthúnas

10. $854\,u$

Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

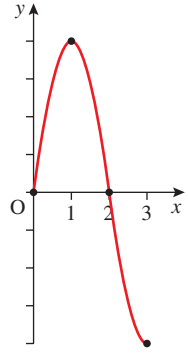
1. (i) (a) $l = r\theta$

(b) $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

(ii) $A = 2r - r^2$ … Cruthúnas

(iii) $A = 1 - (r - 1)^2$

(iv)



(v) $\theta = 2$ raidian

2. (i) Tá siad ar comhachar … bréagach
An triantán níos mó faoi 10.27% … fíor
Difríocht 9.24% … fíor

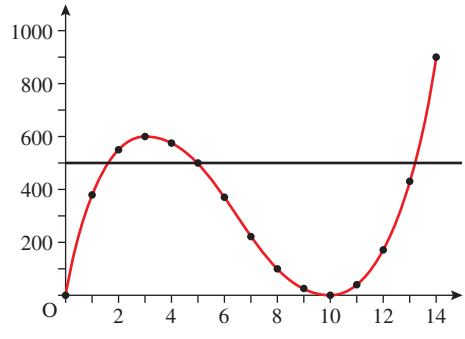
(ii) 57.52°

(iii) Níl

3. (i) $A = 4h^2 - 80h + 400$

(ii) $h = \frac{20}{3}$ cm

(iii) $V = 4h^3 - 80h^2 + 400h$



(iv) $h = 3.5$ cm

(v) $h = 1.95, 5, 13.2$ cm

(vi) $h > 10 \Rightarrow 20 - 2(10) = 0 \Rightarrow$ níl aon toirt ann

4. (i) $A = 148\text{ cm}^2$

(ii) 5.78%

(iii) $a = 0.64, b = 0.86, c = 0.96$

(iv) Díorthú

(v) $A = \frac{r^2}{4}(5.92) = 1.48r^2$

(vi) $A_5 = 37\text{ cm}^2, A_{10} = 148\text{ cm}^2,$
$A_{15} = 333\text{ cm}^2$

(vii) Tharla go bhfuil $A = \frac{\pi r^2}{2} = 1.57r^2$, tá an meastachán ar an achar de réir na foirmle róbheag faoi 5.78%

5. (i) $l = 15 - h, w = 20 - 2h$, airde $= h$

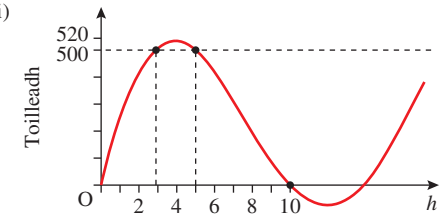
(ii) Toirt $= 2h^3 - 50h^2 + 300h$

(iii) $h = 5$ cm

(iv) $V = 500\text{ cm}^3$

(v) $h = 2.9$ cm

(vi)



(vii) Ní féidir, $500 + 50 = 550\text{ cm}^3$ a bheadh sa toilleadh nua agus ní thabharfadh luach ar bith ar h toilleadh 550 cm^3

Caibidil 7: Ailgéabar 3

Cleachtadh 7.1

1. (i) $x > 4$ (ii) $x \leqslant 1$ (iii) $x < -3$

2. (i) $x < 10$ (ii) $x \leqslant 7$ (iii) $x < 8$

3. (i) $x < 4$ (ii) $x \leqslant -\frac{1}{2}$ (iii) $x > -7$

4. (i) $-3 \leqslant x \leqslant 2$ (ii) $-2 \geqslant x > 4$
(iii) $-\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}$

5. (i) $2 < x < 7$ (ii) $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\frac{2}{3}$
(iii) $-14 \leqslant x \leqslant -7$

6. $x > 2.5$

7. (i) $x < 4$ (ii) $x > 2$ (iii) $2 < x < 4$

8. (i) $x > 2\frac{1}{2}$ (ii) $x < 3$ (iii) $2\frac{1}{2} < x < 3$

9. (i) $x < 7$ (ii) $x > 8$ (iii) $\varnothing$

10. (i) $x \leqslant 4$ (ii) $x \geqslant 4$ (iii) $x = 4$

11. Fad = 10 m, leithead = 9 m

12. $a = 6.645, b = 7.645$

13. (i) $a^n < b^n$ (ii) $a^n > b^n$

14. $x = 6$

Cleachtadh 7.2

1. (i) $-2 \geqslant x \geqslant 3$ (ii) $-5 \leqslant x \leqslant 2$
(iii) $\frac{1}{2} < x < 2$

2. (i) $-3 \leqslant x \leqslant 2$ (ii) $-4 < x < 1\frac{1}{2}$
(iii) $-3\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$

3. (i) $-1\frac{1}{2} > x > 1\frac{2}{3}$ (ii) $-4 \geqslant x \geqslant 4$
(iii) $-1\frac{1}{2} \geqslant x \geqslant 4$

4. $-1 < x < 7$

5. Cruthúnas

6. $-3 \geqslant k \geqslant 1$

7. $-4 \leqslant k \leqslant 1$
8. $-1 \leqslant p \leqslant 3; p = 2$
9. (i) $-2 > x > -1$ (ii) $x > 3$
(iii) $-10 < x < -3$
10. (i) $-14 > x > 5$ (ii) $-\frac{1}{2} < x < -\frac{3}{10}$
(iii) $\frac{1}{5} < x < \frac{6}{11}$
11. (i) $1\frac{1}{2} > x \geqslant 3$ (ii) $1 < x < 3$
(iii) $-1 \geqslant x > 1$
12. (i) $-3 < x < 10$ (ii) $-9 < x < 5$
(iii) $1 > x \geqslant 2\frac{1}{2}$
13. $-3 > x > -2$
14. Gan aon fhréamh réadach
15. (i) $1\frac{1}{2} \geqslant t \geqslant 5$ (ii) $2 \leqslant t \leqslant 4.5$
(iii) $1\frac{1}{2} < t < 2$ agus $4.5 < t < 5$
16. (i) $-3 > x > -\frac{1}{2}$ (ii) $1 \geqslant x \geqslant 3$
(iii) $-1\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0.5$ (iv) $-1 < x < 5$
17. (i) Fad > 3.75 (ii) leithead > 0.75
18. $-2 < p < 3$
19. (i) $x < 10$
(ii) $x > 1$
(iii) $1 < x < 10$
20. $x = 2$ m nó 3 m

Cleachtadh 7.3

1. (i) $(-4, -2)$ (ii) $(-2, 6)$ (iii) $(-2, 3)$
(iv) $(\frac{1}{2}, 1)$ (v) $(2, 4)$ (vi) 2
2. $-1, 2\frac{1}{3}$
3. $f(x) = |x|, g(x) = |x - 4|, h(x) = |x + 3|,$
$f(-2) = 2, g(2) = 2, h(-5) = 2$
4. $f(x) = |x + 1|, g(x) = |2x + 2|, h(x) = |3x + 3|$
5. 4
6. (i) $4 < x < 8$ (ii) $-6 \leqslant x \leqslant 2$
(iii) $-2 \geqslant x \geqslant 3$ (iv) $-5 \geqslant x \geqslant 6$
(v) $-3 < x < -\frac{1}{3}$ (vi) $1 < x < 7$
7. (i) $-3 \geqslant x \geqslant 4$ (ii) $-1\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant -1$
(iii) $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 5$
8. $-2\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 8$
9. $-24 \geqslant x \geqslant 0$
10. $-1 < x < 1$
11. $x = -1, 0; -1 > x > 0$
12. (i) $-4 < x < 2$ (ii) $-4 > x > 2$
(iii) $1\frac{1}{4} < x < 3\frac{1}{2}$ (iv) $2 < x < 3$
(v) $1\frac{1}{4} < x < 2$ (vi) $2 < x < 3$
(vii) $3 < x < 3\frac{1}{2}$
13. (i) $\frac{2}{5} < x < \frac{1}{2}$ (ii) $x = -1, 1\frac{2}{3}$
(iii) $-2 < x < 0$

Cleachtadh 7.5

1. Cruthúnas 2. Cruthúnas 3. Cruthúnas
4. Cruthúnas 5. Cruthúnas 6. Cruthúnas
7. Cruthúnas 8. Cruthúnas
9. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; cruthúnas
10. Cruthúnas 11. Cruthúnas 12. Cruthúnas
13. Cruthúnas 14. Cruthúnas 15. Cruthúnas
16. (i) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$
(ii) $(a - b)^2(a + b)(a^2 + b^2)$
17. Cruthúnas 18. Cruthúnas 19. Cruthúnas
20. Iolraigh an dá thaobh faoi $d(b + d)$;
ansin roinn an dá thaobh ar bd
21. Cruthúnas

Cleachtadh 7.6

1. (i) a^5 (ii) x^4 (iii) $6x^6$ (iv) x^3
(v) x^{-1} (vi) 1 (vii) 3 (viii) a^6
(ix) x^3 (x) $9a^2b^2$
2. (i) 4 (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) 8
(iv) $\frac{9}{4}$ (v) 2
3. (i) 4 (ii) 8 (iii) 9
(iv) 27 (v) 25
4. (i) $\frac{9}{4}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{125}{27}$
(iv) $\frac{25}{9}$ (v) $\frac{3}{2}$
5. 4^{-2}
6. $\frac{11}{12}$
7. (i) $\dfrac{y^3}{x^2}$ (ii) $\dfrac{p^{12}}{q^8}$ (iii) $\frac{1}{9}$
(iv) $y^{\frac{2}{3}}$ (v) $\dfrac{1}{a^{\frac{a}{2}}b^2}$ (vi) $x^{\frac{1}{4}}$
8. (i) $\dfrac{x + 1}{x}$ (ii) $x^2 - x$ (iii) $1 + x$
9. $\dfrac{x}{x - 1}$
10. $k = \frac{1}{2}$
11. 262 Hz
12. $\frac{9}{16}$
13. $k = 24$
14. $k = 28$

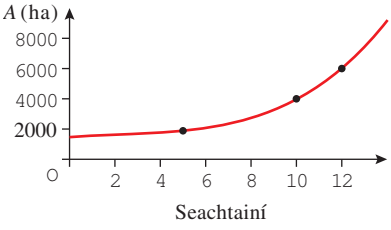
Cleachtadh 7.7

1. (i) 5 (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) -3
2. (i) $-\frac{3}{2}$ (ii) $-\frac{5}{2}$ (iii) 3 (iv) $-\frac{3}{2}$
3. (i) $-\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{5}{4}$ (iii) $-\frac{1}{6}$ (iv) $-\frac{1}{3}$
4. $2^{\frac{5}{3}}; \frac{15}{8}$
5. $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{16}{3}$
6. $4.2^x; 2.2^x; c = \frac{5}{2}$
7. $x = 1, 2$
8. $x = 2$
9. (i) $x = 0, 3$ (ii) $x = 0, 2$
10. (i) y^2 (ii) $2y^2$
(iii) $8y; x = -1, 2$
11. $x = -1, 0$ 12. $x = -\frac{1}{2}, 0$

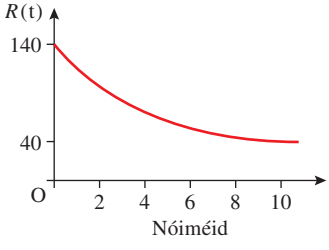
13. $x = 0, 3$ **14.** $x = \pm 1$
15. $x = 1, 3$

Cleachtadh 7.8

1. (i) B (ii) A (iii) D (iv) C
2. (i) 1000 ha
(ii) (a) 4000 ha (b) 5278 ha
(iii)



(iv) 5 seachtaine
3. (i) ag laghdú (ii) ag laghdú
(iii) ag méadú (iv) ag laghdú
4. (i) 0.6 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 6
5. (iv) $-2 \leqslant x < 0$ (v) $0 < x \leqslant 4$
(vi) $x = 0$ (vii) $0 < x \leqslant 4$
6. (i) Meath
(ii) (a) 3 lá
(b) 9 lá
(c) 18 lá
(iii) 3.9°C
7. (a) (i) 97.6% (ii) 94.2%
(b) 5780 bliain
(c) 1964 bliain
8. (i) 1000 ha
9. (i)



(ii) 140 buille in aghaidh an nóiméid
(iii) (a) 55 nóiméad
(b) 10.5 nóiméad
(iv) 50 buille in aghaidh an nóiméid
10. 1000
11. (i) €5027.5 (ii) €5055.15
(iii) €5082.95 (iv) $5000\,(1.0055)^t$
12. (i) 40
(ii) $b = 1.2; b > 1$ $\therefore$ tá líon na gcuileog ag méadú

Cleachtadh 7.9

1. (i) 2 (ii) 4 (iii) 3 (iv) 6
2. (i) $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{5}{4}$ (iv) -3
(v) -4
3. (i) -3 (ii) 4 (iii) 64 (iv) 8
4. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) -1
5. (i) 3 (ii) 2 (iii) 2
6. (i) 0 (ii) 2
7. (i) $a + 1$ (ii) $a - 1$ (iii) $2a - 1$
(iv) $2a - 3$ (v) $2a + 1$
8. (i) 7.64 (ii) 3.86 (iii) 1.93
(iv) -0.279
9. (i) $x = 1 + \dfrac{\log(y - 3)}{\log 2}$
(ii) $x = 3.3219$
10. Cruthúnas
11. Cruthúnas
12. (i) 13 (ii) 10 (iii) -3
13. Cruthúnas
14. (i) 0.602 (ii) 1.43 (iii) 2.55
(iv) 3.75 (v) 4.46 (vi) 5.54
(vii) 6.59
15. Íosluach $= 10^3 = 1000$
Uasluach $= 10^4 = 10000$
16. 0.143
17. (i) $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{3}{5}$
18. Cruthúnas **19.** Cruthúnas
20. $p = 2q^3$ **21.** $a = \sqrt{3}$
22. 5.66 **23.** $x = 4$
24. $x = \pm\frac{4}{3}$ **25.** $x = 21$
26. $x = 3$ **27.** $x = \frac{2}{3}, 5$
28. $x = -2, 6$ **29.** $x = \frac{1}{8}$
30. $x = 3, y = 2,$ nó $x = \frac{2}{5}, y = 15$
31. (i) $x = \frac{1}{16}, 2$ (ii) $x = \frac{1}{4}, 2$

Cleachtadh 7.10

3. (i)

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_3 x$	-2	-1	0	1	2

(iii) 0.8 (iv) 0.834
4. Is ionann graf amháin agus inbhéarta an ghraif eile
5. Graf
6. Graf
7. (i) $x = \dfrac{\log(y + 5)}{\log 3} - 2$ nó $\log_3(y + 5) - 2$
(ii) 1.236
8. Graf
9. Graf
10. Graf

Cleachtadh 7.11

1. (i) (a) €5030 (b) €5060.18 (c) €5090.54
(ii) $€5000\,(1.006)^t$
(iii) 116 mí
2. 0.25
3. (ii) 8.8 nóiméad (iii) 15°
4. (i) 0.1 Wm^{-2} agus 0.01 Wm^{-2}
(ii) 130 dB

5. Cruthúnas [$E = A^{1.5}.10^{4.8}$]
6. (i) €100 $(1.045)^t$ (ii) €155.30
(iii) €80.25
7. (i) 0.6 kg (ii) 15% (iii) 5 mhí
8. (i) $M_0 = 10$ g, $k = 0.00495$
(ii) 7 g
(iii) 325 lá

Súil Siar (Croícheisteanna)

1. $-3.5 \leqslant x \leqslant 1$
2. (a) (i) 3162 (ii) 1.65
(iii) 1.32 (iv) 2.7
(b) (i) 30 (ii) 6.38
(iii) 0.00823 (iv) 0.99
3. (i) $a = \frac{1}{2}$ (ii) $b = \frac{3}{2}$
4. $x = 5, x = 11$
5. (i) $n = 1$ (ii) $n = -\frac{10}{3}$
6. (i) $a + b = 2.5, 4a + b = 4$
(ii) $a = 0.5, b = 2$
7. $C = \ln x, A = \ln x + 1, B = \ln(x + 1)$
8. $x = 2, 3$
9. $A = \frac{9}{2}, b = \ln\frac{4}{3}$
10. $k = \dfrac{4}{\ln 3}$
11. $a = 2, b = 3$
12. $x = 1.96$

Súil Siar (Ardcheisteanna)

1. $-5 < x < -2$
2. (i) 30 g (ii) $1585y$ (iii) $6644y$
3. (i) 1000 (ii) 20
4. $125, \frac{1}{25}$
5. $x \leqslant 3.38$
6. (ii) $x = -1$ (iii) $-3, \leqslant x < 0$
7. $x = e^y + 3$
8. $-24 \geqslant x \geqslant 0$
9. $x + 1$
10. Cruthúnas
11. Cruthúnas
12. (i) $-3 \leqslant k \leqslant 4\frac{1}{2}$
(ii) $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$
13. Cruthúnas
14. $u_{n+1} = (n - 19)2^{n+1}, u_{n+2} = (n - 18)2^{n+2}$
15. $x = \frac{1}{2}, y = 1$
16. (i) Feidhm easpónantúil
(ii) 57 030
(iii) 40 000
(iv) 23.5 bliain
17. (i) $P = Ae^{kt}$, áit a bhfuil $k = 0.078576$ agus t = líon na mblianta
(ii) 17 550
(iii) 2016

Súil Siar (Ceisteanna ina n-iarrtar freagra níos faide)

1. (i) $t = 0, N = 5000; t = 5, N = 2362;$ tá an maíomh bailí
(ii) 1115.65
(iii) 5000
(iv) 26.1 lá
2. (i) $0.02\,(0.92)^{\frac{x}{10}}$
(ii) 0.0197 mm^2
(iii) $0.02\,(0.92)^{(10 - 2.9x)}$
(iv) $x > 2.59$
3. (i) $A = (0.83)^n I; B = (0.66)\,(0.89)^n I$
(ii) 6 stáisiún
4. (i) $A\,(1.11)^t$ (ii) $10A\,(0.95)^t$
(iii) 14.8 bliain (iv) 29.6 bliain
(v) Graif
5. (i) Fás (ii) Cruthúnas
(iii) Cruthúnas (iv) $a = 1, \frac{1}{2}$
(v) $a = 1, b = 0; a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}\ln 2$
(vi) $A = 20\,000$
(vii) 6.65 uair an chloig